

文章编号: 1001-0920(2011)11-1621-06

## 多智能体系统可控性的图论刻画

张安慧, 张世杰, 陈健, 郭海波, 孔宪仁, 王峰

(哈尔滨工业大学 卫星技术研究所, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 研究领航者-跟随者结构多智能体系统的可控性问题. 利用松弛的等价分化刻画了系统可控性与信息拓扑结构之间的关系, 为系统可控性提供了基于图论的判别方法. 基于置换群理论将对称的概念推广到多领航者系统, 并证明了3种图论工具(对称性、等价分化和松弛的等价分化)之间的包含关系. 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 多智能体系统; 可控性; 轨道分化; 松弛的等价分化

中图分类号: TP13

文献标识码: A

## Graph-theoretic characterization of controllability for multi-agent systems

ZHANG An-hui, ZHANG Shi-jie, CHEN Jian, GUO Hai-bo, KONG Xian-ren, WANG Feng

(Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China. Correspondent: ZHANG An-hui, E-mail: zh.anhui@126.com)

**Abstract:** The paper studies the controllability problem for multi-agent systems with leader-follower structure. The relationship between system controllability and communication topology is characterized based on graph theory. A graph theoretic criterion for controllability is provided. The concept of symmetry is extended to multi-leaders systems through permutation group theory, it is proved that both topology symmetry and equitable partition are two special cases of relaxed equitable partitions. Simulation results show effectiveness of proposed method.

**Key words:** multi-agent system; controllability; orbit partition; relaxed equitable partition

### 1 引言

网络化系统通常由一些具有一定敏感、计算、通信和执行能力的智能体以及它们之间的通信关系组成. 这些智能体只是一个抽象, 它们可以是移动机器人、智能敏感器节点、无人飞行器、水下潜艇、航天器或卫星等. 由于其应用的广泛性和性能的优越性, 多智能体系统的协作控制问题得到了众多研究者的广泛关注<sup>[1-8]</sup>, 而一致性算法则是其中较为活跃的一个研究方向<sup>[4-8]</sup>. 在一致性算法中, 系统中的个体在没有外界控制指令干预的情况下, 利用其邻居的相对信息制定决策, 整个系统通过局部信息交互使系统的状态向量达到一致.

施加外界控制的一致性算法最早由 Tanner<sup>[9]</sup>于2004年提出, 通过引入一种领航者-跟随者结构将外界控制指令引入系统, 其中领航者只受系统外部控制指令约束, 跟随者仍遵循原协同控制律. 实际上, 领航

者的运动轨迹可以作为由所有跟随者组成的系统的外部控制输入. 本文将研究这种具有领航者-跟随者结构的多智能体系统的可控性问题, 即是否存在恰当的外部控制输入, 能够在有限时间内将跟随者组成的系统从任意的初始状态转移到任意的期望状态. 一致性算法的可控性问题自提出以来便受到了众多学者的广泛关注, 并出现了大量的研究成果. 这些成果主要包括: 具有固定信息拓扑的系统的可控性<sup>[9-17]</sup>, 具有切换信息拓扑的系统的可控性<sup>[18-19]</sup>, 时滞系统的可控性<sup>[20]</sup>和加权的一致性算法的可控性<sup>[21]</sup>等.

系统的可控性与信息拓扑密切相关, 研究信息拓扑对可控性的影响, 不仅可以为信息拓扑结构的设计提供指导原则, 而且有助于对加权方式的研究, 因此对可控性进行一些图论的刻画是非常必要的. 关于这方面的研究可参见文献 [9-10, 12-13, 15-17, 22]. 其中: [9] 针对系统连通程度和系统规模对可控性的影

收稿日期: 2010-06-12; 修回日期: 2010-08-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60704020); 教育部博士点新教师基金项目(20092302120067); 微小型航天器技术国防重点学科实验室开放基金项目(HIT.KLOF.2009097).

作者简介: 张安慧(1980-), 女, 博士, 从事卫星编队控制的研究; 张世杰(1980-), 男, 副教授, 博士生导师, 从事航天器的研究.

