第 27 卷 第 1 期
Vol. 27 No. 1

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 1 月
Jan. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 01-0028-07

基于购买行为的随机生命周期易逝品库存策略

郑长征[1,2], 刘志学[1], 左晓露[1]

(1. 华中科技大学 管理学院，武汉 430074；2. 中国电子信息产业发展研究院，北京 100846)

摘 要: 研究需求和商品生命周期均为随机的零售商库存管理问题, 提出按照购买行为特征对需求进行分类, 在不同类型的客户之间进行库存分配并允许缺货的库存策略. 通过构建动态规划模型, 求解出零售商最优库存策略, 包括补货策略和库存分配策略. 与先到先服务策略相比, 该策略能显著提升零售商的利润, 减少商品损坏的损失.

关键词: 随机生命周期；易逝品；随机需求；购买行为；库存分配；补货

中图分类号: TP274 **文献标识码:** A

Optimal policies for deteriorating inventory problems based on purchasing behavior

ZHENG Chang-zheng[1,2], *LIU Zhi-xue*[1], *ZUO Xiao-lu*[1]

(1. School of Management，Huazhong University of Science and Technology，Wuhan 430074，China；2. China Center for Information Industry Development，Beijing 100846，China. Correspondent：ZHENG Chang-zheng，E-mail: Longmz@hotmail.com)

Abstract: Retailer's inventory management problem is researched, where both the demand and the lifecycle of the product are stochastic. Demand is classified according to purchasing behavior and an inventory allocation policy is proposed among different types of customers, where backorder is allowed. Through dynamic programming, the optimal inventory policy is derived for the retailer, which consists of replenishment policy as well as inventory allocation policy. Compared to first-come-first-served allocation policy, the proposed policy can improve the retailer's profit significantly and reduce the loss caused by product deterioration.

Key words: stochastic lifecycle；deteriorating product；stochastic demand；purchasing behavior；inventory allocation; replenishment

1 引 言

变质或过期的商品既浪费了企业的资金, 又会造成积压, 需付出额外的处理费用, 使企业的生产、经营受到冲击, 导致企业的信誉受损, 客户忠诚度降低, 进而失去客户; 同时, 也会导致社会资源的浪费. 另一方面, 消费者对商品的要求越来越高, 需求更为多样化和不确定性. 企业从以往仅面临需求变化的压力逐步转变到商品损坏、贬值和需求多样化、不确定的双重压力. 在这种商品呈现更为明显的易逝性环境下, 企业如何有效地采购原材料、组织生产、安排库存结构, 制定商品的销售价格, 以保证损失最小、利润最大化, 在激烈的竞争中保持优势, 显得尤为重要和急迫.

自 Ghare 和 Schrader [1] 于 1963 年发现因商品变质而导致的库存量随着时间减少的比例关系可以用正的指数方程来表示, 并采用标准经济订货批量 (EOQ) 模型描述指数分布的随机生命周期易逝品库存问题之后, 学术界对指数分布随机生命周期的易逝品库存问题进行了大量研究[2-8]. 文献 [9] 给出了易逝品库存研究的详细情况. 然而, 现有文献均未考虑对需求 (客户) 进行区分, 仅研究单一需求环境下的易逝品库存问题. 目前尚未见到关于需求进行区分后多需求环境下如何最优化易逝品库存的补货策略和库存分配策略.

当需求可以通过某一方式进行区分时, 零售商将现有库存在不同层次或类别的客户群中进行分配以满足高价值客户的需求, 进而获取更多的利润是合理

收稿日期: 2010-06-08；**修回日期:** 2011-04-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70672039, 71072034).

作者简介: 郑长征(1979−), 男, 博士, 从事物流与供应链管理的研究；刘志学(1963−), 男, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理等研究.

的. 因此, 自 Veinott[10]提出库存分配策略之后, 关于如何在多类客户之间进行库存分配一直是学术界关注的焦点之一. 库存关键点控制策略正逐步为学术界所认同, 并已进入企业的实践中. 相关研究已从不允许缺货逐渐发展到考虑缺货完全等待, 进而考虑到缺货部分等待库存分配系统, 并提出了一系列缺货等待清理策略. 重要的文献有 [11-16] 等. 文献 [14, 16-17] 对相关研究进行了总结, 但均未涉及易逝品, 尤其是随机生命周期的易逝品问题.

本文以销售具有随机生命周期的易逝品以及面临随机需求环境的零售商为研究对象, 采用文献 [13-15] 类似的方法对需求进行区分, 即依照客户按意愿支付价格和期望交付时间的客户特征, 对客户需求进行分类, 构建动态规划模型; 以利润最大化为决策目标函数, 研究零售商最优库存策略, 包括补货策略和库存分配策略, 从而为企业的实际运作提供理论支持和指导.

2 模　型

2.1 需求分类

根据效用理论, 由于生活、工作以及教育等背景的不同, 不同的人对同一商品的个人效用感知具有差异性, 并导致客户购买行为具有明显不同的特征. 主要体现在意愿支付价格和期望交付时间 (等待被满足的时间) 的要求上具有明显差异性. 期望交付时间的差异可以进一步转换为缺货成本和缺货损失成本的差异.

