

文章编号: 1001-0920(2011)08-1277-04

一类非线性不确定系统高阶滑模自适应控制设计

赵占山¹, 张静², 孙连坤¹, 丁刚¹

(1. 天津工业大学 计算机科学与软件学院, 天津 300160; 2. 天津职业大学, 天津 300402)

摘要: 针对一类非线性不确定系统, 提出一种高阶滑模自适应控制算法. 为减少系统抖振和不确定边界未知但有界问题, 引入可在线调整参数的双极 sigmoid 函数和控制器增益. 利用 Lyapunov 理论证明系统在有限时间内稳定并具有鲁棒性, 且不确定的上界不需要预先确定. 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词: 高阶滑模控制; 有限时间稳定; 鲁棒性; 自适应控制; 双极 sigmoid 函数

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Higher order sliding mode control with self-tuning law for a class of uncertain nonlinear systems

ZHAO Zhan-shan¹, ZHANG Jing², SUN Lian-kun¹, DING Gang¹

(1. School of Computer Science and Software Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China; 2. Tianjin Vocational Institute, Tianjin 300402, China. Correspondent: ZHAO Zhan-shan, E-mail: zhzhsh127@163.com)

Abstract: A higher order sliding mode control with self-tuning law algorithm is proposed for SISO uncertain nonlinear systems with unknown bound in order to reduce chattering. A bipolar sigmoid function on-line adaptation and an adjustable control gain tuning approach without high frequency switching are developed. The stability of proposed algorithm is proven by using the Lyapunov theory in finite time and the robustness is guaranteed. The upper bounds of uncertainties are not required to be known in advance. The simulation results show the effectiveness of the control method.

Key words: higher order sliding mode control; finite time stability; robustness; adaptive control; bipolar sigmoid function

1 引言

滑模变结构控制理论以其独特、优异的鲁棒性, 对匹配不确定性, 干扰的完全自适应性等特点, 吸引了众多学者的兴趣^[1-2]. 但由于实际中, 滑动模态到达滑模面后不能精确地保持在滑模面上, 导致抖振的出现. 很多学者为了减少抖振问题进行了大量研究, 如基于观测器的抖动抑制、等价控制增益方法、边界层正则化方法、结合智能方法进行切换函数逼近等^[3-5]. 然而这些方法在削弱滑模抖振问题的同时, 丧失了部分鲁棒性能. 如何保证系统既有良好的鲁棒性, 又能削弱抖振的影响, 这给滑模控制理论带来了新的挑战.

近年来, 高阶滑模控制正成为滑模控制研究的热点, 它保持了原有普通滑模控制鲁棒性优点的同时, 能够有效削弱抖振的影响. 文献[6-8]研究了任意相对阶的单输入单输出非线性系统, 但收敛速度不能任

意选择. [9]针对一类单输入单输出非线性系统提出了一种新的高阶滑模控制器设计, 系统的鲁棒性在整个响应过程得到了保证; 但其对初始条件极其敏感. [10]针对单输入单输出系统, 结合几何齐次性理论设计了高阶滑模控制器, 但对系统不确定边界需要提前给定.

针对上述问题, 本文提出一种新型高阶滑模自适应控制方法. 首先给出单输入单输出高阶滑模控制器; 然后设计了自适应律, 使得在系统不确定未知的情况下能够自适应估计控制增益以及 sigmoid 函数的参数; 最后以单级倒立摆为例说明了该方法的有效性.

2 问题描述

考虑单输入单输出非线性系统

收稿日期: 2010-05-24; 修回日期: 2010-09-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60970016).

作者简介: 赵占山(1980—), 男, 讲师, 博士, 从事非线性鲁棒系统的研究; 张静(1979—), 女, 讲师, 硕士, 从事非线性系统的研究.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= \sigma(x). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$, $u \in R$ 分别是系统的状态变量和控制输入; $\sigma(x) \in R$ 是光滑可测的输出函数; $f(x)$ 和 $g(x)$ 是不确定光滑函数.

滑模变量 $\sigma(x)$ 关于时间 t 的 r 次时间导数满足下式:

$$\sigma^{(r)} = a(x) + b(x)u. \quad (2)$$

其中: $a(x) = L_f^r \sigma(x)$, $b(x) = L_g L_f^{r-1} \sigma(x)$.

对于系统 (1) 和式 (2), 满足如下假设条件:

假设 1 单输入单输出非线性系统 (1) 关于滑模变量 $\sigma(x)$ 的相对阶 r 为常数且已知, 同时系统内动态为渐近稳定的.

假设 2 关于状态方程 (2), 其右端为不连续的, 它的解在 Filippov 意义下有定义.

