

文章编号: 1001-0920(2011)09-1425-04

一种迭代离差差分滤波算法及其应用研究

穆静^{1,2}, 蔡远利¹

(1. 西安交通大学 电子与信息工程学院, 西安 710049; 2. 西安工业大学 计算机科学与工程学院, 西安 710032)

摘要: 针对扩展卡尔曼滤波(EKF)和迭代EKF量测更新过程采用线性化误差传递, 导致状态估计精度偏低的问题, 将迭代方法、统计线性化误差传递和离差差分滤波器相结合, 建立了一种新型迭代离差差分滤波方法. 将该方法应用于再入弹道目标状态估计, 仿真实验结果显示, 此方法降低了测量方程的非线性对滤波的影响, 有效提高了目标的状态估计精度.

关键词: 再入弹道目标状态估计; 多维 Stirling 内插多项式; 离差差分滤波; 统计线性化误差传播

中图分类号: TP391

文献标识码: A

Iterated divided difference filter and its applications

MU Jing^{1,2}, CAI Yuan-li¹

(1. School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. School of Computer Science and Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China. Correspondent: MU Jing, E-mail: mujing1977@163.com)

Abstract: The linearization error, which is propagated in the measurement update of the extend Kalman filter(EKF) and iterated extended Kalman filter(IEKF), may somewhat degrade the filtering performance. Therefore, an iterated divided difference filter is proposed, which combines the iterated method and statistically linearization error propagation with the divided difference filter. This algorithm is applied to state estimation for reentry ballistic target. Simulation results show that, the proposed method can reduce the influence of the measurement nonlinearity, and higher accuracy of state estimation is guaranteed.

Key words: state estimation for reentry ballistic target; multidimensional Stirling interpolation polynomials; divided difference filters; statistically linearization error propagation

1 引言

弹道再入目标的状态估计是一个典型的非线性滤波问题, 具有非常重要的理论及实际意义, 一直备受学术界和工程界的关注. 对于非线性滤波问题, 为了获得条件后验概率分布, 需要求解复杂的多维积分, 只有在一些非常特殊的情况下才能获得解析解. 为此人们研究各种近似的、次优滤波方法, 扩展卡尔曼滤波(EKF)^[1]是工程中一种广泛应用的次优滤波方法, 其基本思想是通过泰勒级数展开进行线性化. 为了提高EKF的滤波精度, 一种有效的途径是引入迭代计算, 由此产生的滤波方法称为迭代EKF(IEKF)^[1]. 在IEKF中, 通过重复利用观测信息, 尽量降低测量方程的非线性对滤波精度的影响. 对于再入目标状态估计这样的高度非线性问题, EKF和IEKF都可

能产生较大的滤波误差, 甚至出现计算发散. 此外, EKF和IEKF需要计算系统的雅克比矩阵, 在实时性方面实现起来有许多困难.

近年来, 发展了许多免微分的状态估计方法. 其中, 无迹卡尔曼滤波(UKF)以UT变换为基础, 在卡尔曼滤波框架下以确定性采样策略逼近非线性分布^[2]. 粒子滤波(PF)依据蒙特卡洛仿真的思想, 通过随机产生大量粒子近似计算后验概率密度^[3]. PF实现时需要产生大量的粒子, 计算量非常大, 很难满足实时性的需求, 且有粒子退化和贫化等问题. 离差差分滤波(DDF)是基于低阶多维 Stirling 内插多项式近似非线性函数, 其结合卡尔曼滤波算法进行状态估计^[4]. DDF与UKF具有相同的先验状态估计, 而基于二阶 Stirling 多项式的DDF的方差估计精度高

收稿日期: 2010-06-02; 修回日期: 2010-09-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60972146, 60602025).

作者简介: 穆静(1979—), 女, 讲师, 博士生, 从事再入弹道目标状态估计的研究; 蔡远利(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器制导、控制与动力学等研究.

于 UKF.