响进行了讨论, [16] 则研究了领航者的选取对可控性的影响. Rahmani 等人<sup>[10,13]</sup>基于对合变换定义了系统的对称性, 并以此为工具对单领航者系统的可控性进行研究. 由于基于对合变换定义的对称性并不全面, [17] 定义了更为一般的对称性. 对于多领航者的系统, [12] 利用等价分化对可控性进行了图论刻画. 针对具有对称性的单领航者系统, [22] 利用松弛的等价分化这一图论工具, 研究了与可控性相关的几个问题, 即可控性分解、利用商图导出的系统模拟原系统行为以及通过加权实现系统可控性. 然而, 对称性并不是松弛等价分化存在的必要条件, 松弛的等价分化这一工具完全可应用于更为一般的系统.

本文的工作主要包括两部分: 首先, 利用松弛的等价分化研究了信息拓扑对可控性的影响. 与文献 [22] 的工作的不同之处在于, 本文研究的是更为一般的系统, 而不仅仅局限于具有对称性的单领航者系统, 本文的结论也说明了文献 [22] 的部分结论在某些情况下并不成立. 其次, 利用置换群理论对单领航者系统的对称性进行等价刻画, 并将对称性的概念推广到多领航者的情形, 从而为系统可控性研究提供了新的视角.

本文针对目前可控性研究中使用的 3 种图论工具(对称性、等价分化和松弛的等价分化), 证明了三者之间的包含关系, 从而说明了三者的适用范围是依次扩大的. 因此, 本文的定理 1 是文献 [17] 中的 Proposition 5.8 和 Theorem 7.15 的拓展.

文中用到的代数图论和置换群理论的相关知识可分别参见文献 [23-25].

## 2 图和图的矩阵表示

一个无向图  $\Gamma$  由顶点集  $V(\Gamma)$  和边集  $E(\Gamma) \subset V(\Gamma) \times V(\Gamma)$  组成. 若图  $\Gamma$  为具有  $n$  个顶点的有限图, 则可以将  $V(\Gamma)$  和  $E(\Gamma)$  分别表示为  $V(\Gamma) = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E(\Gamma) = \{(i, j) | i, j \in V(\Gamma)\}$ . 没有环及多重边的图称为简单图, 本文只研究简单图. 顶点  $i$  的邻集定义为  $N(i) = \{j \in V(\Gamma) | (i, j) \in E(\Gamma)\}$ . 如果图  $\Gamma$  中任 2 个不同的顶点  $i, j$  间都存在 1 条道路, 则称图  $\Gamma$  是连通的. 图的邻接矩阵  $A(\Gamma) = [a_{ij}]$  定义为  $a_{ij} = 1, i \neq j$ , 当且仅当  $(i, j) \in V(\Gamma), a_{ii} = 0$ . 图的拉普拉斯矩阵为  $L(\Gamma) = [l_{ij}]$ , 其中  $l_{ii} = \sum_{j \neq i} l_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}$ .

将智能体视为顶点, 智能体间的通信(或敏感关系)视为边, 则整个系统的通信关系可用一个图  $\Gamma$  描述, 称  $\Gamma$  为系统的信息拓扑. 若智能体之间的通信是双向的, 则用无向图表示; 否则, 视为有向图. 若系统的信息拓扑不随时间变化, 即智能体之间的边不会随时间的变化增加或减少, 则称为固定拓扑. 本文研究

的都是固定拓扑.

## 3 问题描述

设多智能体系统为

$$\Xi : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{u}_i, \\ \boldsymbol{u}_i = \sum_{j \in N(i)} (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^m$  为第  $i$  个智能体的状态向量,  $\boldsymbol{u}_i \in \mathbf{R}^m$  为第  $i$  个智能体的控制输入. 设  $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n]^T$ , 则系统 (1) 可表示为  $\dot{\boldsymbol{x}} = -L\boldsymbol{x}$ , 其中  $L$  为系统的拉普拉斯阵.

**注 1**  $\boldsymbol{x}_i$  是任意有限维的, 本文只考虑一维的情况. 多维的情况可以用克罗尔内积表示, 本文的结论对多维情况仍然成立.

在系统 (1) 中, 个体利用相邻智能体的相对信息生成自身的控制指令, 整个系统在不受控制站干预的情况下, 通过局部信息交互使系统状态向量达到一致.

下面考虑通过引入领航者-跟随者结构, 将外界控制指令引入到系统中. 设系统中有  $N$  个领航者和  $n$  个跟随者, 其中领航者只受控制站的控制, 而跟随者仍遵循式 (1) 中的协同控制律.