一般而言, 愿意支付高价格的客户对交付时间很敏感, 不愿意等待; 而只愿意支付低价格的客户, 往往更多地考虑价格因素, 对商品的交付时间相对不敏感. 零售商可根据客户购买行为的不同, 合理安排库存和销售策略, 将库存在不同的客户群之间进行分配, 拒绝为低价值客户提供即时服务, 保留库存为将来可能到来的高价值客户提供即时服务, 以获取更高的利润, 并保持高的客户满意度. 由于随机生命周期的易逝品随时可能因变质或损坏而失去使用价值, 并造成损失, 客户分类策略对销售易逝品的零售商显得尤为重要. 因本文的模型不考虑缺货损失, 故按照客户意愿支付价格和缺货成本对客户需求进行分类.

2.2 假设和符号说明

本文假设零售商只销售一种易逝品, 商品生命周期随机, 服从期望为 $1/\lambda_0$ 的指数分布, 即在库商品的库存数量随着存储时间的增长会出现损坏而不能使用或者失去销售的价值. 零售商采取周期性盘点的库存策略, 在订货周期 T 开始时将库存水平补充到 X. 在销售期间, 需求随机到达, 服从到达率为 λ 泊松过程, 每个客户到达后发生一个商品的需求; 零售商满足客户的需求, 并承担商品变质或损坏的损失. 零售商根据客户的意愿支付价格和缺货成本对客户进行分类、归类, 将客户分为 m 类. 客户级别按照其愿意支付的价格从高到低排列, 即 $p_1 \geqslant \cdots p_i \geqslant \cdots p_m$, 缺货成本与其价格顺序一致, 即从高到低排列, $b_1 \geqslant \cdots b_i \geqslant \cdots b_m$.

在销售时刻 t, 客户随机到达, 每个级别客户 i 的到达服从到达率为 λ_i 泊松过程. 零售商不能事先预知是否有客户到达, 到达的客户属于哪一类型. 客户到达后, 根据其愿意支付的价格识别客户类别. 当第 i 类客户到达时, 零售商根据现有库存情况决定是否提供即时服务. 如果零售商向其提供即时服务, 则客户支付价格 p_i; 如果零售商拒绝提供即时服务, 即延时交付, 则客户须等待至期末或新的订单到达后才能得到满足, 并产生缺货成本 b_i. 由于商品生命周期是随机的, 某个商品在今后的某一时刻点可能会损坏, 从而失去销售的价值. 在销售期末, 如果有等待被满足的客户, 并有完好的商品, 则零售商将一次性用现有库存满足等待客户的需求; 没有得到满足的客户将在下一个周期期初得到满足. 如果满足了等待客户后仍然有完好的商品, 则这些商品将保留到下一个周期. 符号含义说明如下:

h: 单位时间单位库存持有成本;

m: 客户级别总数;

λ_i: 第 i 类客户到达率;

$1/\lambda_0$: 商品生命周期的期望;

p_i: 第 i 类客户愿意支付的价格;

b_i: 第 i 类客户的单位缺货成本;

c: 单位商品的购买成本;

T: 订货周期;

$y_{it} = 0, 1$: 在 t 时刻是否为第 i 类客户提供即时服务;

K: 固定订货成本.

2.3 模型的建立

商品的生命周期 L 服从期望为 $1/\lambda_0$ 的指数分布. 根据指数分布的无记忆性特点, 当有一个商品已经存活了 t 小时, 则该商品至少存活 $s+t$ 的条件概率等于它至少存活 s 小时的初始概率, 即

$$P(L > t + s \,|L > t) = P(L > s). \tag{1}$$

如果商品在 t 时刻是存活的, 则其余留存活时间的分布等于原寿命的分布, 也服从期望为 $1/\lambda_0$ 的指数分布. 式 (1) 表明, 根据无记忆性质, 可以对时间轴线上商品发生变质的事件进行记录. 假设计数过程为 $\{N(t), t \geqslant 0\}$, 记录到 t 时刻为止已变质的商品总数.

如果在 t 时刻有 $x(t)$ 个商品, 则两个相邻商品变质事件的时间间隔服从期望为 $1/[x(t)\lambda_0]$ 的指数分布. 根据泊松过程定义, 计数过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是以到达率为 $x(t)\lambda_0$ 的泊松过程. 因此, 可将商品的变质事件视为一类虚拟客户的到达, 此类客户随机到达, 并服从到达率为 $x(t)\lambda_0$ 的泊松过程. 虚拟客户到达后会强制拿走一个商品, 并不支付任何的价格.

将订货周期 T 分为 n 个足够小的时间单位 Δt, 即当 n 足够大时, $\Delta t \to 0$. 将时间离散化, 使得在每个 Δt 内至多到达一个客户. 定义 t 为余留时间, 即当前时刻到期末所剩余的时间, $t \in [0, T]$, 经过离散化后, t 为 $1 \sim n$ 的正整数, 即 $t = 1, 2, \cdots, n$. $t = 1$ 为期末, $t = n$ 为期初. 定义 x 为 t 时刻现有库存水平, (t, x) 为库存状态, $y_{it}(x)$ 为状态 (t, x) 下零售商服务策略, 即

$$y_{it} = \begin{cases} 1, \text{ 提供即时服务;} \\ 0, \text{ 延期服务.} \end{cases} \tag{2}$$

定义 $V_t(x)$ 为 (t, x) 状态下最大余留期望利润. 在库存状态 (t, x) 下, 当客户 i 到达时, 如果其需求得到即时满足, 则定义 $v_{it,y_{it}=1}(x)$为零售商为客户 i 提供即时服务后余留期望利润; 如果客户 i 的需求没有得到即时满足, 则定义 $v_{it,y_{it}=0}(x)$ 为拒绝即时服务后余留期望利润; 当到达的为商品折损事件, 则定义 $v_{0t}(x)$ 为商品发生变质后余留期望利润.