本文将迭代方法、统计线性化误差传播^[5]与离差差分滤波方法相结合,提出了一种迭代离差差分滤波方法(DDDF).该方法有效地降低了测量方程非线性的影响,可获得较高精度的状态估计.

2 离差差分滤波算法

DDF 是基于 Stirling 内插多项式,结合卡尔曼滤波框架而形成的滤波方法.

若一随机变量 $x \in R^{n_x}$ 服从高斯分布,则其均值为 \bar{x} , 方差为 P_x , 且 $S_x = \text{chol}(P_x)$, 即 S_x 为 P_x 的乔列斯基分解式. 对变量 x 进行随机解耦 $z = S_x^{-1}x$, 则非线性映射 $y = f(x)$ 可写为

$$y = f(S_x^{-1}x) = \tilde{f}(z). \quad (1)$$

忽略 3 阶以上高阶项, 式(1)的多维 Stirling 内插多项式展开近似为

$$y \approx \tilde{f}(z) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f}. \quad (2)$$

其中: $\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f}$, $\tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f}$ 分别是多维 Stirling 内插公式的一阶项和二阶项, 即

$$\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} = \frac{1}{l} \left(\sum_{j=1}^{n_x} \Delta z_j \mu_j \delta_j \right) f(\bar{z}), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f} = & \frac{1}{l^2} \left(\sum_{j=1}^{n_x} \Delta z_j^2 \delta_j^2 + \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_x} \Delta z_j \Delta z_i (\mu_j \delta_j)(\mu_i \delta_i) \right) f(\bar{z}). \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\Delta z \doteq z - \bar{z}$, Δz_j 为第 j 个分量; l 为差分步长, 最优步长 $l = \sqrt{3}$; 两个偏差算子定义为

$$\mu_j f(\bar{z}) = \frac{1}{2} \left[\tilde{f}\left(\bar{z} + \frac{l}{2} e_j\right) + \tilde{f}\left(\bar{z} - \frac{l}{2} e_j\right) \right],$$

$$\delta_j f(\bar{z}) = \tilde{f}\left(\bar{z} + \frac{l}{2} e_j\right) - \tilde{f}\left(\bar{z} - \frac{l}{2} e_j\right). \quad (5)$$

e_j 为第 j 分量为 1 的 n_x 维的单位列向量. 由式(2)可导出随机变量 y 的近似均值、协方差和互协方差

$$\begin{aligned} \bar{y} = E[y] \simeq & \frac{l^2 - n_x}{l^2} f(\bar{x}) + \frac{1}{2l^2} \sum_{j=1}^{n_x} [f(\bar{x} + l s_{x,j}) + f(\bar{x} - l s_{x,j})], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P_{yy} = E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] \simeq & \frac{1}{4l^2} \sum_{j=1}^{n_x} [f(\bar{x} + l s_{x,j}) - f(\bar{x} - l s_{x,j})] \times \\ & [f(\bar{x} + l s_{x,j}) - f(\bar{x} - l s_{x,j})]^T + \\ & \frac{l^2 - 1}{4l^4} \sum_{j=1}^{n_x} [f(\bar{x} + l s_{x,j}) + f(\bar{x} - l s_{x,j}) - 2f(\bar{x})] \times \\ & [f(\bar{x} + l s_{x,j}) + f(\bar{x} - l s_{x,j}) - 2f(\bar{x})]^T, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P_{xy} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T] \simeq & \frac{1}{2l} \sum_{j=1}^{n_x} s_{x,j} (f(\bar{x} + l s_{x,j}) - f(\bar{x} - l s_{x,j}))^T, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $s_{x,j}$ 是 S_x 的第 j 列.

考虑如下离散时间非线性动态系统:

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}) + w_{k-1}, \\ z_k &= h(x_k) + v_k. \end{aligned} \quad (9)$$

其中: x_k 为系统状态向量, z_k 为量测值. 假定过程噪声 w_{k-1} 和量测噪声 v_k 相互独立, 且 $w_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, Q_{k-1})$, $v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$.

