文章编号: 1001-0920 (2011) 10-1520-05

一类分布时滞不确定系统的鲁棒非脆弱保性能控制器设计

李 涛, 张合新, 孟 飞
(第二炮兵工程学院 自动化系，西安 710025)

摘 要: 研究了一类具有分布时滞的线性不确定系统的鲁棒非脆弱保性能控制问题. 考虑分布时滞系统和状态反馈控制器均具有时变不确定性, 通过构造新的含三重积分项的Lyapunov-Krasovskii泛函, 并结合不等式推导技巧, 以线性矩阵不等式形式给出了系统鲁棒非脆弱保性能控制器存在的充分条件. 该方法保证了给定的二次性能函数不超过一个确定的界并且是分布时滞相关的. 仿真实例表明了该方法的可行性和有效性.

关键词: Lyapunov-Krasovskii 泛函；分布时滞；非脆弱；保性能控制；线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust and non-fragile guaranteed cost controller design for uncertain systems with distributed delay

LI Tao, *ZHANG He-xin*, *MENG Fei*
(Department of Automation，The Second Artillery Engineering College，Xi’an 710025，China．Correspondent：LI Tao, E-mail：yingying4539893@sohu.com)

Abstract: The robust and non-fragile guaranteed cost control of uncertain linear systems with distributed delay is investigated. Both the distributed-delay system and the state feedback controller are assumed to have time-varying uncertainties. A sufficient condition in terms of linear matrix inequality is established for the existing of the robust non-fragile guaranteed cost controller by constructing new Lyapunov-Krasovskii functional with triple-integral term and using inequality technique. The proposed approach can keep the quadratic performance function below a supper bound and delay-dependent. Simulation examples show the effectiveness and feasibility of the method.

Key words: Lyapunov-Krasovskii functional；distributed delay；non-fragile；guaranteed cost control；linear matrix inequality

1 引 言

近年来, 不确定时滞系统的鲁棒非脆弱控制器设计受到学者们的广泛关注和研究[1-9]. Keel 等人[1]最先研究了非脆弱控制器设计问题, 并指出现有的鲁棒控制器设计方法 (如 H_∞, μ 和 l_1 等综合方法) 都仅考虑了系统参数的不确定性, 而没有考虑控制器增益的不确定性. 当控制器参数存在摄动时 (这种情况很常见, 例如系统初运行时、控制器的微调以及控制器性能衰减时), 传统的鲁棒控制方法表现出明显的脆弱性. 随后出现一系列非脆弱控制研究成果, 如非脆弱 H_∞ 控制[3-4]、单一滞后线性系统的非脆弱保性能控制[5]、多滞后线性系统的非脆弱控制[6]以及中立型时滞系统的非脆弱保性能控制[7,9]等. 另外, 文献 [10] 研究了一类分布时滞中立型系统的保性能控制问题, 但关于分布时滞系统非脆弱保性能控制的报道还较为少见.

本文考虑了一类系统参数和控制器增益同时存在结构不确定性的分布时滞不确定系统的鲁棒非脆弱保性能控制问题, 给出了控制器存在的充分条件和控制器增益的设计方法, 并通过设计实例表明了所提出的判据的有效性.

2 问题描述

首先给出以下标记: R^n 为 n 维欧氏空间, I 为适当维数的单位矩阵. $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ 表示矩阵 X 为对称正定矩阵. 对于任意矩阵 B 和两个对称矩阵 A, C, $\begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix}$ 为对称矩阵, $*$ 为对称矩阵中的对称项.

考虑如下含分布时滞的线性不确定控制系统:

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)\int_{t-r}^{t} x(s)\mathrm{d}s + B_0u(t),$$

收稿日期: 2010-05-22；**修回日期:** 2010-07-05.
作者简介: 李涛(1982−), 男, 博士生, 从事时滞系统鲁棒稳定性与鲁棒镇定的研究；张合新(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器制导与控制等研究.