1) 考虑一般库存状态 (t, x), 即 $x > 0, t > 0$, 期间有客户需求发生, 并伴随着商品变质事件的发生.

① 当商品发生变质时, 余留期望利润为

$$v_{0t}(x) = -c - (x-1)h\Delta t + V_{t-1}(x-1). \tag{3}$$

② 当客户 i 到达时, 零售商可以选择提供即时服务或拒绝提供即时服务两种策略. 如果提供即时服务, 即 $y_{it}(x) = 1$, 则有

$$v_{it,y_{it}=1}(x) = r_i - (x-1)h\Delta t + V_{t-1}(x-1), \tag{4}$$

其中 $r_i = p_i - c$; 如果拒绝提供即时服务, 即 $y_{it}(x) = 0$, 则有

$$v_{it,y_{it}=0}(x) = r_i - b_i t - xh\Delta t + V_{t-1}(x). \tag{5}$$

对于零售商而言, 最优的选择应是在提供即时服务和拒绝即时服务两种策略中选择余留利润最大的策略. 令在状态 (t, x) 下, 零售商接待客户 i 后的余留利润为

$$v_{it}(x) = \max[v_{it,y_{it}=1}(x), v_{it,y_{it}=0}(x)]. \tag{6}$$

将商品变质事件作为一类虚拟客户考虑, 即客户 $= 0$, 根据泊松过程定义, 在 Δt 内商品变质事件发生的概率为 $x\lambda_0\Delta t$, 一个客户 i 到达的概率为 $\lambda_i\Delta t$, 没有客户到达的概率为 $1 - x\lambda_0\Delta t - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t$. 总结式 (3) $\sim$ (6), 可以得到零售商在库存状态 (t, x) 下, 最大余留利润为

$$V_t(x) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\Delta t v_{it}(x) + \Big(1 - x\lambda_0\Delta t - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t\Big)[V_{t-1}(x) - xh\Delta t]. \tag{7}$$

2) 当现有库存 $x = 0$ 时, 商品变质事件不会发生, 同时任一类型客户都将缺货, 即 $v_{it}(0) = v_{it,y_{it=0}}(0)$. 零售商最大余留利润为

$$V_t(0) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t v_{it}(0) + \Big(1 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t\Big)V_{t-1}(0). \tag{8}$$

综上分析, 可以构建动态规划模型. 以最大化余留利润为目标函数, 确定每个库存状态 (t, x) 下零售商的最优库存分配策略 $Y^* = \{y_{it}^*, i \in [1, m], t \in [1, n]\}$. 即

$$\begin{aligned} & V_t(x) = \sup_{y_{it}} V_t(x, y_{it}). \\ & \text{s.t. } y_{it} = 0 \text{ or } 1, \ \forall i \in [1, m], \ t \in [1, n]; \\ & \quad V_{0^-}(x) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

给定订货周期 T 和期初库存水平 X, 零售商在 T 周期内可以获得的期望利润即为期初 $(t = n)$ 的最大余留利润 $V_n(X)$. 考虑订货固定成本 K, 零售商的平均期望利润为

$$\varPi(X, Y^*, T) = \frac{V_n(X) - K}{T}. \tag{10}$$

因此, 在期初零售商面临的决策问题是决定最优订货量 $Q = X + W$ 和订货周期 T (其中: W 为上一周期未被满足的客户总数, X 为期初的最优库存), 以最大化平均期望利润, 即

$$\begin{aligned} & \max_{X,T} \varPi(X, Y^*, T), \\ & \text{s.t. } X \geqslant 0, \ T \geqslant 0. \end{aligned} \tag{11}$$

3 模型求解

在库存状态 (t, x) 下, 定义 $\varDelta_X V_t(x)$ 为增加一个库存所能带来的边际期望利润, $\varDelta_Y V_{it}(x)$ 为新客户 i 到达时, 零售商将服务策略由延期服务 $(y_{it} = 0)$ 改为提供即时服务 $(y_{it} = 1)$ 所能带来的边际期望利润, 即

$$\varDelta_Y V_{it}(x) = v_{it,y_{it}=1}(x) - v_{it,y_{it}=0}(x). \tag{12}$$

给定最优库存分配策略 Y_t^*, 定义 $\varDelta_X V_{it}(x\,|Y_t^*)$ 为增加一个库存用于服务客户 i 所带来的边际期望利润, 有

$$\begin{aligned} & \varDelta_X V_{it}(x\,|Y_t^*) = \\ & v_{it,y_{it}=1}(x+1) - v_{it,y_{it}=0}(x) = b_i\Delta t. \end{aligned} \tag{13}$$

3.1 期末情况

显然, 在期末 $(t = 1)$ 如果库存不为零 $x > 0$, 从

理性角度考虑, 零售商则应满足所有到达客户的即时服务要求, 即 $y_{i1}(x)=1$, 并将剩余的库存用于满足等待得到服务的客户, 剩余完好的商品将进入下一周期销售; 如果 $x=0$, 则只能让客户等待到下一个周期期初新订单到达时得到满足, 即 $y_{i1}(0)=0$.