根据领航者与跟随者的分化, 将系统拉普拉斯矩阵  $L$  写成如下分块矩阵的形式:

$$L = \begin{bmatrix} L_f & L_{f,l} \\ L_{l,f} & L_l \end{bmatrix}. \quad (2)$$

引入领航者-跟随者结构的多智能体系统可表示为

$$\Xi : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_f = -L_f \boldsymbol{x}_f - L_{f,l} \boldsymbol{x}_l, \\ \dot{\boldsymbol{x}}_l = \boldsymbol{u}. \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{u}$  为外界控制指令. 由式 (3),  $\boldsymbol{x}_l$  相当于所有跟随者组成的系统的外界控制指令. 本文所要研究的问题是领航者能否将跟随者从任意的初始状态转移到任意的期望状态, 即系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_f = -L_f \boldsymbol{x}_f - L_{f,l} \boldsymbol{x}_l \quad (4)$$

的可控性问题.

**注 2** 可控性与顶点的标记顺序无关. 为描述简便, 总是将跟随者从 1 到  $n$  进行标记, 而领航者标记在后(改变顶点的标记顺序相当于交换矩阵  $L_f$  和  $L_{f,l}$  的相应的行和列).

分别用  $A, B, \boldsymbol{x}$  和  $\boldsymbol{u}$  表示  $-L_f, -L_{f,l}, \boldsymbol{x}_f$  和  $\boldsymbol{x}_l$ , 则式 (4) 可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}. \quad (5)$$

## 4 可控性分析

下面利用图的松弛等价分化来分析系统的可控性与信息拓扑之间的关系.

**定义 1**<sup>[23]</sup> 图  $\Gamma$  的  $r$ -分化  $\Pi$ , 就是将图的顶点

集  $V(\Gamma)$  分成  $r$  个胞腔  $C_1, C_2, \dots, C_r$ , 满足  $V(\Gamma) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r, C_i \cap C_j = \emptyset (i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, i \neq j)$ . 如果  $C_i$  中的每个点在  $C_j$  中有相同个数的邻接点 ( $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ ), 则称  $\Pi$  为  $\Gamma$  的等价分化.

**定义 2** [22] 设  $\Pi$  为  $\Gamma$  的等价分化, 如果  $C_i$  中的每个点在  $C_j$  中有相同个数的邻接点 ( $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, i \neq j$ ), 则称  $\Pi$  为  $\Gamma$  的松弛的等价分化.

若  $C_i$  中的点与  $C_j$  中的点相邻接, 则称  $C_i$  与  $C_j$  邻接.

由上述定义可知, 等价分化必是松弛的等价分化. 显然任意一个图都存在松弛的等价分化, 令每个胞腔只含一个顶点, 或所有的顶点都属于同一个胞腔, 则都构成松弛的等价分化, 称这两种分化为平凡的.

对于具有领航者-跟随者结构的系统, 设系统中共有  $N$  个领航者  $l_1, l_2, \dots, l_N$  和  $n$  个跟随者, 所有跟随者以及跟随者之间的连接关系做成的图记为  $\Gamma_f$ . 定义  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N} = \Pi_f \cup C_{s+1} \cup C_{s+2} \cup \dots \cup C_{s+N}$ . 其中:  $\Pi_f$  为  $\Gamma_f$  的松弛等价分化,  $C_{s+1} = \{l_1\}, C_{s+2} = \{l_2\}, \dots, C_{s+N} = \{l_N\}$ . 即在分化  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$  中,  $N$  个领航者各自独占一个胞腔. 进一步, 令  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}^M = \Pi_f^M \cup C_{s+1} \cup C_{s+2} \cup \dots \cup C_{s+N}$  为  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$  中胞腔个数最少的分化, 称为  $\Gamma$  的稳定领航者的极大松弛等价分化.

**例 1** 对于图 1 所示拓扑结构, 其分化是该图的等价分化, 从而也是松弛的等价分化. 令  $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, C_2 = \{7, 8, 9\}, C_3 = \{10\}$ , 则此种分化是该图的松弛的等价分化, 而不是等价分化. 若取顶点 10 为领航者, 则  $C_1, C_2, C_3$  也是图 1 的一个稳定领航者 10 的极大松弛等价分化.