$$x(t)=\phi(t),\ t\in[-r,\ 0]. \tag{1}$$

其中: $x(t)\in R^n$ 为系统状态; $u(t)\in R^m$ 为控制输入; 时滞 $r>0$ 为已知标量; $\phi(t)$ 为系统的初始条件; $A_0(t)$ 和 $A_1(t)$ 为具有时变不确定性的矩阵函数, 满足

$$A_0(t)=A_0+\Delta A_0(t),\ A_1(t)=A_1+\Delta A_1(t), \tag{2}$$

A_0 和 A_1 为已知定常矩阵, $\Delta A_0(t)$ 和 $\Delta A_1(t)$ 为具有时变结构不确定性的未知矩阵, 有

$$[\Delta A_0(t)\ \ \Delta A_1(t)]=DF(t)[E_0\ \ E_1], \tag{3}$$

D, E_0 和 E_1 为适当维数的定常矩阵, $F(t)$ 为具有可测元的不确定矩阵, 满足 $F(t)^{\mathrm T}F(t)\leqslant I,\forall t$.

引入保性能函数

$$J=\int_0^\infty[x^{\mathrm T}(t)Yx(t)+u^{\mathrm T}(t)Zu(t)]\mathrm dt, \tag{4}$$

其中 $Y=Y^{\mathrm T}>0$ 和 $Z=Z^{\mathrm T}>0$ 是给定的加权矩阵. 本文的目的是设计一个具有增益摄动的状态反馈控制器

$$u(t)=(K+\Delta K)x(t), \tag{5}$$

使得系统 (1) 鲁棒稳定并具有保性能特性. 其中: K 为控制器的增益; ΔK 为增益摄动, 满足

$$\Delta K=D_aF_a(t)E_a,\ F_a^{\mathrm T}(t)F_a(t)\leqslant I, \tag{6}$$

D_a 和 E_a 为已知定常矩阵, $F_a(t)$ 为具有可测元的不确定矩阵.

引理 1[11]　任意定常矩阵 $M\in R^{n\times n}$, $M=M^{\mathrm T}>0$, 标量 $\gamma>0$, 向量函数 $x:[0,\gamma]\to R^n$ 的相关积分项有定义, 则有

$$\Big(\int_0^\gamma x(s)\mathrm ds\Big)^{\mathrm T}M\Big(\int_0^\gamma x(s)\mathrm ds\Big)\leqslant \gamma\int_0^\gamma x^{\mathrm T}(s)Mx(s)\mathrm ds.$$

引理 2[12]　给定具有适当维数的矩阵 $Q=Q^{\mathrm T}$, H, E, 有

$$Q+HF(t)E+E^{\mathrm T}F(t)^{\mathrm T}H^{\mathrm T}<0.$$

对于任意满足 $F(t)^{\mathrm T}F(t)\leqslant I$ 的 $F(t)$ 成立的充要条件是存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$Q+\varepsilon HH^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm T}E<0.$$

3　鲁棒非脆弱保性能控制器设计

首先考虑其保性能稳定问题, 有

$$\begin{aligned}\dot x(t)=&(A_0+B_0(K+\Delta K))x(t)+\\&A_1\int_{-r}^0x(t+\theta)\mathrm d\theta,\\x(t)=&\phi(t),\ t\in[-r,\ 0].\end{aligned} \tag{7}$$

将控制器 (5) 代入不确定系统 (1) 的名义系统即可得到闭环系统 (7).

定理 1　给定矩阵 Y 和 Z, 若存在适当维数的正定对称矩阵 P, Q, R 以及标量 $\varepsilon_1>0$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\varXi_{11} & \varXi_{12} & \varXi_{13} & K^{\mathrm T}Z & PB_0D_a/r & \varepsilon_1E_a^{\mathrm T}\\ * & \varXi_{22} & rA_1^{\mathrm T}R & 0 & 0 & 0\\ * & * & -2R & 0 & RB_0D_a & 0\\ * & * & * & -Z/r & Z^{\mathrm T}D_a & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon_1I & 0\\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1I\end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