记 $k-1$ 时刻状态估计为 \hat{x}_{k-1} 方差为 P_{k-1} , 且 $\hat{S}_{x,k-1} = \text{chol}\{P_{k-1}\}$. 同样, $S_{w,k-1} = \text{chol}\{Q_{k-1}\}$, $S_{v,k} = \text{chol}\{R_k\}$, 使用式(6)~(8), 建立 DDF 算法如下^[4]:

1) 时间更新. 计算一阶、二阶差分

$$S_{x\hat{x},k}^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2l} [f_i(\hat{x}_{k-1} + l \hat{s}_{x,j}) - f_i(\hat{x}_{k-1} - l \hat{s}_{x,j})] \right\}, \quad (10)$$

$$S_{x\hat{x},k}^{(2)} = \left\{ \frac{\sqrt{l^2 - 1}}{2l^2} [f_i(\hat{x}_{k-1} + l \hat{s}_{x,j}) + f_i(\hat{x}_{k-1} - l \hat{s}_{x,j}) - 2f_i(\hat{x}_{k-1})] \right\}. \quad (11)$$

计算状态预测和方差预测的平方根

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \frac{l^2 - n_x}{l^2} f(\hat{x}_{k-1}) + \frac{1}{2l^2} \sum_{j=1}^{n_x} [f(\hat{x}_{k-1} + l \hat{s}_{x,j}) + f(\hat{x}_{k-1} - l \hat{s}_{x,j})], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{S}_{x,k} = \text{Tria}([S_{x\hat{x},k}^{(1)} \quad S_{w,k-1} \quad S_{x\hat{x},k}^{(2)}]). \quad (13)$$

其中: $\hat{s}_{x,j}$ 是 $\hat{S}_{x,k-1}$ 的第 j 列, $\text{Tria}(\cdot)$ 表示对矩阵进行三角化以获得方阵.

2) 量测更新. 计算一阶和二阶差分

$$S_{z\bar{x},k}^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2l} [h_i(\bar{x}_k + l \bar{s}_{x,j}) - h_i(\bar{x}_k - l \bar{s}_{x,j})] \right\}, \quad (14)$$

$$S_{z\bar{x},k}^{(2)} = \left\{ \frac{\sqrt{l^2 - 1}}{2l^2} [h_i(\bar{x}_k + l \bar{s}_{x,j}) + h_i(\bar{x}_k - l \bar{s}_{x,j}) - 2h_i(\bar{x}_k)] \right\}, \quad (15)$$

其中 $\bar{s}_{x,j}$ 是 $\bar{S}_{x,k}$ 的第 j 列.

计算量测预测、新息方差的平方根和互协方差及增益矩阵

$$\begin{aligned} \bar{z}_k &= \frac{l^2 - n_x}{l^2} h(\bar{x}_k) + \frac{1}{2l^2} \sum_{j=1}^{n_x} [h(\bar{x}_k + l \bar{s}_{x,j}) + h(\bar{x}_k - l \bar{s}_{x,j})], \end{aligned} \quad (16)$$

$$S_{zz,k} = \text{Tria}([S_{z\bar{x},k}^{(1)} \quad S_{v,k} \quad S_{z\bar{x},k}^{(2)}]),$$

$$P_{xz,k} = \bar{S}_{x,k} S_{z\bar{x},k}^{(1)T},$$

$$K_k = P_{xz,k} (S_{zz,k} S_{z\bar{x},k}^T)^{-1}. \quad (17)$$

计算 k 时刻的状态和方差平方根估计

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k(z_k - \bar{z}_k), \quad (18)$$

$$\hat{S}_{x,k} = \text{Tria}[(\bar{S}_{x,k} - K_k S_{z\bar{x},k}^{(1)}) K_k S_{v,k} K_k S_{z\bar{x},k}^{(2)}]. \quad (19)$$