定理 1　在期末 ($t=1$) 存在 $x_{i1}^*=1$时, 零售商的最优分配策略为: 当 $x\geqslant x_{i1}^*$ 时, $y_{i1}^*(x)=1$; 当 $x<x_{i1}^*$ 时, $y_{i1}^*(x)=0$.

证明略.

定理 2　在期末 ($t=1$), $\Delta_X V_1(x)$ 为 x 的非增函数, 即 $V_1(x)$ 是 x 的凹函数 (上凸).

证明　根据定理 1, 给定最优的库存分配策略 Y_1^*, 只有在 $x=0$ 时, 增加库存才会对客户 i 的服务策略产生影响, 从而对服务客户 i 的余留期望利润产生影响. 注意到, 在 Δt 内最多只有一个新客户 (包括商品变质事件) 到达, 因此最多只有一个客户可以获得新增的库存. 考虑商品变质损失, 可以得到边际期望利润为

$$\Delta_X V_1(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t\Delta_X V_{i1}(0|Y_1^*)-\lambda_0\Delta tc-\\ \displaystyle\Big(1-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\Delta t\Big)\Delta th,\ x=0;\\ -\lambda_0\Delta tc-h\Delta t,\ x>0.\end{cases}\tag{14}$$

将式 (13) 代入 (14), 可以简化为

$$\Delta_X V_1(x)=\begin{cases}\displaystyle-\lambda_0\Delta tc+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i(\Delta t)^2-\\ \displaystyle\Big(1-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\Delta t\Big)\Delta th,\ x=0;\\ -\lambda_0\Delta tc-h\Delta t,\ x>0.\end{cases}\tag{15}$$

可以看出, $\Delta_X V_1(0)>\Delta_X V_1(1)$, $\Delta_X V_1(x\,|x>0)\equiv-\lambda_0\Delta tc-h\Delta t$. 因此, $\Delta_X V_1(x)$ 为 x 的非增函数, 即 $V_1(x)$ 是 x 的凹函数 (上凸). □

推论 1　在期末, 最优的库存状态为 $(1,0)$, 即 $x=0$, 零库存策略为最优的库存策略.

证明　从定理 2 可知, 在 $t=1$ 时存在一个最优库存 $x_1^*\geqslant 0$ 使得余留利润 $V_1(x)$ 最大化. 从式 (15) 可知, $x>0$ 时, $\Delta_X V_1(x)<0$, 余留利润 $V_1(x)$ 随着 x 的增加而减少. 因此, 最优的库存应为 $x=0$. □

3.2　期中情况

零售商在期中必须根据库存状态以及余留利润情况决定库存分配策略.

定理 3　存在 $x_{it}^*=\min\{x|\Delta_X V_{t-1}(x-1)<b_it+h\Delta t\}$, 使得零售商的最优分配策略为: 当 $x\geqslant x_{it}^*$ 时, $y_{it}^*(x)=1$; 当 $x<x_{it}^*$ 时, $y_{it}^*(x)=0$.

推论 2　在 t 时刻, 最优库存分配策略的库存临界控制点存在如下 Nest 结构:

$$x_{1t}^*\leqslant\cdots\leqslant x_{(i-1)t}^*\leqslant x_{it}^*\leqslant\cdots\leqslant x_{mt}^*.\tag{16}$$

推论 2 表明零售商应优先满足高价值客户, 即给第 i 类客户提供即时服务, 同时也必须为 $i-1$ 类及其以上的高价值客户提供即时服务.

定理 4　1) $\Delta_X V_t(x)$ 为 x 的非增函数, 即 $V_t(x)$ 是 x 的凹函数 (上凸); 2) 每个时刻 t 均存在一个最优库存水平的 $x_t^*=\min\{x\,|\Delta_X V_t(x)\leqslant 0\}$, 使得余留期望利润 $V_t(x)$ 最大化.

证明　在定理 2 成立的前提下, 采用归纳法进一步证明定理 3, 定理 4 和推论 2 成立. 假设在 $t-1$ 时刻, $\Delta_X V_{t-1}(x)$ 是 x 的非增函数, 即为 x 的凹函数 (上凸). 将式 (4) 和 (5) 代入 (12), 可得到零售商将对客户 i 的服务策略由延期服务 ($y_{it}=0$) 改为提供即时服务 ($y_{it}=1$) 所能带来的边际期望利润, 即

$$\Delta_Y V_{it}(x)=b_it+h\Delta t-\Delta_X V_{t-1}(x-1).\tag{17}$$

并且当 $x=0$ 时, $\Delta_Y V_{it}(x)\ll 0$. 根据假设 $\Delta_X V_{t-1}(x)$ 是 x 的非增函数, 有

$$\begin{aligned}&\Delta_Y V_{it}(x)-\Delta_Y V_{it}(x-1)=\\&\Delta_X V_{t-1}(x-2)-\Delta_X V_{t-1}(x-1)\geqslant 0.\end{aligned}\tag{18}$$

这意味着存在 x_{it}^*, 且满足

$$x_{it}^*=\min\{x|\Delta_X V_{t-1}(x-1)<b_it+h\Delta t\}.\tag{19}$$

当 $x<x_{it}^*$ 时, $\Delta_Y V_{it}(x)\leqslant 0$; 当 $x\geqslant x_{it}^*$ 时, $\Delta_Y V_{it}(x)>0$. 即在库存状态 (t,x) 下, 零售商最优分配策略为: 当 $x\geqslant x_{it}^*$ 时, $y_{it}^*(x)=1$; 当 $x<x_{it}^*$ 时, $y_{it}^*(x)=0$.