假设 3 光滑不确定函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为不确定但有界函数. 将不确定函数分为两部分: 一部分为标称部分, 另一部分为未知但有界函数, 即

$$\begin{cases} a(x) = \bar{a}(x) + \Delta a(x), \\ b(x) = \bar{b}(x) + \Delta b(x). \end{cases} \quad (3)$$

则存在上边界常数值 ξ 和预先已知的常数值 $0 < \alpha \leq 1$, 使得上述两个不确定函数满足如下不等式:

$$\|\Delta b(x)\bar{b}^{-1}(x)\| \leq 1 - \alpha, \|\Delta a(x)\| \leq \xi.$$

系统 (1) 关于滑模变量 $\sigma(x)$ 的 r 阶滑模控制, 等价于如下不确定系统的有限时间收敛问题:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, \\ \dot{z}_r &= a(x) + b(x)u. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $1 < i \leq r-1$, $z = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T = [\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{r-1}]^T$. 本文只讨论相对阶为 $r = \rho$ 的情形.

针对不含不确定的系统 (2), 设计如下初步的反馈控制律:

$$u = \bar{b}^{-1}(x)(-\bar{a} + \omega), \quad (5)$$

其中 ω 为辅助的虚拟控制输入. 将初步反馈控制律 (5) 和对不确定的分解 (3) 代入系统 (2), 得到含有不确定项的闭环系统如下:

$$\begin{aligned} \sigma^{(r)} &= (1 + \Delta b(x)\bar{b}^{-1}(x))\omega - \\ &\Delta b(x)\bar{b}^{-1}(x)\bar{a}(x) + \Delta a(x). \end{aligned} \quad (6)$$

于是对于单输入单输出非线性系统 (1) 关于滑模变量 $\sigma(x)$ 的 r 阶滑模控制, 等价于如下不确定系统的有限时间收敛问题:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ \dot{z}_r = (1 + \Delta b(x)\bar{b}^{-1}(x))\omega - \\ \Delta b(x)\bar{b}^{-1}(x)\bar{a}(x) + \Delta a(x). \end{cases} \quad (7)$$

目的是设计滑模控制器以保证系统 (7) 在系统不确定边界未知的情况下能够有限时间收敛.

3 高阶滑模自适应控制器设计

从优化的角度看, 有限时间收敛的控制方法是时间最优的控制方法. 所谓有限时间控制问题是指能否在有限时间内将系统控制到平衡点. 研究表明, 在系统具有干扰和不确定情况下, 有限时间收敛的系统往往具有更好的性能.

实际系统设计中, 求解系统有限时间收敛很复杂. 文献 [11] 针对不含不确定的全维积分链系统提出了一种构造有限时间收敛的反馈控制方法. 在设计鲁棒有限时间收敛的控制器之前, 首先简要介绍文献 [10-11] 的控制算法, 然后在此基础上设计自适应调节控制方法.

3.1 积分链系统有限时间收敛问题

定理 1 如果存在 $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$, 使得多项式 $s^n + k_n s^{n-1} + \dots + k_2 s + k_1$ 是 Hurwitz 的, 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{r-1} = x_r, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \quad (8)$$

则存在 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得对于每一个 $\alpha \in (1 - \varepsilon, 1)$, 如下反馈控制器能够使系统 (8) 在平衡点有限时间收敛:

$$u = -k_1 \text{sign} x_1 (x_1)^{\alpha_1} - \dots - k_n \text{sign} x_n (x_n)^{\alpha_n}. \quad (9)$$

其中: sign 为符号函数; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 满足

$$\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1} - \alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\alpha_{n+1} = 1, \alpha_n = \alpha.$$

详见文献 [11].

针对上述含有不确定的积分链系统不具有鲁棒性的问题, 在文献 [10] 的基础上设计鲁棒自适应滑模控制以保证系统 (1) 能够有限时间收敛.

3.2 基于积分滑模的鲁棒有限时间控制器设计

下面设计滑模控制器以补偿系统 (7) 的不确定的影响. 首先定义如下积分滑模流形:

$$s(z(t)) = z_n(t) - z_n(t_0) - \int_{t_0}^t \omega_{\text{nom}}(z(v))dv. \quad (10)$$

根据定理 1 可知, 控制律 ω_{nom} 为

$$\omega_{\text{nom}} = -k_1 \text{sign} z_1 |z_1|^{\alpha_1} - \dots - k_n \text{sign} z_n |z_n|^{\alpha_n}.$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 满足

$$\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1} - \alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\alpha_{n+1} = 1, \quad \alpha_n = \alpha.$$

t_0 为初始时刻. 注意到在时刻 $t = t_0$ 时, $s(z(t_0)) = 0$, 由此说明系统从初始时刻 $t = t_0$ 起, 便处在滑模流形上. 增益 $G(z)$ 应满足如下不等式:

$$G(z) \geq \frac{(1-\alpha)(\|\omega_{\text{nom}}\| + \|\bar{\alpha}(x) + \xi + \eta\|)}{\alpha}, \quad (11)$$