则闭环系统 (7) 是渐近稳定的, 且保性能函数满足

$$\begin{aligned}J=&\int_0^\infty[x^{\mathrm T}(t)Yx(t)+u^{\mathrm T}(t)Zu(t)]\mathrm dt\leqslant\\&x_0^{\mathrm T}Px_0+\frac1r\int_{-r}^0\int_\theta^0\varphi^{\mathrm T}(s)Q\varphi(s)\mathrm ds\mathrm d\theta+\\&\frac1r\int_{-r}^0\int_\theta^0\int_\alpha^0\dot\varphi^{\mathrm T}(s)R\dot\varphi(s)\mathrm ds\mathrm d\alpha\mathrm d\theta.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\varXi_{11}=&\frac1rA_0^{\mathrm T}P+\frac1rPA_0+\frac1rK^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}P+\\&\frac1rPB_0K+\frac1rQ-\frac1{r^2}R+rY,\\\varXi_{12}=&PA_1+\frac1{r^2}R,\ \varXi_{22}=-\frac1{r^2}R-Q,\\\varXi_{13}=&A_0^{\mathrm T}R+K^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}R.\end{aligned}$$

证明　令 $A_k=A_0+B_0(K+\Delta K)$, 对闭环系统构造如下形式的 Lyapunov-krasovskii 泛函:

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t). \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}V_1(t)=&x^{\mathrm T}(t)Px(t),\\V_2(t)=&\frac1r\int_{-r}^0\int_{t+\theta}^tx^{\mathrm T}(s)Qx(s)\mathrm ds\mathrm d\theta,\\V_3(t)=&\frac1r\int_{-r}^0\int_\theta^0\int_{t+\alpha}^t\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\mathrm ds\mathrm d\alpha\mathrm d\theta.\end{aligned}$$

取 Lyapunov 泛函 $V(t)$ 对时间求导, 有

$$\begin{aligned}\dot V_1(t)=&x^{\mathrm T}(t)(A_k^{\mathrm T}P+PA_k)x(t)+\\&\int_{-r}^0x^{\mathrm T}(t+\theta)A_1^{\mathrm T}Px(t)\mathrm d\theta+\\&x^{\mathrm T}(t)PA_1\int_{-r}^0x(t+\theta)\mathrm d\theta,\\\dot V_2(t)=&x^{\mathrm T}(t)Qx(t)-\int_{-r}^0x^{\mathrm T}(t+\theta)Qx(t+\theta)\mathrm d\theta,\\\dot V_3(t)=&\frac12r\dot x^{\mathrm T}(t)R\dot x(t)-\\&\frac1r\int_{-r}^0\int_\theta^0\dot x^{\mathrm T}(t+\alpha)R\dot x(t+\alpha)\mathrm d\alpha\mathrm d\theta,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\frac12r\dot x^{\mathrm T}(t)R\dot x(t)=\\&\frac12r\Big[A_kx(t)+A_1\int_{-r}^0x(t+\theta)\mathrm d\theta\Big]^{\mathrm T}\times\\&R\Big[A_kx(t)+A_1\int_{-r}^0x(t+\theta)\mathrm d\theta\Big]=\\&\frac12r\Big[\int_{-r}^0\Big(\frac1rA_kx(t)+A_1x(t+\theta)\Big)\mathrm d\theta\Big]^{\mathrm T}R\times\\&\Big[\int_{-r}^0\Big(\frac1rA_kx(t)+A_1x(t+\theta)\Big)\mathrm d\theta\Big].\end{aligned}$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}r\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{x}(t)\leqslant\\&\frac{1}{2}r^2\int_{-r}^{0}\Big(\frac{1}{r}A_kx(t)+A_1x(t+\theta)\Big)^{\mathrm{T}}\times\\&R\Big(\frac{1}{r}A_kx(t)+A_1x(t+\theta)\Big)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{10}$$

同时, 由于 $-r\leqslant\theta\leqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}&-\frac{r}{r^2}\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)R\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta\leqslant\\&\frac{\theta}{r^2}\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)R\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\theta}{r^2}\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)R\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta=\\&-\frac{1}{r^2}\int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0}-\theta\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)R\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta\leqslant\\&-\frac{1}{r^2}\int_{-r}^{0}\Big(\int_{\theta}^{0}\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)^{\mathrm{T}}R\Big(\int_{\theta}^{0}\dot{x}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{11}$$