在定理 3 成立的基础上证明推论 2 成立. 考虑零售商将对客户 $i-1$ 和 i 的服务策略由延期服务 ($y_{it}=0$) 改为提供即时服务 ($y_{it}=1$) 所能带来的边际期望利润之差 $\Delta_Y V_{(i-1)t}(x)-\Delta_Y V_{it}(x)$. 将式 (14) 代入, 因 $b_{i-1}\geqslant b_i$, 故 $\Delta_Y V_{(i-1)t}(x)-\Delta_Y V_{it}(x)=(b_{i-1}-b_i)\times\Delta t\geqslant 0$, 即服务客户 $i-1$ 的边际期望利润大于服务客户 i 的边际期望利润. 因此, 理性的零售商在为到达的客户 i 提供即时服务的同时, 也应为客户 $i-1$ 提供即时服务. 同时, 随着 x 的增加, $\Delta_Y V_{(i-1)t}(x)$ 将先于 $\Delta_Y V_{it}(x)$ 达到大于等于零, 因而根据定理 3, 有 $x_{1t}^*\leqslant\cdots\leqslant x_{(i-1)t}^*\leqslant x_{it}^*\leqslant\cdots\leqslant x_{mt}^*$.

下面在定理 3 零售商最优库存分配策略的基础上证明假设成立, 即证明定理 4 成立. 注意到, 在 Δt 内最多只有一个新客户 (包括商品变质事件) 到达, 因此最多只有一个客户可以获得新增的库存. 根据定理 3 中最优的库存分配策略, 考虑商品变质, 可以得到不同 x 取值区间内的边际期望利润.

$$\varDelta_X V_t(0)=$$
$$\lambda_1\Delta t b_1 t+\Big(1-\sum_{i=0}^{1}\lambda_i\Delta t\Big)[\varDelta_X V_{t-1}(0)-h\Delta t]-$$
$$\lambda_0\Delta t c_p, \tag{20}$$
$$\varDelta_X V_t(x|x=x_{kt}^*-1)=$$
$$\Big[1-(x+1)\lambda_0\Delta t-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Delta t\Big]\varDelta_X V_{t-1}(x)-$$
$$\lambda_0\Delta t c_p+\lambda_k\Delta t b_k t-[1-(\lambda_0+\lambda_k)\Delta t]h\Delta t+$$
$$\Big(x\lambda_0+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Big)\Delta t\varDelta_X V_{t-1}(x-1), \tag{21}$$
$$\varDelta_X V_t(x\,|x_{kt}^*\leqslant x<x_{k+1,t}^*-1)=$$
$$\Big[1-(x+1)\lambda_0\Delta t-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Delta t\Big]\varDelta_X V_{t-1}(x)-$$
$$(1-\lambda_0\Delta t)h\Delta t-\lambda_0\Delta t c_p+$$
$$\Big(x\lambda_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big)\Delta t\varDelta_X V_{t-1}(x-1), \tag{22}$$
$$\varDelta_X V_t(x\,|x\geqslant x_{mt}^*)=$$
$$\Big[1-(x+1)\lambda_0\Delta t-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t\Big]\varDelta_X V_{t-1}(x)-$$
$$(1-\lambda_0\Delta t)h\Delta t-\lambda_0\Delta t c_p+$$
$$\Big(x\lambda_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big)\Delta t\varDelta_X V_{t-1}(x-1). \tag{23}$$

从式(20)～(23)可以看出:

1) 当 $0<x<x_{2t}^*-1,\cdots,x_{(k-1)t}^*\leqslant x<x_{kt}^*-1,\cdots,x\geqslant x_{nt}^*$ 时, 由假设 $\varDelta_X V_{t-1}(x)$ 是 x 的非增函数可知, $\varDelta_X V_t(x)$ 也是 x 的非增函数.

2) 当 $x=0,\cdots,x=x_{kt}^*-1,\cdots,x\geqslant x_{nt}^*-1$ 时, 最优的库存分配策略已给定, 即当 $x=x_{kt}^*-1$ 时, 第 $k-1$ 类及以上客户将获得即时服务, 第 k 类及以下客户将被拒绝提供即时服务; 新增的一个库存将改变库存分配策略, 即新增的一个库存使得 $x=x_{kt}^*$, 零售商将为第 k 类客户提供即时服务. 期望利润的改变总是发生在 x 的临界点上, 新增的库存总是可能服务于更低价值的客户. 因此随着 x 的增加, 新增库存所服务的客户范围将增加, 边际期望利润 $\varDelta_X V_t(x)$ 将降低, 即 $\varDelta_X V_t(x_{(k-1)t}^*-1)>\varDelta_X V_t(x_{kt}^*-1)$.

