

文章编号: 1001-0920(2011)09-1327-06

一类时滞切换系统的输入-状态稳定性分析

方志明^{1,2}, 向峥嵘¹, 陈庆伟¹

(1. 南京理工大学 自动化学院, 南京 210094; 2. 江苏大学 电气信息工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 利用多 Lyapunov 函数方法、驻留时间法和 Gronwall-Bellman 不等式研究了一类时滞切换系统的输入-状态稳定性分析问题. 从系统输入-状态稳定定义出发, 给出了使得一类时滞切换系统输入-状态稳定的充分条件. 与已有的方法相比, 无需同时满足构造输入-状态稳定控制 Lyapunov 函数和所有子系统都是输入-状态稳定的条件, 为控制器的设计提供了便利. 最后, 通过算例仿真验证了所提出方法的可行性.

关键词: 切换系统; 时滞; 驻留时间; 输入-状态稳定

中图分类号: TP27

文献标识码: A

Input-to-state stability analysis for a class of switched systems with time delay

FANG Zhi-ming^{1,2}, XIANG Zheng-rong¹, CHEN Qing-wei¹

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China. Correspondent: FANG Zhi-ming, E-mail: fzm7889@hotmail.com)

Abstract: Based on the multi-Lyapunov function approach, dwell-time approach and Gronwall-Bellman inequality, the problem of input-to-state stability for a class of switched systems with time delay is studied. From the definition of input-to-state stability, sufficient conditions for a class of switched systems with time delay being input-to-state stable are got. Compared with the existing methods, the proposed method does not need constructing input-to-state stable control Lyapunov function, and input-to-state stability properties are not required for all subsystems, which is great convenient for design of subsystem's controller. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: switched systems; time delay; dwell time; input-to-state stability

1 引言

切换系统是一个由切换逻辑有机结合起来子系统的集合, 通过设计合适的切换, 可以提高系统的性能. 因此, 在许多实际工程系统中切换系统得到了广泛的应用, 例如交通管理、化工过程、制造系统等.

时滞效应广泛存在于各类工程系统中, 例如液压系统、气压系统、网络控制系统等. 时滞常导致控制系统动态过程振荡加剧, 甚至失稳. 时滞切换系统是一类常见的切换系统, 例如当时滞系统采用多控制器切换控制或时滞系统的参数随工作环境不同而显著变化时, 均可视为时滞切换系统. 时滞切换系统还可用于描述其他系统的动力学特性, 如具有遗传特性的系统、经济增长系统、流行病学模型等等.

近年来时滞切换系统稳定性的研究得到了越来越多的关注, 目前所采用的方法主要有公共 Lyapunov 函数法^[1]、多 Lyapunov 函数法^[2]、驻留时间法^[3]等. 在现有的切换系统稳定性研究中, 输入-状态稳定的研究还较少得到关注. 文献[4]针对所有子系统都是输入-状态稳定的情况, 给出了系统输入-状态稳定的充分条件. [5]对积分型和扰动衰减切换系统的输入-状态稳定进行了研究. [6]通过构造输入-状态控制 Lyapunov 函数来设计鲁棒稳定切换控制器. [7]研究了一类非线性切换系统的输入-状态稳定问题, [8]给出了基于平均驻留时间法的一类非线性切换系统的几种输入-状态特性, 但时滞切换系统输入-状态稳定的研究成果却鲜见报道.

收稿日期: 2010-06-20; 修回日期: 2010-08-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974027, 60975075); 教育部博士点基金项目(20070288022); 江苏省自然科学基金项目(BK2008404); 空间智能控制技术国家重点实验室项目.

作者简介: 方志明(1978—), 男, 博士生, 从事切换系统、混杂系统等研究; 陈庆伟(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制系统、数字交流伺服系统等研究.

对于切换系统输入-状态稳定的研究, 现有的方法一般是通过构造输入-状态稳定 Lyapunov 函数和(或)要求所有子系统都是输入-状态稳定的来解决切换系统的输入-状态稳定问题. 但通常来说, 即使给定一个所有子系统都是输入-状态稳定的切换系统, 要找到该系统的输入-状态稳定 Lyapunov 函数也是非常困难的.

本文针对一类时滞切换系统, 提出了一种基于平均驻留时间、Gronwall-Bellman 不等式和多 Lyapunov 函数的方法. 从系统输入-状态稳定定义出发, 无需构造输入-状态稳定 Lyapunov 函数, 无需子系统都是输入-状态稳定的, 甚至允许部分子系统可以不稳定, 输入控制信号只需满足上边界条件, 无需设计控制输入信号的具体结构, 只需设计一个合适的切换规律和驻留时间, 即可保证系统是输入-状态稳定的. 与已有方法相比, 限制条件更少, 设计更加容易, 实现起来也更加方便.