将式 (10) 和 (11) 代入 $\dot{V}(t)$, 有

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)\leqslant\\&\int_{-r}^{0}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t+\theta)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Bigg\{\begin{bmatrix}\varXi_{11}^0 & PA_1+R/r^2\\ * & -R/r^2-Q\end{bmatrix}+\\&\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_k^{\mathrm{T}}/r\\A_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}r^2R\begin{bmatrix}A_k^{\mathrm{T}}/r\\A_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Bigg\}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t+\theta)\end{bmatrix}\mathrm{d}\theta=W(t).\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\varXi_{11}^0=A_k^{\mathrm{T}}P/r+PA_k/r+Q/r-R/r^2$. 由于 $x^{\mathrm{T}}(t)Yx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Zu(t)>0$, 有

$$\dot{V}(t)<W(t)+x^{\mathrm{T}}(t)Yx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Zu(t).\tag{13}$$

若

$$W(t)+x^{\mathrm{T}}(t)Yx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Zu(t)\leqslant 0,\tag{14}$$

且 $\dot{V}(t)<0$, 则闭环系统 (7) 是渐近稳定的, 此时有

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\varXi_{11}^0 & PA_1+\dfrac{1}{r^2}R\\ * & -\dfrac{1}{r^2}R-Q\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{r}A_k^{\mathrm{T}}\\A_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}r^2R\begin{bmatrix}\dfrac{1}{r}A_k^{\mathrm{T}}\\A_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\\&\begin{bmatrix}rY+r(K+\Delta K)^{\mathrm{T}}Z(K+\Delta K) & 0\\ * & 0\end{bmatrix}<0.\end{aligned}$$

应用 Schur 补并利用矩阵变换可得

$$\begin{bmatrix}\varXi_{11}^0+rY & PA_1+\dfrac{1}{r^2}R & A_k^{\mathrm{T}}R & (K+\Delta K)^{\mathrm{T}}Z\\ * & -\dfrac{1}{r^2}R-Q & rA_1^{\mathrm{T}}R & 0\\ * & * & -2R & 0\\ * & * & * & -\dfrac{1}{r}Z\end{bmatrix}<0.\tag{15}$$

分离不确定项 (含 ΔK 项) 可得

$$\varXi_0+MD_aF_a(t)E+E^{\mathrm{T}}F_a^{\mathrm{T}}(t)D_a^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}<0.\tag{16}$$

其中: $M=[B_0^{\mathrm{T}}P/r\ \ 0\ \ B_0^{\mathrm{T}}R\ \ Z]^{\mathrm{T}}$, $E=[E_a\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$.

由引理 2 可得

$$\varXi_0+\varepsilon_1^{-1}MD_aD_a^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1E^{\mathrm{T}}E<0.\tag{17}$$

应用 Schur 补, 并利用矩阵变换可得 $\varXi<0$, 另外, 由式 (12) 和 (14) 可得

$$\dot{V}(t)\leqslant W(t)\leqslant-(x^{\mathrm{T}}(t)Yx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Zu(t)),\tag{18}$$

所以

$$\begin{aligned}J=&\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Yx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Zu(t)]\mathrm{d}t\leqslant\\&-\int_0^{\infty}\dot{V}(t)\mathrm{d}t=V(0).\end{aligned}\tag{19}$$

综上, 定理 1 得证. □

下面考虑名义系统 (20) 的非脆弱保性能控制问题

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1\int_{-r}^{0}x(t+\theta)\mathrm{d}\theta+B_0u(t),\\&x(t)=\phi(t),\ t\in[-r,\ 0].\end{aligned}\tag{20}$$

定理 2 给定矩阵 Y 和 Z, 若存在适当维数的正定对称矩阵 $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ 以及适当维数的矩阵 $\varGamma$ 和标量 $\bar{\varepsilon}_1>0$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\varPi_{11} & A_1\bar{R} & \varPi_{13} & \varGamma^{\mathrm{T}} & \bar{\varepsilon}_1B_0D_a/r & \bar{P}E_a^{\mathrm{T}} & \bar{P} & \bar{P}\\ * & -\bar{R}/r^2 & r\bar{R}A_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & -2\bar{R} & 0 & \bar{\varepsilon}_1B_0D_a & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -Z^{-1}/r & \bar{\varepsilon}_1D_a & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\bar{\varepsilon}_1I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\bar{\varepsilon}_1I & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -r\bar{Q} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -Y^{-1}/r\end{bmatrix}<0,\tag{21}$$

