

文章编号: 1001-0920(2011)09-1421-04

基于核和面积的离散灰数预测模型

曾波^{1,2}, 刘思峰¹, 孟伟^{1,2}

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016; 2. 重庆工商大学 商务策划学院, 重庆 400067)

摘要: 灰色预测模型的既有研究成果均以实数或区间灰数为建模前提, 缺乏对以离散灰数为建模对象的灰色预测模型进行有效研究. 对此, 分别建立了离散灰数序列核及灰单元格面积的预测模型, 并在此基础上推导了基于离散灰数序列的灰色预测模型; 应用分析验证了该模型的有效性及其实用性. 离散灰数预测模型对丰富与完善灰色预测模型的理论体系、拓展灰色预测模型的应用范围具有积极的意义.

关键词: 灰色系统理论; 离散灰数预测模型; 灰单元层及灰单元格; 核和面积

中图分类号: N941.5

文献标识码: A

Prediction model of discrete grey number based on kernels and areas

ZENG Bo^{1,2}, LIU Si-feng¹, MENG Wei^{1,2}

(1. College of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. College of Business Planning, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China.

Correspondent: ZENG Bo, E-mail: zbljh2@163.com)

Abstract: The existing research results of grey prediction model are all based on real numbers or interval grey numbers, and it is short of an effective research of grey prediction models based on discrete grey numbers. Therefore, this paper respectively constructs grey prediction models based on the kernels and areas of grey cell grid, and then deduces a novel prediction model based on a discrete grey number sequence. An application analysis verifies the effectiveness and practicability of the proposed model. Prediction models of discrete grey number have a vital significance for enriching and perfecting the grey prediction model theory system, and extending the applied scope of grey prediction model.

Key words: grey system theory; prediction model of discrete grey number; grey cell layer and grid; kernel and area

1 引言

灰色预测模型主要针对现实世界中大量存在的灰色不确定性预测问题, 利用少量有效数据和灰色不确定性数据, 通过序列的累加生成, 揭示系统的未来发展趋势. 20多年来, 灰色预测模型无论在理论研究还是在应用领域, 都取得了长足的发展, 成功地解决了生产和生活中的大量实际问题^[1].

目前, 灰代数运算体系尚不完善, 灰数间的代数运算将导致结果灰度增加, 这增大了构建灰数预测模型的难度, 使得目前灰色预测模型的既有研究成果, 大部分以实数为建模前提, 研究的重心主要集中在如何提高灰色预测模型的模拟及预测精度等方面^[2-7], 而对以灰数为建模对象的灰色预测模型的构建机

理、模型性质等问题研究较少. 关于区间灰数预测模型的研究, 文献[8]提出了基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型, 通过计算灰数层的面积以及灰数层中位线中点的坐标, 在不损失已有灰数信息的前提下, 将区间灰数序列转换成实数序列, 然后建立了一种基于GM(1,1)的区间灰数预测模型; [9-10]对区间灰数预测模型的构造进行了深入的研究; [11]讨论了白化权函数已知条件下的区间灰数预测模型.

文献[8-11]中关于区间灰数预测模型的建模对象仅局限于具有连续性特征的区间灰数序列, 无法构建基于离散灰数的灰色预测模型. 本文通过离散灰数的核序列及灰单元格序列, 综合代数和几何的方法, 推导并构建基于离散灰数的灰色预测模型, 对丰富与

收稿日期: 2010-06-18; 修回日期: 2010-08-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(90924022, 70901041); 重庆市自然科学基金项目(CSTC2010BB2253); 南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金项目(BCXJ10-12); 重庆市教委人文社会科学研究重点项目(11SKH03); 教育部人文社会科学基金项目(09YJC630129, 10YJC630371); 博士后科学基金资助项目(20100481137).

作者简介: 曾波(1975-), 男, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论、复杂模型算法设计的研究; 刘思峰(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

完善灰色预测模型的理论体系、拓展灰色预测模型的应用范围具有积极意义。

2 基本概念

定义 1 在某一区间内取有限个或可数个值的灰数, 称为离散灰数^[12]; 将离散灰数中所有元素按从小到大顺序排列而得到的灰数称为标准离散灰数. 其数学形式为 $\otimes(t_i) \in \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}\}$, 其中 $x_{i,j+1} > x_{i,j}, j = 1, 2, \dots, n-1$; 由离散灰数所组成的序列称为离散灰数序列 $X(\otimes)$, 记 $X(\otimes) = (\otimes(t_1), \otimes(t_2), \dots, \otimes(t_m))$.