其中 $\|\Delta b(x)\bar{b}^{-1}(x)\| \leq 1 - \alpha$, $\|\Delta\alpha(x)\| \leq \xi$, 且满足 η -吸引条件

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \quad \eta > 0. \quad (12)$$

对于鲁棒性有限时间收敛, 由以下定理保证:

定理 2 考虑非线性系统 (1), 若假设 1~假设 3 成立, 则控制律

$$u = \bar{b}^{-1}(-\bar{a}(x) + \omega_{\text{nom}} - G\text{sign}(s)) \quad (13)$$

即为所求的高阶滑模控制器, 可使系统轨迹在有限时间内收敛^[10].

3.3 鲁棒有限时间自适应控制律设计

高阶滑模控制律 (13) 可以保证系统 (1) 的稳定性和鲁棒性. 增益 $G(z)$ 需要满足不等式 (11), 然而实际工程中, 系统不确定的上界 ξ 和 α 很难获得, 因此系统 (1) 的高阶滑模控制律中的增益将很难满足. 为了减弱控制输入的抖振现象, 常用的方法是采用边界层饱和和控制设计, 可以削弱一定的抖振, 但边界层厚度需要根据不同的情况适当选择, 这是比较困难的.

根据上述分析设计鲁棒高阶滑模自适应控制. 所设计的自适应调节方法, 在系统不确定有界时可以自动调节控制律中的增益 G , 并引入双极 sigmoid 函数, 其中的参数 τ 可以在线自适应调节. 对于系统 (1), 设计如下高阶滑模自适应控制:

$$u = \bar{b}^{-1}(-\bar{a}(x) + \omega_{\text{nom}} - \hat{G}\Phi(\hat{\tau}, s)), \quad (14)$$

其中 $\Phi(\hat{\tau}, s)$ 为双极 sigmoid 函数, 即

$$\Phi(\hat{\tau}, s) = \frac{1 - \exp(-\hat{\tau}s)}{1 + \exp(-\hat{\tau}s)}. \quad (15)$$

自适应律为

$$\dot{\hat{G}} = \alpha\bar{b}(x) \frac{1 - \exp(-\hat{\tau}s)}{1 + \exp(-\hat{\tau}s)} \text{sign}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right), \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\tau}} = \beta\bar{b}(x) \text{sign}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right), \quad (17)$$

其中 α 和 β 为正常数, 用来调节自适应变化速率. 通过自适应律调节双极 sigmoid 函数中的参数 τ , 可有

效减少稳态误差和控制输入的抖振.

定理 3 考虑非线性单输入单输出系统 (1), 对于给定滑模流形函数 (10), 高阶滑模自适应控制律 (14) 能够使系统有限时间收敛, 其中自适应律满足式 (16), (17).

证明 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}s^T s. \quad (18)$$

对于 Lyapunov 函数关于时间 t 直接求导, 得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{G}} \frac{\partial \hat{G}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \hat{\tau}} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} \right). \quad (19)$$

等式 (19) 右端第 1 项为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \hat{G}} \frac{\partial \hat{G}}{\partial t} = \\ &= -s \frac{\partial s}{\partial u} \bar{b}^{-1}(x) \frac{1 - \exp(-\hat{\tau}s)}{1 + \exp(-\hat{\tau}s)} \dot{\hat{G}}. \end{aligned} \quad (20)$$

将自适应律 (16) 代入 (20) 可得

$$\dot{V}_1 = -\alpha \left(\frac{1 - \exp(-\hat{\tau}s)}{1 + \exp(-\hat{\tau}s)} \right)^2 s^2 \left| \frac{\partial s}{\partial u} \right| < 0. \quad (21)$$

等式 (19) 右端第 2 项为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \hat{\tau}} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} = \\ &= -s \frac{\partial s}{\partial u} \bar{b}^{-1}(x) \hat{G} \frac{2s \exp(-\hat{\tau}s)}{(1 + \exp(-\hat{\tau}s))^2} \dot{\hat{\tau}}. \end{aligned} \quad (22)$$

将自适应律 (17) 代入 (22) 可得

$$\dot{V}_2 = -\beta \hat{G} \frac{2s^2 \exp(-\hat{\tau}s)}{(1 - \exp(-\hat{\tau}s))^2} \left| \frac{\partial s}{\partial u} \right| < 0. \quad (23)$$

由式 (21) 和 (23) 可得 $\dot{V} < 0$. 当到达滑模流形时, 参数估计 \hat{G} 和 $\hat{\tau}$ 可使系统状态渐近稳定, 因此估计值能够趋于某一稳定值. 将高阶滑模自适应控制律 (14) 代入系统 (7), 可使闭环系统与定理 1 中的三角积分链系统等价. 利用定理 1 可知, 高阶滑模自适应控制律 (14) 能使非线性系统 (1) 在有限时间内收敛. \square