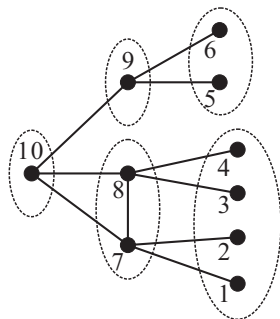


图 1 等价分化

**定理 1** 若系统 (5) 的信息拓扑  $\Gamma$  存在非平凡的松弛的等价分化  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$ , 则系统 (5) 不可控.

**证明** 设  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$  含有  $s+N$  个胞腔. 若  $|C_i| = r_i$ , 即胞腔  $C_i$  中含有  $r_i$  个顶点, 则对  $C_i$  中的点用  $r_i$  个连续数字进行标记. 为描述简便, 本文只对 2 个领航者的情况进行证明, 多于 2 个领航者的情况可以类似证明.

设  $l_1$  与  $m$  个胞腔  $C_{p_1}, C_{p_2}, \dots, C_{p_m}$  相邻接,  $l_2$  与  $t$  个胞腔  $C_{q_1}, C_{q_2}, \dots, C_{q_t}$  相邻接, 按图  $\Gamma$  的胞腔分化形式对矩阵  $A$  和  $B$  进行分块

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{bmatrix}, B = [\beta_1 \ \beta_2].$$

其中:  $A_{i,j}$  为  $r_i \times r_j$  阶矩阵,  $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ; 而

$$\beta_1 = [\dots \ E_{p_1} \ \dots \ E_{p_2} \ \dots \ E_{p_m} \ \dots]^T, \\ \beta_2 = [\dots \ E_{q_1} \ \dots \ E_{q_2} \ \dots \ E_{q_t} \ \dots]^T.$$

$E_{p_i} = [1 \ \dots \ 1]^T$  为  $r_{p_i}$  维列向量,  $E_{q_i} = [1 \ \dots \ 1]^T$  为  $r_{q_i}$  维列向量,  $p_i (q_i) \in \{1, 2, \dots, s\}, \beta_1 (\beta_2)$  中元素除  $E_{p_i} (E_{q_i})$  外都是零元素.

由松弛等价分化的定义,  $A_{i,j}$  的每行元素之和相等. 由计算可知, 可控性判别矩阵  $C$  中同一胞腔中的点对应的行向量相等, 故  $C$  的秩  $\leq s$ . 又因  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$  是非平凡的, 所以秩  $(C) < n$ , 系统不可控.  $\square$

**注 3** 文献 [22] 研究的是关于单个领航者对称的系统. 本文将证明关于单个领航者对称并不是非平凡松弛等价分化存在的必要条件, 而只是松弛等价分化的一种特殊情况. 定理 1 的结论对一般的具有非平凡松弛等价分化的多个领航者的系统均成立.

为什么具有非平凡的松弛等价分化  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$  的系统 (5) 是不可控的呢? 由定理 1 证明过程中的可控性判别矩阵  $C$  的形式不难得到: 在初始条件相同的情况下, 属于  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$  的同一胞腔中的点具有相同的运动轨迹, 因此领航者无法将同一胞腔中的跟随者区分开, 从而无法将它们控制到不同的目标位置, 这便导致了系统的不可控性. 从这个意义上看, 属于同一胞腔中的点的地位是等同的.

由此, 可以在系统设计的初始阶段避免出现地位等同的现象, 保证系统的可控性. 然而, 对于不可控的系统, 可通过破坏等同性实现可控性. 具体讲有两种方法: 一是通过改变信息拓扑破坏等同性, 二是对地位等同的点赋以相异的权值来破坏等同性.

**例 2** 在图 2 所示信息拓扑中, 若取 1 为领航者, 则顶点 2 与顶点 6 地位等同, 顶点 3 与顶点 5 地位等同, 由定理 1 可知系统不可控. 这里可取消顶点 1 与 6 之间的通信, 这时整个信息拓扑中便不再存在地位等同的点, 通过计算可控性判别矩阵  $C$  可得系统可控.

**例 3** 在图 3 所示的星型拓扑中, 若取 4 为领航者, 则顶点 1, 顶点 2 和顶点 3 地位等同, 系统不可控. 这时, 若对 1, 2, 3 与领航者 4 之间的信道分别赋以权值 1, 2, 3, 则破坏了顶点 1, 2, 3 之间的等同性, 系统变成可控, 于是可通过设计领航者 4 的轨迹, 在任意有

限时间内将 3 个跟随者从任意的初始位置引导到任意指定的期望位置.