定义 2 若集合 $\{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}\}$ 中的元素为离散灰数 $\otimes(t_i)$ 的所有可能取值, 则称 $\tilde{\otimes}(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}$ 为离散灰数 $\otimes(t_i)$ 的核^[13].

定义 3 由 $X(\otimes) = (\otimes(t_1), \otimes(t_2), \dots, \otimes(t_m))$ 中每个灰元的核构成的序列, 称为 $X(\otimes)$ 的核序列, 记作 $X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}(t_1), \tilde{\otimes}(t_2), \dots, \tilde{\otimes}(t_m))$.

定义 4 将标准离散灰数序列 $X(\otimes)$ 中的每个灰元在二维直角坐标平面上进行映射, 分别顺次连接相邻灰数对应各离散点, 如图 1 所示. 其中, 相邻灰数对应离散点所连成的图形称为灰单元格; 由灰单元格从左至右组成的长条图形称为灰单元层. 由下至上, 灰单元层分别记作灰单元层 1, 灰单元层 2, \dots , 灰单元层 $n-1$; 灰单元层 $j(j = 1, 2, \dots, n-1)$ 中 $i(i = 1, 2, \dots, m-1)$ 个灰单元格, 记作 $u_{i,j}$ (端点 $x_{i,j}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j+1}, x_{i,j+1}$).

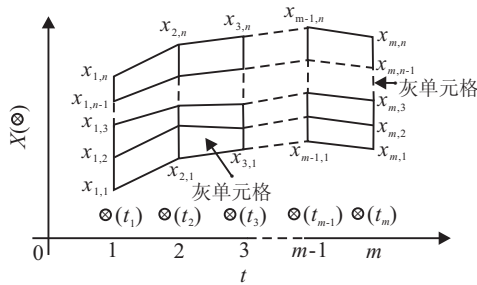


图 1 标准离散灰数序列的灰单元格及灰单元层

3 离散灰数预测模型的构建

3.1 基于核序列的 GM(1,1) 模型

根据定义 3, 离散灰数序列 $X(\otimes)$ 的核序列为 $X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}(t_1), \tilde{\otimes}(t_2), \dots, \tilde{\otimes}(t_m))$, 构建 $X(\tilde{\otimes})$ 的 GM(1,1) 模型, 得 $\hat{\tilde{\otimes}}(t_k) + az^{(1)}(k) = b$ 的时间响应序列为

$$\hat{\tilde{\otimes}}^{(1)}(t_{k+1}) = \left(\tilde{\otimes}(t_1) - \frac{b_0}{a_0} e^{-a_0 k} \right) + \frac{b_0}{a_0}, \quad (1)$$

其还原值为

$$\hat{\tilde{\otimes}}(t_{k+1}) = (1 - e^{-a_0}) \left(\tilde{\otimes}(t_1) - \frac{b_0}{a_0} \right) e^{-a_0 k}. \quad (2)$$

根据离散灰数核的定义, 可知

$$\begin{aligned} \hat{\otimes}(t_k) &= \frac{\hat{x}_{k,1} + \hat{x}_{k,2} + \dots + \hat{x}_{k,n}}{n} \Rightarrow \\ &\hat{x}_{k,1} + \hat{x}_{k,2} + \dots + \hat{x}_{k,n} = \\ &n(1 - e^{-a_0}) \times \left(\tilde{\otimes}(t_1) - \frac{b_0}{a_0} \right) e^{-a_0(k-1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