则名义系统 (20) 在控制器 (5) 的作用下是保性能稳定的, 且反馈增益 $K=\varGamma\bar{P}^{-1}$, 其中

$$\begin{aligned}\varPi_{11}=&\bar{P}A_0^{\mathrm{T}}/r+A_0\bar{P}/r+\bar{P}A_1^{\mathrm{T}}+A_1\bar{P}+\\&\varGamma^{\mathrm{T}}B_0^{\mathrm{T}}/r+B_0\varGamma/r,\\\varPi_{13}=&\bar{P}A_0^{\mathrm{T}}+\varGamma^{\mathrm{T}}B_0^{\mathrm{T}}+r\bar{P}A_1^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

证明 由定理 1 可知, 闭环系统保性能渐近稳定的充分条件为存在适当维数的正定对称矩阵 P, Q, R 以及标量 $\varepsilon_1>0$, 使得矩阵不等式 $\varXi<0$ 成立.

由于矩阵 $\varXi$ 中存在非线性项, 无法直接利用 LMI 方法求解. 为了求得反馈增益 K, 采用下列步骤将非线性矩阵不等式线性化: 令

$$S=\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ P^{-1} & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Z^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^{-1}I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^{-1}I \end{bmatrix},$$

则有

$$\Omega=S^{\mathrm T}\Xi S=$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & A_1R^{-1} & \Omega_{13} & P^{-1}K^{\mathrm T} & \dfrac{\varepsilon_1^{-1}B_0D_a}{r} & P^{-1}E_a^{\mathrm T}\\ * & -\dfrac{R^{-1}}{r^2} & rR^{-1}A_1^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0\\ * & * & -2R^{-1} & 0 & \varepsilon_1^{-1}B_0D_a & 0\\ * & * & * & -\dfrac{Z^{-1}}{r} & \varepsilon_1^{-1}D_a & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon_1^{-1}I & 0\\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1^{-1}I \end{bmatrix}+$$

$$U^{\mathrm T}(Q/r)U+U^{\mathrm T}(rY)U-V^{\mathrm T}QV<0. \tag{22}$$

其中

$$\Omega_{11}=P^{-1}A_0^{\mathrm T}/r+A_0P^{-1}/r+P^{-1}A_1^{\mathrm T}+A_1P^{-1}+ P^{-1}K^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}/r+B_0KP^{-1}/r,$$

$$\Omega_{13}=P^{-1}A_0^{\mathrm T}+P^{-1}K^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}+rP^{-1}A_1^{\mathrm T},$$

$$U=[P^{-1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

$$V=[P^{-1}\ \ R^{-1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0].$$

由于$V^{\mathrm T}QV>0$, 若

$$\Omega+V^{\mathrm T}QV<0, \tag{23}$$

则$S^{\mathrm T}\Xi S<0$成立. 对式(23)应用Schur补, 并令$\Gamma=KP^{-1}$, $\bar P=P^{-1}$, $\bar Q=Q^{-1}$, $\bar R=R^{-1}$, $\bar\varepsilon_1=\varepsilon_1^{-1}$, 代入所得矩阵即可得出$\Pi<0$. □

下面考虑不确定系统(1)的鲁棒非脆弱保性能控制问题.

推论1　给定矩阵Y和Z, 若存在适当维数的正定对称矩阵$\bar P$, $\bar Q$, $\bar R$以及适当维数的矩阵Γ和标量$\bar\varepsilon_1,\bar\varepsilon_2>0$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi & \bar\varepsilon_2\bar MD & \bar E^{\mathrm T}\\ * & -\bar\varepsilon_2 I & 0\\ * & * & -\bar\varepsilon_2 I \end{bmatrix}<0, \tag{24}$$