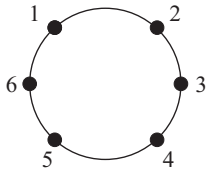


图 2 环形信息拓扑

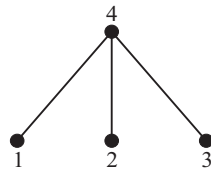


图 3 星形拓扑

图 4 给出了 3 个跟随者的运动轨迹. 3 个跟随者从任意初始位置 (用 ● 表示) 被控制到指定的期望位置 (用 \* 表示), 形成圆形编队构型.

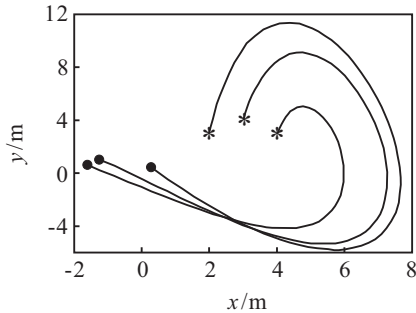


图 4 跟随者 1, 2 和 3 的运动轨迹

**推论 1** 具有多领航者的系统 (5) 可控的必要条件是系统信息拓扑  $\Gamma$  的极大松弛等价分化  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}^M$  是平凡的, 即  $|C_i| = 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

由推论 1 可知, 系统 (5) 可控的前提是对于任意两个跟随者, 至少存在一个领航者能将它们区分开.

**例 4** 在图 2 所示的信息拓扑中, 选取 1 和 2 为领航者, 1 无法识别 3 和 5, 2 无法识别 4 和 6, 但整个系统是可控的. 因为, 对于 2 而言, 3 和 5 的地位是不等同的; 对于 1 而言, 4 和 6 的地位是不等同的.

**注 4** 推论 1 只是系统 (5) 可控的必要条件, 并非充分条件.

**例 5** 图 5 所示的拓扑结构不存在非平凡的松弛等价分化, 但如果选取顶点 1 为领航者, 则以该拓扑为信息拓扑的系统是不可控的. 此例子也说明了文献 [22] 关于可控性的充要条件 Theorem 3 不成立.



图 5 不存在非平凡松弛等价分化但不可控的系统信息拓扑

文献 [9] (Proposition V.1) 指出, 一个完全图是不可控的. 事实上, 对于刻画不可控性, 有比完全图更弱的条件.

**推论 2** 若系统 (5) 中的每一个领航者均与所有的跟随者相邻接 (跟随者的个数大于 1), 则不论跟随者之间的连接情况如何, 系统 (5) 总是不可控的.

**推论 3** 设  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}^M = \Pi_f^M \cup \{l_1\} \cup \{l_2\} \cup \dots \cup \{l_N\}$  为系统 (5) 的信息拓扑  $\Gamma$  的极大松弛等价分化, 若  $\Pi_f^M$  中含有  $s$  个胞腔, 则系统 (5) 的可控子空间的维数  $d \leq s$ .

**例 6** 对于图 6 所示的信息拓扑, 取顶点 9 为领航者,  $C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}, C_4 = \{4\}, C_5 = \{5\}, C_6 = \{6\}, C_7 = \{7, 8\}, C_8 = \{9\}$  是该信息拓扑的稳定领航者的一个极大松弛等价分化, 而系统可控子空间的维数为 6.

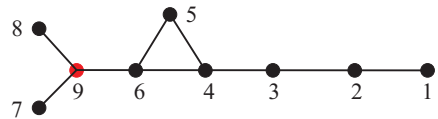


图 6 可控子空间的维数小于  $\Pi_f^M$  的胞腔个数

**注 5** 推论 3 指出, 运动轨迹相同并不是造成系统不可控的唯一原因. 同时, 图 6 所示的拓扑是关于领航者 9 对称的, 由此说明文献 [22] 中的 Corollary 1 并不成立.

**推论 4** 设系统 (5) 中只有一个领航者, 若系统信息拓扑  $\Gamma$  具有链状的极大松弛等价分化  $\Pi_l^M = \Pi_f^M \cup \{l\}$ , 其中  $\Pi_f^M$  含有  $s$  个胞腔, 且领航者位于链的端点处, 则系统 (5) 的可控子空间的维数  $d = s$ .