3.2 基于灰单元格面积序列的 GM(1,1) 模型

根据图 1 可知, 灰单元格 $u_{i,j}$ 为梯形, 其面积记作 $s_{i,j}$, 根据梯形的面积公式, 可得

$$s_{i,j} = \frac{(x_{i,j+1} - x_{i,j}) + (x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})}{2}. \quad (4)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, m-1, j = 1, 2, \dots, n-1$. 则灰单元层 j 中所有灰单元格的面积构成序列

$$S_j = (s_{1,j}, s_{2,j}, \dots, s_{m-1,j}).$$

对序列 S_j 建立 GM(1,1) 模型, 得时间响应序列为

$$\hat{s}_{k,j}^{(1)} = \left(s_{1,j} - \frac{b_j}{a_j} \right) e^{-a_j(k-1)} + \frac{b_j}{a_j}, \quad (5)$$

其还原值为

$$\hat{s}_{k,j} = (1 - e^{-a_j}) \left(s_{1,j} - \frac{b_j}{a_j} \right) e^{-a_j(k-1)}, \quad (6)$$

其中 a_j 和 b_j 为面积序列 S_j 的 GM(1,1) 模型参数.

根据式 (4), 有

$$\hat{s}_{k,j} = \frac{(\hat{x}_{k,j+1} - \hat{x}_{k,j}) + (\hat{x}_{k+1,j+1} - \hat{x}_{k+1,j})}{2} \Rightarrow$$

$$\hat{x}_{k+1,j+1} - \hat{x}_{k+1,j} = 2\hat{s}_{k,j} - (\hat{x}_{k,j+1} - \hat{x}_{k,j}),$$

当 $k = 1$ 时

$$\hat{x}_{2,j+1} - \hat{x}_{2,j} = 2\hat{s}_{1,j} - (\hat{x}_{1,j+1} - \hat{x}_{1,j});$$

当 $k = 2$ 时

$$\hat{x}_{3,j+1} - \hat{x}_{3,j} = 2\hat{s}_{2,j} - (\hat{x}_{2,j+1} - \hat{x}_{2,j});$$

\vdots

当 $k = p-1$ 时

$$\begin{aligned} \hat{x}_{p,j+1} - \hat{x}_{p,j} &= 2\hat{s}_{p-1,j} - (\hat{x}_{p-1,j+1} - \hat{x}_{p-1,j}) = \\ &2\hat{s}_{p-1,j} - 2\hat{s}_{p-2,j} + \dots + (-1)^p (x_{2,j+1} - x_{2,j}). \end{aligned} \quad (7)$$

根据式 (6) 有

$$\hat{s}_{p-1,j} = (1 - e^{-a_j}) \left(s_{1,j} - \frac{b_j}{a_j} \right) e^{-a_j(p-2)},$$

$$\hat{s}_{p-2,j} = (1 - e^{-a_j}) \left(s_{1,j} - \frac{b_j}{a_j} \right) e^{-a_j(p-3)},$$

\vdots

可知式 (7) 的前 $p-2$ 项是以 $q = -e^{-a_j}$ 为公比的等比数列, 根据等比数列的求和公式得

$$\begin{aligned} \hat{x}_{p,j+1} - \hat{x}_{p,j} &= \\ &2 \frac{(1 - e^{-a_j}) \left(s_{1,j} - \frac{b_j}{a_j} \right)}{1 + e^{-a_j}} \times \frac{e^{-a_j(p-2)} [1 - (-e^{-a_j})^{p-2}]}{1 + e^{-a_j}} + \\ &(-1)^p (x_{2,j+1} - x_{2,j}) = A_j. \end{aligned} \quad (8)$$

当 $j = 1$ 时

$$\hat{x}_{p,2} - \hat{x}_{p,1} = \frac{(1 - e^{a_1}) \left(s_{1,1} - \frac{b_1}{a_1} \right)}{1 + e^{a_1}} \times \frac{e^{-a_1(p-2)} [1 - (-e^{a_1})^{p-2}]}{1 + e^{a_1}} + (-1)^p (x_{2,2} - x_{2,1}) = A_1; \tag{9}$$

当 $j = 2$ 时

$$\hat{x}_{p,3} - \hat{x}_{p,2} = \frac{(1 - e^{a_2}) \left(s_{1,2} - \frac{b_2}{a_2} \right)}{1 + e^{a_2}} \times \frac{e^{-a_2(p-2)} [1 - (-e^{a_2})^{p-2}]}{1 + e^{a_2}} + (-1)^p (x_{2,3} - x_{2,2}) = A_2; \tag{10}$$