3) 可以证明 $\varDelta_X V_t(x_{kt}^*-1)>\varDelta_X V_t(x_{kt}^*)$.

$$\varDelta_X V_t(x_{kt}^*-1)-\varDelta_X V_t(x_{kt}^*)=$$
$$\lambda_k\Delta t\varDelta_Y V_{kt}(x_{kt}^*)+\Big[(x_{kt}^*-1)\lambda_0+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Big]\Delta t\times$$
$$[\varDelta_X V_{t-1}(x_{kt}^*-2)-\varDelta_X V_{t-1}(x_{kt}^*-1)]+$$
$$\Big[1-x_{kt}^*\lambda_0\Delta t-\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i\Delta t\Big]\times$$
$$[\varDelta_X V_{t-1}(x_{kt}^*-1)-\varDelta_X V_{t-1}(x_{kt}^*)]. \tag{24}$$

因为 $\varDelta_Y V_{kt}(x_{kt}^*)\geqslant 0$, 同时假设 $\varDelta_X V_{t-1}(x)$ 是 x 的非增函数, 所以 $\varDelta_X V_t(x_{kt}^*-1)>\varDelta_X V_t(x_{kt}^*)$.

由式(1)～(3)可知, $\varDelta_X V_t(x)$ 为 x 的非增函数, $V_t(x)$ 是 x 的凹函数(上凸).

综上, 将定理2作为初始条件, 即 $t=1$ 时, $V_1(x)$ 是 x 的凹函数成立; 假设 $t-1$ 时刻, $V_{t-1}(x)$ 是 x 的凹函数成立, 从而可证明 t 时刻, $V_t(x)$ 是 x 的凹函数成立. 因此, 存在唯一的 x_t^*, 满足 $x_t^*=\min\{x|\varDelta_X V_t(x)\leqslant 0\}$, 使得余留期望利润 $V_t(x)$ 最大. □

定理 5 给定库存水平 x, 余留期望利润 $V_t(x)$ 是 t 的凹函数(上凸).

证明 给定库存状态 (t,x), 可知 x 必然在某一个最优库存分配策略的区间内, 可以假设 $x_{(k-1)t}^*\leqslant x<x_{kt}^*$. 根据定理3, 零售商将满足 $k-1$ 类及以上的高端客户即时服务需求, 而拒绝为 k 类及以下相对低端客户提供即时服务. 将式(3)～(5)代入(7), 考虑商品的变质, 可得库存状态 (t,x) 时的余留期望利润为

$$V_t(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t r_i-\sum_{i=k}^{m}\lambda_i\Delta t^2 b_i+\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i\Delta t^2 h-$$
$$(xh+\lambda_0 c)\Delta t+V_{t-1}(x)-$$
$$\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i\Delta t[V_{t-1}(x)-V_{t-1}(x-1)]. \tag{25}$$

考虑前文对时间 t 进行离散化的标示法, $t-1$ 即 $t-\Delta t$, 对式(25)整理可得

$$V_t(x)-V_{t-\Delta t}(x)=$$
$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t r_i-x\lambda_0\Delta t c_p-$$
$$\Big[1-\lambda_0\Delta t-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Delta t\Big]xh\Delta t-\sum_{i=k}^{m}\lambda_i\Delta t b_i t-$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Delta t(x-1)h\Delta t-\Big(x\lambda_0\Delta t+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Delta t\Big)\times$$
$$[V_{t-\Delta t}(x)-V_{t-\Delta t}(x-1)]. \tag{26}$$

于是 $V_t(x)$ 对 t 的一阶偏导为

$$\frac{\partial V_t(x)}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V_t(x)-V_{t-\Delta t}(x)}{\Delta t}=$$
$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i r_i-x\lambda_0 c_p-xh-\sum_{i=k}^{m}\lambda_i b_i t-$$
$$\Big(x\lambda_0+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Big)[V_t(x)-V_t(x-1)]. \tag{27}$$

$V_t(x)$ 对 t 的二阶偏导为

$$\frac{\partial^2 V_t(x)}{\partial t^2} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\dfrac{\partial V_t(x)}{\partial t}-\dfrac{\partial V_{t-\Delta s}(x)}{\partial t}}{\Delta s} = -\sum_{i=k}^{m}\lambda_i b_i + \Big(x\lambda_0+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Big)\times \Big[\frac{\partial V_t(x-1)}{\partial t}-\frac{\partial V_t(x)}{\partial t}\Big]. \tag{28}$$

由式 (27) 有

$$\frac{\partial V_t(x)}{\partial t}-\frac{\partial V_t(x-1)}{\partial t} = -\lambda_0 c_p - h + \Big[x\lambda_0+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Big]\times [\varDelta_X V_t(x-2)-\varDelta_X V_t(x-1)] - \lambda_0\varDelta_X V_t(x-2).$$

考虑到单位库存持有成本 h 必须小于其中一类客户的单位缺货成本 b_i, 否则大部分客户将缺货. 根据推论 1, $t=1$ 时最优的库存为 $x_1^*=0$, 辅以式 (15) 和 (24), 经过迭代可得

$$\frac{\partial V_t(x)}{\partial t}-\frac{\partial V_t(x-1)}{\partial t} > \sum_{i=k}^{m}\lambda_i b_i\Big/\Big(x\lambda_0+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\Big).$$

因此有 $\dfrac{\partial^2 V_t(x)}{\partial t^2}<0$, 即余留期望利润 $V_t(x)$ 是 t 的凹函数 (上凸). □

3.3 期初情况

定理 6　给定订货周期 T 和定理 1 以及定理 3 的最优库存分配策略 Y^*, 存在着唯一的最优期初库存水平 $X(T)$, 满足条件

$$X(T)=\min\{x\,|\,\varDelta_X V_T(x)\leqslant 0\}. \tag{29}$$

证明过程可参照定理 4 的证明.