4 仿真研究

系统单级倒立摆动态方程描述如下:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ x_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l \left[\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right] + \frac{\cos x_1}{m_c + m}} u + \Delta. \end{aligned}$$

控制的目的是设计高阶滑模自适应控制律, 跟踪如下参考轨迹:

$$x_{1d} = 3 \sin(0.5\pi t).$$

定义滑模变量

$$\sigma = x_1 - x_{1d}.$$

对于单级倒立摆,假设系统的扰动为

$$\Delta = 7\sin(10x_1) + \cos x_2.$$

系统相对阶 $n = 2$. 取参数 $\alpha_2 = 3/5$, $\alpha_1 = 1/2$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2.5$. 图 1 为基于控制律 (14) 所设计的单级倒立摆闭环系统跟踪轨迹曲线.

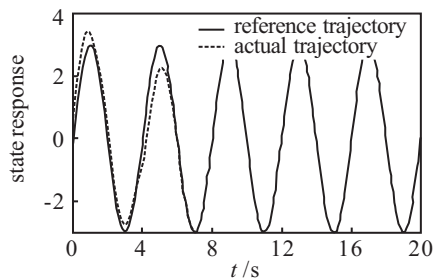


图 1 系统跟踪轨迹

自适应增益估计值 \hat{G} 和参数估计值 $\hat{\tau}$ 分别如图 2 和图 3 所示, 其初始值为 $\hat{G}(0) = 0, \tau(0) = 0$.

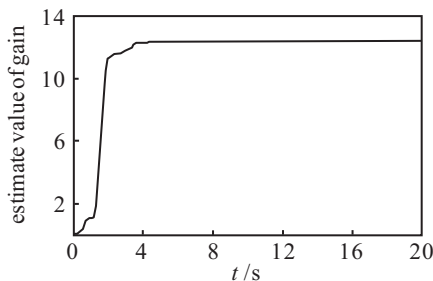


图 2 增益 G 的估计值

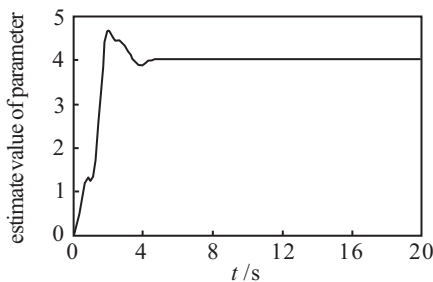


图 3 参数 τ 的估计值

由图 1 可以看出, 系统在不确定干扰的情况下仍能在有限时间内跟踪给定的参考曲线, 具有鲁棒性; 由图 2 和图 3 可以看出, 控制增益和参数估计值趋于某一常数并稳定, 表明参数估计值有效并具有一定适应性.

5 结 论

针对含有系统未建模不确定影响的单输入单输出非线性仿射系统, 考虑到系统不确定有界但上界未知的情况, 本文设计了一种高阶滑模自适应控制器, 利用 Lyapunov 稳定理论证明了该方法具有鲁棒性和有限时间收敛. 以单极倒立摆为仿真实例表明了所提出方法的合理性和有效性.

参考文献(References)

- [1] Cao W, Xu J. Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(8): 1355-1360.
- [2] Castanos F, Fridman L. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched Perturbations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 853-858.
- [3] Fridman L. Chattering analysis in sliding mode systems with inertial sensors[J]. Int J of Control, 2003, 76(9/10): 906-912.
- [4] Boiko I, Fridman L. Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(9): 1442-1446.
- [5] Chen M, Chen C, Yang F. An LTR-observer-based dynamic sliding mode control for chattering reduction[J]. Automatica, 2007, 43(6): 1111-1116.
- [6] Levant A. Arbitrary-order sliding modes with finite time convergence[C]. Proc of 6th Medit Conf on Control and Systems. Alghero, 1998: 1-27.
- [7] Levant A. Finite-time stabilization of uncertain SISO systems[C]. Proc of the 46th IEEE Int Conf on Decision and Control. New Orleans, 2007: 1728-1733.
- [8] Levant A. Higher order sliding modes and arbitrary-order exact robust differentiation[C]. Proc of European Control Conf. Porto, 2001: 996-1001.
- [9] Laghrouche S, Plestan F, Glumineau A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode[J]. Automatica, 2007, 43(3): 531-537.
- [10] Defoort M, Nolle F, Floquet T. et al. Higher order sliding mode control of a stepper motor[C]. 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 2006: 4002-4007.
- [11] Bhat S, Bernstein D. Geometric homogeneity with applications to finite time stability[J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 2005, 17(2): 101-127.