则不确定系统(1)在控制器(5)的作用下是鲁棒非脆弱保性能稳定的, 且反馈增益$K=\Gamma\bar P^{-1}$, 其中

$$\bar M=[I\ \ 0\ \ rI\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm T},$$

$$\bar E=[(E_0/r+E_1)\bar P\ \ \ E_1\bar R\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0].$$

证明　以$A_0(t)$和$A_1(t)$分别代替矩阵Π中的A_0和A_1, 并分离不确定项可得

$$\Pi+\bar MDF(t)\bar E+\bar E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)D^{\mathrm T}\bar M^{\mathrm T}<0.$$

由引理2有

$$\Pi+\bar\varepsilon_2\bar MDD^{\mathrm T}\bar M^{\mathrm T}+\bar\varepsilon_2^{-1}\bar E^{\mathrm T}\bar E<0. \tag{25}$$

应用Schur补, 并将所得矩阵分别左乘、右乘相同维数的对角阵$\mathrm{diag}\{I\ \ \cdots\ \ \bar\varepsilon_2 I\ \ I\}$即可推出结论. □

4　设计实例

考虑液体火箭发动机燃烧室的燃烧过程, 假定在非恒稳流动和非一致滞后条件下, Crocco等人[13-14]分别给出其线性化等式如下:

$$\dot x(t)=\tilde A_0x(t)+\int_{-r}^{0}\tilde A(\theta)x(t+\theta)\mathrm d\theta+B_0u(t). \tag{26}$$

其中

$$\tilde A_0=\begin{bmatrix} \gamma-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5.0000\\ -0.5556 & 0 & -0.5556 & 0.5556\\ 0 & 1.0000 & -1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde A(\theta)=\begin{bmatrix} -\gamma/r & 0 & 1/r & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix} 0\\ 5.0000\\ 0\\ 0 \end{bmatrix},$$

γ和r的名义值分别为$\gamma_0=1.0$和$r_0=1$. 则矩阵$\tilde A_0$和$\tilde A(\theta)$的名义值为

$$A_0=\begin{bmatrix} \gamma_0-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5.0000\\ -0.5556 & 0 & -0.5556 & 0.5556\\ 0 & 1.0000 & -1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(\theta)=\begin{bmatrix} -\gamma_0/r_0 & 0 & 1/r_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

取初始函数为$x(\theta)=1.0, \theta\in[-1,0]$, 采样时间间隔为$\Delta h=0.01$, 则该系统的自由运动曲线如图1所示. 显然系统不加控制($u=0$)时的运动是不稳定的.

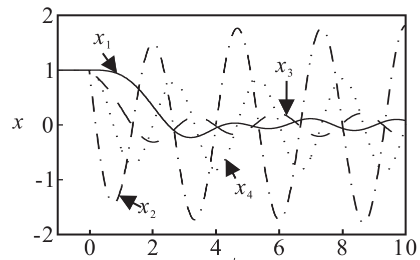

图1　燃烧室燃烧过程的自由运动曲线

限于篇幅, 下面仅考虑压力指数γ变化的情况. 在这种情况下, 矩阵$\tilde A_0$和$\tilde A(\theta)$的摄动值为

$$\Delta A_0=\begin{bmatrix} \gamma-\gamma_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$[\Delta\gamma_{\max}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]^{\mathrm{T}}\frac{\Delta\gamma}{\Delta\gamma_{\max}}[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

$$\Delta A(\theta)=\begin{bmatrix}\gamma_0-\gamma & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$[\Delta\gamma_{\max}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]^{\mathrm{T}}\frac{\Delta\gamma}{\Delta\gamma_{\max}}[-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

其中

$$\Delta\gamma_{\max}=\max\{|\gamma_{\min}-\gamma_0|,|\gamma_{\max}-\gamma_0|\}.$$

由此可得

$$D=[\Delta\gamma_{\max}\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ E_0=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0],\ E_1=-E_0.$$

取 $\Delta\gamma_{\max}=0.3$, 并令 $Y=I$, $Z=0.2$, 控制器增益摄动 (6) 中 $D_a=1$, $E_a=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$, 则由本文推论1计算可得

$$K=[10.700\,7\ \ -5.978\,9\ \ 21.162\,0\ \ -24.422\,4],\quad(27)$$

保性能指标上界为 $J^*=12.108\,9$.