3 迭代离差分滤波算法

IEKF量测更新以 \bar{x}_k 和 \bar{P}_k 为迭代初始值,按下式进行迭代:

$$\hat{x}_k^{(i+1)} = \bar{x}_k + \bar{P}_k H_k^{(i)\text{T}} (H_k^{(i)} \bar{P}_k H_k^{(i)\text{T}} + R_k)^{-1} \times [z_k - h(\hat{x}_k^{(i)}) - H_k^{(i)}(\bar{x}_k - \hat{x}_k^{(i)})], \quad (20)$$

其中 $H_k^{(i)} = \left. \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k^{(i)}}$. $(H_k^{(i)} \bar{P}_k H_k^{(i)\text{T}} + R_k)^{-1}$ 和 $\bar{P}_k H_k^{(i)\text{T}}$ 是量测方程一阶泰勒展开后获得的近似方差 $P_{zz}^{(i)}$ 和协方差 $P_{xz}^{(i)}$.式(20)可写为

$$\hat{x}_k^{(i+1)} = \bar{x}_k + P_{xz}^{(i)} (P_{zz}^{(i)})^{-1} [z_k - h(\hat{x}_k^{(i)}) - P_{xz,k}^{(i)\text{T}} \bar{P}_k^{-1} (\bar{x}_k - \hat{x}_k^{(i)})]. \quad (21)$$

由此可见,IEKF算法中,计算 $P_{zz}^{(i)}$, $P_{xz}^{(i)}$ 使用的是量测方程的线性化误差.对于高度非线性的量测方程,仅使用线性化误差会产生较大的状态估计误差.为进一步提高滤波精度,结合统计线性化误差传递和迭代思想,建立了迭代离差分滤波算法(IDDF).

1) 时间更新.根据式(10)~(13)计算状态预测 \bar{x}_k 和方差预测的平方根 $\bar{S}_{x,k}$.

2) 量测更新.记 $\hat{x}_k^{(0)} = \bar{x}_k$, $\hat{S}_{x,k}^{(0)} = \bar{S}_{x,k}$,若第*i*次迭代的估计和方差的平方根为 $\hat{x}_k^{(i)}$ 和 $\hat{S}_{x,k}^{(i)}$,则重新计算式(14)~(19),获得新的迭代估计

$$S_{zx,k}^{(1)(i)} = \left\{ \frac{1}{2l} [h_m(\hat{x}_k^{(i)}) + l \hat{s}_{x,j}^{(i)}] - h_m(\hat{x}_k^{(i)}) - l \hat{s}_{x,j}^{(i)} \right\}, \quad (22)$$

$$S_{zx,k}^{(2)(i)} = \left\{ \frac{\sqrt{l^2 - 1}}{2l^2} [h_m(\hat{x}_k^{(i)}) + l \hat{s}_{x,j}^{(i)}] + h_m(\hat{x}_k^{(i)}) - l \hat{s}_{x,j}^{(i)} - 2h_m(\hat{x}_k^{(i)}) \right\}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S_{zz,k}^{(i)} &= \text{Tria}[S_{zx,k}^{(1)(i)} \quad S_{v,k} \quad S_{zx,k}^{(2)(i)}], \\ P_{xz,k}^{(i)} &= \bar{S}_{x,k} S_{zx,k}^{(1)(i)}, \\ K_k^{(i)} &= P_{xz,k}^{(i)} (S_{zz,k}^{(i)} S_{zz,k}^{(i)\text{T}})^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\hat{x}_k^{(i+1)} = \bar{x}_k + K_k^{(i)} [z_k - h(\hat{x}_k^{(i)}) - P_{xz,k}^{(i)\text{T}} \bar{P}_k^{-1} (\bar{x}_k - \hat{x}_k^{(i)})], \quad (25)$$

$$\hat{S}_{x,k}^{(i+1)} = \text{Tria}[(\bar{S}_{x,k} - K_k^{(i)} S_{zx,k}^{(1)(i)}) K_k^{(i)} S_{v,k} K_k^{(i)} S_{zx,k}^{(2)(i)}], \quad (26)$$

其中 $\hat{s}_{k,j}^{(i)}$ 是 $\hat{S}_{x,k}^{(i)}$ 的第*j*列.