⋮

当 $j = n - 1$ 时

$$\hat{x}_{p,n} - \hat{x}_{p,n-1} = 2 \frac{(1 - e^{a_{n-1}}) \left(s_{1,n-1} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \right)}{1 + e^{a_{n-1}}} \times \frac{e^{-a_{n-1}(p-2)} [1 - (-e^{a_{n-1}})^{p-2}]}{1 + e^{a_{n-1}}} + (-1)^p (x_{2,n} - x_{2,n-1}) = A_{n-1}. \tag{11}$$

根据式(3), 有

$$\hat{x}_{p,1} + \hat{x}_{p,2} + \dots + \hat{x}_{p,n} = n(1 - e^{a_0}) \left(\tilde{\otimes}(t_1) - \frac{b_0}{a_0} \right) e^{-a_0(p-1)} = A_0. \tag{12}$$

3.3 离散灰数预测模型的构建

综合式(9)~(12), 得如下方程组:

$$\begin{cases} \hat{x}_{p,1} + \hat{x}_{p,2} + \dots + \hat{x}_{p,n} = A_0, \\ \hat{x}_{p,2} - \hat{x}_{p,1} = A_1, \\ \hat{x}_{p,3} - \hat{x}_{p,2} = A_2, \\ \vdots \\ \hat{x}_{p,n} - \hat{x}_{p,n-1} = A_{n-1}. \end{cases} \tag{13}$$

设矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p,1} \\ \hat{x}_{p,2} \\ \vdots \\ \hat{x}_{p,n} \end{bmatrix}.$$

则方程组(13)可以表达为 $B\hat{X} = Y$, 解 X 得

$$B\hat{X} = Y \Rightarrow B^T B\hat{X} = B^T Y \Rightarrow (B^T B)\hat{X} = B^T Y \Rightarrow (B^T B)^{-1}(B^T B)\hat{X} = (B^T B)^{-1}B^T Y \Rightarrow$$

$$\hat{X} = (B^T B)^{-1}B^T Y, \tag{14}$$

则称式(14)为基于核和面积的离散灰数预测模型.

4 应用分析

表1所示为某矿岩移动站3位观测员记录的2003~2009年某点的下沉值, 试建立该点下沉值的离散灰数动态模型, 并对该点2010年的下沉值进行预测.

表1 某点2003~2009年下沉值观测数据

年份	观测员1	观测员2	观测员3
2003	21	23	18
2004	30	28	32
2005	43	46	40
2006	50	52	47
2007	57	60	54
2008	70	67	72
2009	84	80	78

根据表1中的数据, 可得如下标准离散灰数:

$$\begin{aligned} \otimes(t_1) &\in \{18, 21, 23\}, \quad \otimes(t_2) \in \{28, 30, 32\}, \\ \otimes(t_3) &\in \{40, 43, 46\}, \quad \otimes(t_4) \in \{47, 50, 52\}, \\ \otimes(t_5) &\in \{54, 57, 60\}, \quad \otimes(t_6) \in \{67, 70, 72\}, \\ \otimes(t_7) &\in \{78, 80, 84\}. \end{aligned}$$

Step 1: 核序列及灰单元层面积序列的计算, 即

$$\begin{aligned} X(\hat{\otimes}) &= (30, 43, 49, 57, 69, 80), \\ S_1 &= (2.5, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 2.5), \\ S_2 &= (2.0, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 3.0). \end{aligned}$$

Step 2: GM(1,1)模型参数的计算, 即

$$\begin{aligned} a_0 &= -0.1600, \quad b_0 = 33.9679, \\ a_1 &= -0.0333, \quad b_1 = 3.2315, \\ a_2 &= -0.0400, \quad b_2 = 2.2683. \end{aligned}$$

Step 3: 离散灰数模型的构建.