根据定理 6, 令 $G(T)=V_T(X(T))$, 零售商的平均期望利润 $\varPi(X,Y^*,T)$ 可改写为

$$\varPi(X(T),Y^*,T)=\frac{G(T)-K}{T}. \tag{30}$$

定理 7　给定定理 1 和定理 3 的最优库存分配策略 Y^*, 存在唯一最优订货策略 (T^*,Q^*) 且满足:

1) 最优订货周期

$$T^*=\Big\{T|\,\frac{\mathrm{d}G(T)}{\mathrm{d}T}=\frac{G(T)-K}{T}\Big\}.$$

2) 最优订货量 $Q^*=X^*+W$. 其中: W 为上一周期未被满足的客户总数, X^* 为最优期初库存水平且满足 $X^*=X(T^*)$.

证明　将平均利润函数 $\varPi$ 对 T 求一阶偏导数, 有

$$\frac{\partial \varPi}{\partial T}=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}G(T)}{\mathrm{d}T}-\frac{G(T)}{T^2}+\frac{K}{T^2}.$$

令 $\dfrac{\partial \varPi}{\partial T}=0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}G(T)}{\mathrm{d}T}=\frac{G(T)-K}{T}. \tag{31}$$

取

$$T^*=\Big\{T|\,\frac{\mathrm{d}G(T)}{\mathrm{d}T}=\frac{G(T)-K}{T}\Big\}.$$

对 $\varPi$ 求二阶偏导, 有

$$\frac{\partial^2 \varPi}{\partial T^2}=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2G(T)}{\mathrm{d}T^2}-\frac{2}{T^2}\frac{\mathrm{d}G(T)}{\mathrm{d}T}+2\frac{G(T)-K}{T^3}. \tag{32}$$

当 $T=T^*$ 时, 根据定理 5, $G(T)$ 是关于 T 的凹函数, 即 $\dfrac{\mathrm{d}^2G(T)}{\mathrm{d}T^2}<0$, 有

$$\frac{\partial^2 \varPi}{\partial T^2}=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2G(T)}{\mathrm{d}T^2}<0. \tag{33}$$

于是当 $T=T^*$ 时, $\varPi$ 取最大值.

将 $T=T^*$ 代入式 (29), 由定理 6 可得零售商最优期初库存 $X^*=X(T^*)$. 考虑上一周期未被满足的客户总数 W, 零售商最优订货量 $Q^*=X^*+W$.

综上所述, 零售商最优订货策略为 (T^*,Q^*). □

3.4 算　法

赋初值: $T=\Delta T$.

Step 1: 计算 T 周期内的最优库存分配策略 Y^* 和最优的期初库存 $X(T)$; $\Delta t\to 0$, $n=T/\Delta t$, $M=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i T+S$, 其中 S 为一较大的正整数, $V_{0^-}(x)=0$.

Step 1.1: for $t=1:n$, $V_t(0)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\Delta t v_{it}(0)+\Big(1-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\Delta t\Big)V_{t-1}(0)$;

Step 1.2: for $x=1:M$, $V_t(x)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\Delta t v_{it}(x)+\Big(1-x\lambda_0\Delta t-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta t\Big)[V_{t-1}(x)-xh\Delta t]$;

Step 1.3: 确定最优库存分配策略的库存临界控制点 $x_{it}^*=\min\{x\,|\,\varDelta_X V_{t-1}(x-1)<b_i t+h\Delta t\}$;

Step 1.4: 确定给定周期 T 的最优期初库存 $X(T)=\min\{x\,|\,\varDelta_X V_T(x)\leqslant 0\}$.

Step 2: 确定最优订货周期 T^*. 如果

$$\frac{G(T)-G(T-\Delta T)}{\Delta T}>\frac{G(T)-K}{T},$$

则 $T=T+\Delta T$, 返回 Step 1; 否则停止, 令 $T^*=T, X^*=X(T^*)$.

注 1　如果取 $\Delta T=\Delta t$, 则算法可以进一步简化.

4 算例分析

假设零售商的单位库存持有成本为 $h=0.5$, 单位订货成本为 $c=2$. 根据客户的意愿支付价格 p 和缺货成本 b, 客户被分成 2 类: 一类客户 (高意愿支付价格, 高缺货成本); 二类客户 (低意愿支付价格, 低缺货成本). $p=(15,7), b=(5,1.5)$. 商品生命周期期望为 $1/\lambda_0$, 客户需求到达率为 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$. 假设需求总到达率为 $\lambda_1+\lambda_2=10$. 设 α 为第 1 类客户的期望需

求占总期望需求的比重, 即 $\alpha=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)\times 100\%$.