不考虑控制器增益摄动时, 本文设计的控制器对名义系统的镇定如图 2 所示.

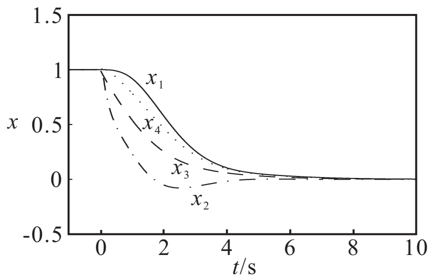

图 2　本文设计的控制器对名义系统的镇定

下面以状态变量 $x_2(t)$ 为对象来研究控制器增益摄动时, 本文设计的非脆弱保性能控制器与一般鲁棒控制器的镇定效果. 利用本文类似的推导步骤并选取相同的参数值, 可得一般鲁棒控制器增益 $K=[0.114\,9\ \ -0.768\,2\ \ 1.007\,3\ \ -1.066\,8]$. 图 3 为控制器增益摄动时, 两种不同控制器作用下的状态响应曲线.

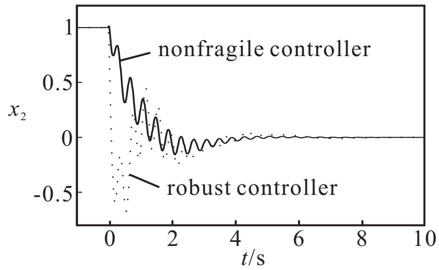

图 3　不同控制器作用下的状态响应曲线

从仿真结果来看, 本文设计的分布时滞系统鲁棒非脆弱保性能控制器, 不仅对名义系统有较好的镇定效果, 而且当控制器增益摄动时, 也比一般鲁棒控制器具有更好的镇定性能. 状态响应平稳, 振荡较小, 从而说明本文的控制器设计方法是有效的和可行的.

5　结　论

本文针对一类分布时滞不确定系统, 设计了状态反馈鲁棒非脆弱保性能控制器. 与以往分布时滞系统镇定方法相比, 本文在泛函构造和推证技巧方面均具有一定的创新. 最后所得判据为分布时滞相关的 LMI 形式, 无需任何参数调整和迭代处理即可求解. 将本文方法应用于液体火箭发动机燃烧过程镇定, 仿真实验表明了所设计的控制器比一般鲁棒控制器具有更好的镇定性能.

参考文献(References)

[1] Keel L H, Bhattacharyya S P. Robust, fragile or optimal[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1098-1105.

[2] Famui A D, Dorato P, Abdallah C T, et a1. Robust non-fragile LQ controller: The static state feedback case[J]. Int J of Control, 2000, 73(2): 159-165.

[3] Yang G H, Wang J L. Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative gain variations[J]. Automatica, 2001, 37(5): 727-737.

[4] 王武, 杨富文. 不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒非脆弱 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 473-476.
(Wang W, Yang F W. Delay-dependent robust and non-fragile H_∞ control for linear time-delay systems with uncertainties[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(3): 473-476.)

[5] 关新平, 邬晶, 龙承念. 不确定时滞系统保性能弹性控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(4): 619-622.
(Guan X P, Wu J, Long C N. Resilient guaranteed cost controller design for uncertain time-delayed systems[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(4): 619-622.)

[6] 翟丁, 张庆灵, 刘国义, 等. 一类时滞线性系统的鲁棒非脆弱控制器设计[J]. 控制与决策, 2006, 21(5): 559-562.
(Zhai D, Zhang Q L, Liu G Y, et al. Robust non-fragile controller for a class of linear time-delayed systems [J]. Control and Decision, 2006, 21(5): 559-562.)

[7] 付兴建, 刘小河. 带不确定时滞的中立系统之鲁棒非脆弱保性能控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(5): 938-942.
(Fu X J, Liu X H. Resilient non-fragile guaranteed-cost control for neutral systems with uncertain delay [J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(5): 938-942.)

[8] Magdi S M, Yan S, Hazem N N. Resilient observer-based control of uncertain time-delay systems[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2007, 3(2): 407-418.

(下转第1529页)