由方程组(14)可得

$$\begin{cases} \hat{x}_{p,1} + \hat{x}_{p,2} + \hat{x}_{p,3} = 107.4764 \times e^{0.16(p-1)} = A_0, \\ \hat{x}_{p,2} - \hat{x}_{p,1} = 2 \times 0.0418 \times [1 - (-0.9672)^{p-2}] + 2 \times (-1)^p = A_1, \\ \hat{x}_{p,3} - \hat{x}_{p,2} = 2 \times 0.0403 \times [1 - (-0.9608)^{p-2}] + 2 \times (-1)^p = A_2, \\ \hat{x}_{p,1} = (A_0 - 2A_1 - A_2)/3, \\ \hat{x}_{p,2} = (A_0 + 2A_1 - A_2)/3, \\ \hat{x}_{p,3} = (A_0 + A_1 + 2A_2)/3. \end{cases} \Rightarrow$$

当 $p = 8$ 时, 可预测2010年的下沉值的离散灰数为 $\hat{x}_{8,1} = 107, \hat{x}_{8,2} = 110, \hat{x}_{8,3} = 112$, 即 $\otimes(t_8) \in \{107, 110, 112\}$.

5 结 论

现有的灰色预测模型及其衍生模型均建立在实数或区间灰数的基础之上,无法构建基于离散灰数的预测模型. 本文通过建立离散灰数序列核及灰单元格面积的GM(1,1)模型,推导并构建了基于离散灰数序列的灰色预测模型.

随着科学技术的发展,人类所涉及的系统越来越复杂,表征系统的信息灰度也越来越大,在这样的大背景下,研究以离散灰数为建模对象的灰色预测模型,将具有十分重要的意义. 本文仅讨论了组成离散灰数序列的各个灰元中,元素个数相等这一特殊情况. 如何有效地构建元素个数不等条件下的离散灰数预测模型,并研究模型的建模条件及误差检验方法,将是笔者下一步主要研究的方向.

参考文献(References)

- [1] Liu S F, Lin Y. Grey systems theory and applications[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010: 2-30.
- [2] 曾祥燕,肖新平. GM(1,1)模型的拓广方法与应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1092-1096.
(Zeng X Y, Xiao X P. Study on generalization for GM(1,1) model and its application[J]. Control and Decision, 2009, 24(7): 1092-1096.)
- [3] 张岐山. 提高灰色 GM(1,1)模型精度的微粒群方法[J]. 中国管理科学, 2007, 15(5): 126-129.
(Zhang Q S. Improving the precision of GM(1,1) model by using particle swarm optimization[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(5): 126-129.)
- [4] 黄继,种晓丽. 广义累加灰色预测控制模型及其优化算法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(6): 147-156.
(Huang J, Zhong X L. Generalized accumulation grey model and its optimal algorithm[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(6): 147-156.)
- [5] 曾波,刘思峰,方志耕,等. 灰色组合预测模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2009, 17(5): 150-155.
(Zeng B, Liu S F, Fang Z G, et al. Grey combined forecast models and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(5): 150-155.)
- [6] 米传民,刘思峰,吴正鹏,等. 基于反向累积法的强化缓冲算子序列的研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 352-355.
(Mi C M, Liu S F, Wu Z P, et al. Study on sequence of strengthening buffer operator based on back cumulative-sum method[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 352-355.)
- [7] 曾波,刘思峰. 基于灰色关联度的小样本预测模型[J]. 统计与信息论坛, 2009, 24(12): 22-26.
(Zeng B, Liu S F. Small sample prediction model based on grey incidence degree[J]. Statistics & Information Forum, 2009, 24(12): 22-26.)
- [8] 曾波,刘思峰. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1588.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model for interval grey number based on grey[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1585-1588.)
- [9] Zeng B, Liu S F, Xie N M. Prediction model of interval grey number based on DGM(1,1)[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(4): 598-603.
- [10] 曾波,刘思峰. 一种基于区间灰数几何特征的灰数预测模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 122-126.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model of interval grey number based on its geometrical characteristics[J]. J of Systems Engineering, 2011, 26(2): 122-126.)
- [11] 曾波,刘思峰,崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1815-1820.
(Zeng B, Liu S F, Cui J. Prediction model for interval grey number with known whitenization weight function[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1815-1820.)
- [12] 刘思峰,党耀国,方志耕,等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 3-4,164.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Gray system theories and its applications[M]. The 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 3-4,164.)
- [13] 刘思峰,方志耕,谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(2): 471-474.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the "Kernel" and the degree of greyiness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(2): 471-474.)