**注 6** 只需按定理 1 中的方式对矩阵  $A$  和矩阵  $B$  进行分块, 然后通过计算可控性判别矩阵  $C$  便可证明推论 4 成立.

### 5 对称性、等价分化与松弛的等价分化的关系

目前关于可控性的图论结果分别利用对称性<sup>[13]</sup> (单领航者)、等价分化<sup>[12]</sup> (多领航者) 以及松弛的等价分化进行刻画, 那么三者之间有什么关系呢? 本文利用置换群理论将对称性推广到多领航者系统, 并证明关于领航者对称的系统必定存在稳定领航者的非平凡等价分化, 从而得到三者之间的包含关系.

**定义 3** 设  $\psi$  为  $\Gamma$  的顶点集  $V(\Gamma)$  上的置换,  $\psi(i) = j$  表示  $\psi$  将顶点  $i$  映为顶点  $j$ , 若  $(i, j) \in E(\Gamma) \Leftrightarrow (\psi(i), \psi(j)) \in E(\Gamma)$ , 即置换  $\psi$  保持各顶点之间的邻接关系不变, 则称  $\psi$  为图  $\Gamma$  的自同构映射.  $\Gamma$  的所有自同构映射构成  $\Gamma$  的自同构群  $G$ .

恒等置换, 即保持每个顶点不变的置换, 称为自同构群的单位元.

设  $\psi$  为图  $\Gamma$  的顶点集  $V(\Gamma)$  上的置换,  $\psi$  对应的置换阵为

$$[\Psi]_{i,j} = \begin{cases} 1, & \psi(i) = j; \\ 0, & \psi(i) \neq j. \end{cases}$$

显然, 恒等置换对应单位矩阵.

**命题 1**<sup>[24]</sup> 设  $A(\Gamma)$  是图  $\Gamma$  的邻接矩阵,  $\pi$  是顶点集  $V(\Gamma)$  上的一个置换, 则  $\pi$  是图  $\Gamma$  的一个自同构映射当且仅当  $PA(\Gamma) = A(\Gamma)P$ , 其中  $P$  是  $\pi$  对应的置换矩阵.

**定义 4** 若图  $\Gamma$  的自同构映射  $\psi$  满足  $\psi(i) = i$ , 则称  $\psi$  稳定顶点  $i$ , 所有稳定顶点  $i$  的自同构映射构成顶点  $i$  的点稳定子群, 记为  $G_i$ .

$G_i$  中元素既保持每个顶点间的邻接关系不变, 又固定顶点  $i$  不动. 记  $G_i > 1$  表示  $G_i$  中含有非单位元.

下面利用置换群理论对系统的对称性进行等价刻画, 并将对称性推广到多领航者系统.

**定义 5**<sup>[17]</sup> 设系统 (5) 中只有一个领航者  $\beta$ , 若  $\exists n \times n$  阶非单位置换矩阵  $\Psi$  使得  $\Psi(-L_f) = (-L_f)\Psi$ , 则称系统关于  $\beta$  对称.

**命题 2** 系统 (5) 关于领航者  $\beta$  对称当且仅当  $\beta$  的点稳定子群  $G_\beta > 1$ .

**证明** 设系统中有  $n$  个跟随者和一个领航者  $\beta$ , 所有跟随者从 1 到  $n$  进行标记, 领航者的标号为  $n+1$ . 根据跟随者与领航者的分化, 将图  $\Gamma$  的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵写成如下分块矩阵的形式:

$$A(\Gamma) = \begin{bmatrix} A_f & \delta_{n+1} \\ \delta_{n+1}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$L(\Gamma) = \begin{bmatrix} L_f & -\delta_{n+1} \\ -\delta_{n+1}^T & d_{n+1} \end{bmatrix}.$$

其中:  $A_f$  为所有跟随者构成的子图  $\Gamma_f$  的邻接矩阵;  $\delta_{n+1}$  为  $n$  维列向量, 表示领航者  $\beta$  与跟随者之间的邻接情况, 即

$$\delta_{n+1}(i) = \begin{cases} 1, & (i, n+1) \in E(\Gamma); \\ 0, & (i, n+1) \notin E(\Gamma). \end{cases}$$

1) 充分性. 设系统 (5) 关于领航者  $\beta$  对称, 则  $\exists n \times n$  阶非单位置换矩阵  $\Psi_f$  使得  $\Psi_f(-L_f) = (-L_f)\Psi_f$ , 由 Proposition 5.13<sup>[17]</sup> 得

$$\Psi_f A_f = A_f \Psi_f, \quad \Psi_f \delta_{n+1} = \delta_{n+1}. \quad (6)$$

由  $\Psi_f^T = \Psi_f^{-1}$  得

$$\delta_{n+1}^T \Psi_f = (\delta_{n+1}^T \Psi_f^T) \Psi_f = \delta_{n+1}^T. \quad (7)$$

设  $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ , 则由式 (6) 和 (7) 得

$$\Psi A(\Gamma) = A(\Gamma) \Psi.$$

由命题 1 得  $\Psi \in G_\beta$ , 即  $\beta$  的点稳定子群  $G_\beta > 1$ .