表 1 给出了到达率 ($\lambda=(5,5)$) 和固定订货成本组合时, 对客户进行分类并采用库存分配策略 (RP) 以及对客户不加区分策略 (FCFS) 的最优订货周期 T^*, 最优平均期望利润 $\varPi^*$, 最优期初库存 X^*, 服务满足率情况 (其中 $\lambda_0=0.1$). 图 1 给出了商品高变质率 ($\lambda_0\geqslant 1$) 下, α 和 λ_0 变化时, RP 策略相比 FCFS 策略的平均利润提高率 ($k=100$).

表 1 最优库存策略和满足率

项 目	$K=100$			$K=200$		
	DSP	FCFS	提高率/%	DSP	FCFS	提高率/%
最优订货周期 T^*	5.39	5.17	4.26	7.33	7.15	2.52
最优平均期望利润 $\varPi^*$	53.63	52.71	1.75	38.06	36.72	3.65
最优期初库存 X^*	50	50	–	72	74	–
一类客户满足率/%	69.37	65.85	5.35	68.00	65.52	3.79
二类客户满足率/%	53.80	65.78	−18.21	52.95	65.48	−19.14
缺货率/%	38.44	34.20	12.40	39.55	34.51	14.60
货损率/%	27.59	25.36	8.79	34.27	32.58	5.19

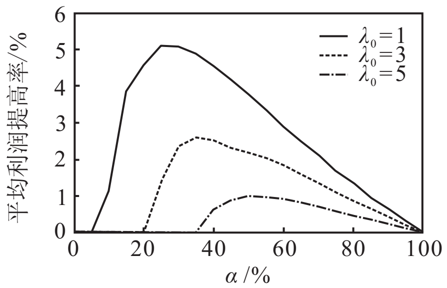

图 1 平均期望利润提高率

经过对比分析, 由表 1 和图 1 可以发现, 在随机需求和随机生命周期环境下: 1) 由于 RP 策略通过对客户进行区分, 采用库存分配策略提高了一类客户 (高端) 的服务水平, 从而有效地提高了零售商的平均利润. 如在 $\lambda_0=0.1,\lambda=(5,5)$ 时, 提高了 1.75% ($K=100$) 和 3.65% ($K=200$). 2) RP 策略延长了订货周期, 一方面节省了固定订货成本, 另一方面减少了期初库存, 从而减少了库存折损损失. 当 K 增大时, 利润提高更为明显. 3) 对客户区分力度越大, DSP 策略的效果越明显. 4) 商品期望生命周期越短, 变质率越高, 即 λ_0 越大时提高效应减弱. 5) 尽管 RP 策略能显著提高一类客户的服务水平以及零售商利润, 但是在随机环境下, 零售商不能事先预见商品是否会损坏、变质, 一类客户是否会到来, 什么时候到来. 当零售商拒绝为二类客户提供即时服务, 保留库存为将来可能到来的一类客户提供服务时, 可能承担商品损坏、变质的损失, 因而总体的服务水平和缺货率并没有比 FCFS 策略有明显的改善.

5 结 论

本文研究了需求和商品生命周期均为随机的零售商最优库存策略问题, 提出了按照客户意愿支付价格和缺货成本对客户需求进行分类, 在不同类型的客户之间进行库存分配的销售策略 (RP 策略). 通过构建动态规划模型, 求解出零售商最优库存策略, 包括补货策略和动态库存分配策略. RP 策略简单可行, 零售商只需在客户到达时观察现有库存情况便能作出是否给予即时服务的销售决策, 能显著提升零售商的利润, 减少商品损坏的损失.

需要指出的是, 本文构建的模型为 backorder 模型, 未考虑缺货损失情况, 且不能有效地提升总体服务水平. 因此, 如何在需求和商品生命周期均为随机的环境下, 构建考虑缺货损失的库存模型和给出提升总体服务水平的库存策略将是今后值得研究的方向之一.

参考文献(References)

[1] Ghare P M, Schrader G F. A model for exponentially decaying inventory[J]. J of Industrial Engineering, 1963, 14: 238-243.

[2] Teng J T, Chern M S, Yang H L, et al. Deterministic lot-size inventory models with shortages and deterioration for fluctuating demand[J]. Operations Research Letters, 1999, 24(1/2): 65-72.

[3] Abad P L. Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering[J]. Management Science, 1996, 42(8): 1093-1104.

[4] Sivakumar B. A perishable inventory system with retrial demands and a finite population[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2009, 224(1): 29-38.

[5] Roy A, Kar S, Maiti M. A deteriorating multi-item inventory model with fuzzy costs and resources based on two different defuzzification techniques[J]. Applied Mathematical Modelling, 2008, 32(2): 208-223.

[6] Goyal S K, Giri B C. The production-inventory problem of a product with time varying demand, production and deterioration rates[J]. European J of Operational Research, 2003, 147(3): 549-557.

[7] Liao J J. An EOQ model with noninstantaneous receipt and exponentially deteriorating items under two-level trade credit[J]. Int J of Production Economics, 2008, 113(2): 852-861.

[8] He Y, Wang S Y, Lai K K. An optimal production-inventory model for deteriorating items with multiple-market demand[J]. European J of Operational Research, 2010, 203(3): 593-600.

[9] Goyal S K, Giri B C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory[J]. European J of Operational Research, 2001, 134(1): 1-16.

(下转第40页)