3) 迭代终止条件

$$\|\hat{x}_k^{(i+1)} - \hat{x}_k^{(i)}\| \leq \varepsilon \quad \text{or} \quad i = N_{\max}. \quad (27)$$

ε 和 N_{\max} 为预先设置的阈值和最大迭代次数,若迭代终止时迭代次数为*N*,则*k*时刻的状态和方差估计为

$$\hat{x} = \hat{x}_k^{(N)},$$

$$P_k = \hat{S}_k^{(N)} \hat{S}_k^{(N)\text{T}}. \quad (28)$$

4 再入弹道目标状态估计仿真

4.1 状态方程与量测方程

假设地球为不自转的均匀圆球,只考虑地球引力和空气阻力作用^[6],以雷达天线为原点建立东北天坐标系,描述再入目标运动的状态方程可表示为

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + G \Psi(\mathbf{x}_{k-1}) + w_{k-1}. \quad (29)$$

其中: $\mathbf{x}_k = [x_k \dot{x}_k y_k \dot{y}_k z_k \dot{z}_k]^\text{T}$ 为再入目标状态,且

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} T^2 \\ 2 \\ T \end{bmatrix}, \\ \Psi(\mathbf{x}_{k-1}) &= \begin{bmatrix} -\frac{\rho(h_{k-1})}{2\beta} V_{k-1} \dot{x}_{k-1} - \frac{\mu x_{k-1}}{r_{k-1}^3} \\ -\frac{\rho(h_{k-1})}{2\beta} V_{k-1} \dot{y}_{k-1} - \frac{\mu y_{k-1}}{r_{k-1}^3} \\ -\frac{\rho(h_{k-1})}{2\beta} V_{k-1} \dot{z}_{k-1} - \frac{\mu(z_{k-1} + R_e)}{r_{k-1}^3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

式中

$$\begin{aligned} r_{k-1} &= \sqrt{x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2 + (z_{k-1} + R_e)^2}, \\ V_{k-1} &= \sqrt{\dot{x}_{k-1}^2 + \dot{y}_{k-1}^2 + \dot{z}_{k-1}^2}, \\ h_{k-1} &= r_{k-1} - R_e; \end{aligned} \quad (31)$$

β 为弹道系数(kg/m^2), μ 为地心引力常数, R_e 为地球平均半径; $\rho(h)$ 为大气密度,在高度小于86 km以下时可建模为随高度*h*的下降呈指数衰减,即 $\rho(h) = c_1 e^{-c_2 h}$, c_1 和 c_2 为与高度有关的常数.

假设过程噪声 w_k 是均值为零的白噪声,协方差矩阵 Q_k 近似为^[1].

$$Q_k = \begin{bmatrix} q\theta & 0 & 0 \\ 0 & q\theta & 0 \\ 0 & 0 & q\theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}. \quad (32)$$

其中: T 为连续两个量测间隔时间, q 为噪声强度.

根据相关的几何关系,可建立量测方程

$$z_k = h(\mathbf{x}_k) + v_k. \quad (33)$$

其中: $z_k = [R_k \ E_k \ A_k]^2$,且

$$\begin{aligned} R_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} + v_R, \\ E_k &= \arctan \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} + v_E, \\ A_k &= \arctan \frac{y_k}{x_k} + v_A. \end{aligned} \quad (34)$$

假设量测噪声 v_k 是均值为零的白噪声且协方差矩阵为 $N_k = \text{diag}[\sigma_R^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_A^2]$. σ_R , σ_E 和 σ_A 分别为距