2) 必要性. 设  $\beta$  的点稳定子群  $G_\beta > 1$ , 则存在非单位置换阵  $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ , 使得  $\Psi A(\Gamma) = A(\Gamma) \Psi$ , 因为  $\Psi D(\Gamma) = D(\Gamma) \Psi$ , 所以  $\Psi L(\Gamma) = L(\Gamma) \Psi$ . 由此得  $\Psi_f(-L_f) = (-L_f)\Psi_f$ , 即系统 (5) 关于  $\beta$  对称.  $\square$

在图  $\Gamma$  的自同构群  $G$  中, 保持所有领航者不动的元素的集合记为  $G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N}$ . 这里用  $G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N} > 1$  表示  $G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N}$  含有非单位元. 对于多领航者的系统, 对称性定义如下:

**定义 6** 设系统 (5) 中有  $N$  个领航者  $l_1, l_2, \dots, l_N$ , 若  $G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N} > 1$ , 则称系统 (5) 关于  $l_1, l_2, \dots, l_N$  对称.

为证明对称性是一种等价分化, 下面引入轨道与轨道分化的定义.

**定义 7** 设  $H$  是图  $\Gamma$  的自同构群  $G$  的任一子群, 则称集合  $\{j^H\} = \{\psi(j) | \psi \in H, j \in V(\Gamma)\}$  为  $H$  在  $\Gamma$  上产生的轨道.

所有  $\{j^H\}$  ( $j=1, 2, \dots, n+N$ ) 称为  $H$  在  $\Gamma$  上产生的轨道分化.

设  $H$  在  $\Gamma$  上产生的轨道分别为  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ , 则  $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_k = V(\Gamma)$  且  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, i \neq j$ , 每个顶点属于且仅属于一个轨道.

**例 7** 图 1 中所示的信息拓扑中, 顶点 10 的点稳定子群  $G_{10}$  产生的轨道分别为  $\Delta_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \Delta_2 = \{5, 6\}, \Delta_3 = \{7, 8\}, \Delta_4 = \{9\}, \Delta_5 = \{10\}$ .

实际上, 轨道分化是将系统中的个体进行了分类, 位于同一轨道中的点在整个信息拓扑结构中的地位是等同的, 将它们进行互换, 并不会改变原拓扑结构. 例如, 将图 1 中的 7 和 8 两个顶点进行互换, 并将 1 和 3 (或 4) 进行互换, 2 和 3 (或 4) 进行互换, 那么如果不考虑顶点的标号, 则得到的新拓扑结构与原来的拓扑结构是同一个.

**命题 3** 图  $\Gamma$  的自同构群  $G$  的任一子群  $H$  在  $\Gamma$  上产生的轨道分化是  $\Gamma$  的等价分化.

**注 7** 对于任意  $\sigma \in H, (i, j) \in E(\Gamma) \Leftrightarrow (i, j)^\sigma \in E(\Gamma)$ . 由轨道的定义便可证明命题 3 成立.

轨道分化是等价分化的一种特殊形式, 一个轨道就是构成分化的一个胞腔, 而构成分化的胞腔并不一定是轨道.

因为  $G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N}$  是保持所有领航者不动的自同构映射的集合, 所以  $G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N}$  在  $\Gamma$  上产生的轨道分化为  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$ , 于是有下面的命题成立:

**命题 4** 对于具有  $N$  个领航者  $l_1, l_2, \dots, l_N$  的系统 (5), 若  $G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N} > 1$ , 则系统 (5) 的信息拓扑  $\Gamma$  必存在非平凡松弛等价分化  $\Pi_{l_1, l_2, \dots, l_N}$ .