离、俯仰角和方位角的量测误差标准差。

4.2 仿真实验

设雷达量测间隔 $T = 1$, 雷达量测的距离、俯仰角和方位角误差的标准差分别为 $\sigma_R = 100 \text{ m}$, $\sigma_E = 0.017 \text{ rad}$ 和 $\sigma_A = 0.017 \text{ rad}$. 目标弹道系数 $\beta = 4000 \text{ kg/m}^2$, 目标初始位置为 $x_0 = 232 \text{ km}$, $y_0 = 232 \text{ km}$, $z_0 = 80 \text{ km}$, 初始速度为 $v_0 = 2290 \text{ m/s}$, 初始俯仰角和方位角为 $7\pi/6$ 和 $\pi/4$, 初始状态方差 $P_0 = \text{diag}([100^2 \ 20^2 \ 100^2 \ 20^2 \ 100^2 \ 20^2])$. 跟踪目标为 60 s.

运行 50 次蒙特卡罗仿真, 本文提出的 IDDF 算法与 EKF, IEKF 和 DDF 滤波算法的位置误差和速度误差分别如图 1 和图 2 所示.

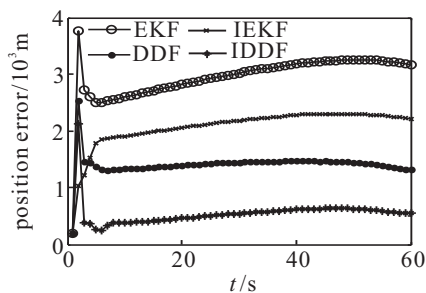


图 1 位置误差

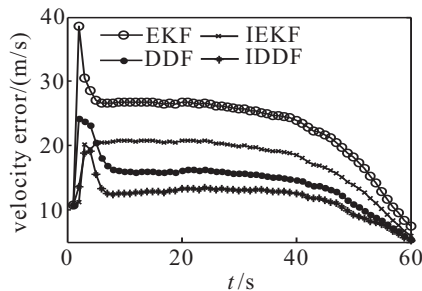


图 2 速度误差

比较滤波器的另外一个性能指标是累加均方误差 (AMSE)^[7], EKF, IEKF, DDF 和 IDDF 四种滤波器的平均 AMSE 如表 1 所示.

表 1 4 种滤波器的累加均方误差

Filters	AMSE(10^6)
EKF	9.063 603
IEKF	4.551 790
DDF	2.852 243
IDDF	0.428 992

图 1 和图 2 的仿真结果表明, EKF 和 IEKF 算法的位置误差和速度误差较大, 而 DDF 和 IDDF 的位

置误差和速度误差较小, IDDF 算法估计精度最高. 表 1 的计算结果显示, EKF 和 IEKF 的平均累加均方误差较大, DDF 较小, IDDF 最小. 图 1, 图 2 和表 1 说明 IDDF 算法状态估计精度最高.

5 结 论

本文将迭代方法、统计线性化误差传递和离差差分滤波器三者有机结合, 提出了一种新型的迭代离差差分滤波算法 (IDDF). 该算法实现简单, 只需要计算特定的函数值, 避免了求解非线性方程的雅克比矩阵. 将 IDDF 算法应用于再入弹道目标的状态估计, 仿真结果显示, IDDF 滤波性能明显优于 EKF, IEKF 和 DDF.

参考文献(References)

- [1] Bar-Shalom Y, Li X R, Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation[M]. New York: Wiley, 2001: 381-395.
- [2] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyten H F. A new approach for filtering nonlinear system[C]. Proc of the American Control Conf. Washington Seattle, 1995: 1628-1632.
- [3] Arulampalam S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.
- [4] Magnus N, Niels K, Ole R. New developments in state estimation for nonlinear system[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [5] Gabe S, Gaurav S, Larry M. The iterated sigma point Kalman filter with application to long range shaotereo[C]. Proc of Robotics: Science and Systems. Philadelphia, 2006: 34-41.
- [6] Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking, Part II: Ballistic target models[C]. Proc 2001 SPIE Conf on Signal and Data Processing of Small Targets. San Diego: The International Society for Optical Engineering, 2001: 559-581.
- [7] Ranman K, Mehra. A comparison of several nonlinear filters for reentry vehicle tracking[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1971, 16(4): 307-319.