$G_{l_1} \cap G_{l_2} \cap \dots \cap G_{l_N}$  在信息拓扑  $\Gamma$  上产生的轨道分化, 本质上是将系统中的个体根据对称性进行了分类, 一个轨道就是由关于领航者对称的点组成的集合.

**注 8** 命题 4 只是一个充分条件而非充要条件. 当领航者的点稳定子群只含恒等置换时, 也可能存在非平凡的松弛的等价分化. 这说明对称性并不是产生松弛等价分化的唯一途径.

**例 8** 在图 7 中选取顶点 7 为领航者, 则顶点 7 的点稳定子群只含单位元, 即恒等置换, 但图中虚线所示分化是非平凡的松弛的等价分化.

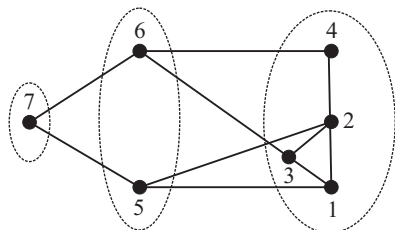


图 7 具有非平凡松弛等价分化的平凡拓扑

综上所述, 关于领航者对称的系统必然存在非平凡的松弛等价分化, 而松弛的等价分化却不一定是由对称性和等价分化产生的. 能够利用文献 [17] 中的 Proposition 5.8 和 Theorem 7.15 进行可控性判断的系统, 一定可以利用本文的定理 1 进行判断; 反之则不一定成立. 从这个意义上讲, 本文的定理 1 适用于一类范围更广的系统, 是对文献 [17] 中 Proposition 5.8 和 Theorem 7.15 的拓展.

## 6 结 论

本文利用松弛的等价分化刻画了一类由于地位等同造成的不可控系统. 通过引入置换群理论将对称性的概念推广到多领航者的情形, 并证明了利用松弛的等价分化所能刻画的范围包含了利用对称性和等价分化进行刻画的系统. 文中关于可控性的图论刻画结果, 给出了一种基于图论的判断系统可控性的简单方法, 同时提出了通过破坏地位等同性实现系统可控性的方法, 从而为系统设计提供了指导原则.

### 参考文献(References)

[1] Fax J A. Optimal and cooperative control of vehicle formations[D]. Pasadena: California Institute Technology, 2001.

[2] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.

[3] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.

[4] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents[C]. Proc of American Control Conf. Denver, 2003: 951-956.

[5] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-

delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

- [6] Bliman P A, Ferrari-Trecate G. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications[J]. Automatica, 2008, 44(8): 1985-1995.
- [7] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [8] Blondel V, Hendrickx J M, Olshevsky A, et al. Convergence in multi-agent coordination, consensus, and flocking[C]. Proc of IEEE Conf Decision and Control, 2005 and 2005 Eur Control Conf(CDC-ECC'05). Seville, 2005: 2996-3000.
- [9] Tanner H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections[C]. Proc of IEEE Conf Decision and Control. Atlantis, 2004: 2467-2472.
- [10] Rahmani A, Mesbahi M. On the controlled agreement problem[C]. Proc of American Control Conf. Minneapolis, 2006: 1376-1381.
- [11] Ji M, Muhammad A, Egerstedt M. Leader-based multi-agent coordination: Controllability and optimal control[C]. Proc of American Control Conf. Minneapolis, 2006: 1358-1363.
- [12] Ji M, Egerstedt M. A graph-theoretic characterization of controllability for multi-agent systems[C]. Proc of American Control Conf. New York, 2007: 4588-4593.
- [13] Rahmani A, Mesbahi M. Pulling the strings on agreement: Anchoring, controllability and graph automorphisms[C]. Proc of American Control Conf. New York, 2007: 2738-2743.
- [14] Ji Z J, Lin H, Lee T H. A graph theory based characterization of controllability for multi-agent systems with fixed topology[C]. Proc of IEEE Conf Decision and Control. Mexico, 2008: 5262-5267.
- [15] Jing F C, Wang L, Xie G M, et al. On the controllability of multiple dynamic agents with fixed topology[C]. Proc of American Control Conf. Hyatt Regency Riverfront, 2009: 5665-5670.
- [16] Wang L, Jing F C, Xie G M, et al. Controllability of multi-agent systems based on agreement protocols[J]. Science in China Series F: Information Science, 2009, 52(11): 2074-2088.
- [17] Rahmani A, Ji M, Mesbahi M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2009, 48(1): 162-186.