2 问题描述

考虑如下-类时滞切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g_\sigma(t, x) + m_\sigma(t - \theta(t), x) + r_\sigma(t, x)u_\sigma, \\ x(t) = \Phi(t), t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: g 和 m 为关于 t 的分段连续函数、关于 x 的局部 Lipschitz 函数; $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ 为切换信号, 表现为时间变量的分段常值函数, 为研究方便并不失一般性, 通常假设右连续, $\{1, 2, \dots, N\}$ 表示子系统顺序对应的序号集合, N 为实际子系统的总数目. 本文取 $\sigma = i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$; $x(t) \in R^n$ 为系统状态向量; $u(t) \in R^n$ 为系统输入, 是 t 的连续有界函数, 满足 $\|u_i(t)\| \leq \sup \|u_i(t)\|$; $r_i(t, x)$ 满足 $\|r_i(t, x)\| \leq \bar{r}_i$, t_0 为系统运行的初始时刻; 时滞 $\theta(t)$ 为满足条件

$$\begin{cases} 0 \leq \theta(t) \leq h, \\ \dot{\theta}(t) \leq \delta, \\ \theta(s) = 0, s \notin [t_0, t] \end{cases} \quad (2)$$

的时变连续函数, h 和 δ 为常数, 并且初始条件 $\Phi(t)$ 表示 $[-h, 0]$ 上的连续初始向量函数. 定义切换序列

$$t_1 < t_2 < \dots < t_p < \dots, \quad (3)$$

(t_1, t_2, \dots, t_k) 为一组切换时刻. $x(t, x_0, u_i)$ 代表切换系统(1)的状态轨迹从初始状态 $x(t_0) = x_0$ 出发, 并在输入控制信号 u_i 和切换序列(3)共同的作用下.

对于切换系统(1), 当输入控制量 $u_i = 0$ 时, 有如下的时滞自治切换系统:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = g_i(t, \bar{x}) + m_i(t - \theta(t), \bar{x}), \\ \bar{x}(t) = \bar{\Phi}(t), t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $g, m, i, \theta(t)$ 和切换序列的定义与系统(1)一致.

定义如下范数符号: $\|*\|$ 表示向量的 2-范数, $\|*\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数. 在给出主要结果之前, 先列出必要的定义与引理.

定义 1 如果连续函数 $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ 严格递增, 且 $\alpha(0) = 0$, 则 α 属于 \mathcal{K} 类函数; 如果 $a = \infty$, 且当 $r \rightarrow \infty$ 时 $\alpha(r) \rightarrow \infty$, 则 α 属于 \mathcal{K}_∞ 类函数^[9].

定义 2 对于连续函数 $\beta: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, 如果对于每个固定的 s , 映射 $\beta(r, s)$ 都是关于 r 的 \mathcal{K} 类函数, 并且对于每个固定的 r , 映射 $\beta(r, s)$ 是 s 的递减函数, 且当 $s \rightarrow \infty$ 时 $\beta(r, s) \rightarrow 0$, 则 β 属于 \mathcal{KL} 类函数^[9].

定义 3 对于系统 $\dot{x} = f(t, x, u)$, 如果存在一个 \mathcal{KL} 类函数 β 和一个 \mathcal{K} 类函数 γ , 使得对于任何初始状态 $x(t_0)$ 和有界输入 $u(t)$, 解 $x(t)$ 对于所有 $t \geq t_0$ 都存在, 且满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right), \quad (5)$$

则该系统是输入-状态稳定的^[10].

在大多数实际系统中, 子系统通常要运行一段时间才会切换到下一个子系统, 这一时间被称之为子系统的驻留时间.

定义 4 令 $\tau_j = t_j - t_{j-1}, j = 1, 2, \dots$, 如果存在 $\tau_d = \min \tau_j$, 则称 τ_d 为系统的最小驻留时间^[11].

定义 5 给定时间区域 $[t_0, t]$, 如果存在 $N_0 \geq 0$ 和 $\tau_a > 0$ 使得

$$N(t_0, t) \leq N_0 + \frac{t - t_0}{\tau_a} \quad (6)$$

成立, 则 τ_a 称为平均驻留时间. 其中: $N(t_0, t)$ 为子系统运行的实际总次数, N_0 为初始值^[12].

引理 1 令 $m: [a, b]$ 是连续的, $r: [a, b]$ 是连续非负的, 如果连续函数 $y: [a, b] \rightarrow R$ 在 $a \leq t \leq b$ 时满足^[9]

$$y(t) \leq m(t) + \int_a^t r(s)y(s) ds,$$

则在同一个区间上

$$y(t) \leq m(t) + \int_a^t m(s)r(s)\exp\left[\int_s^t r(z) dz\right] ds.$$

特殊地, 如果 $m(t) \equiv m$ 是一个常数, 则

$$y(t) \leq m \exp\left[\int_a^t r(z) dz\right].$$

另外, 如果 $r(t) \equiv r \geq 0$ 是一个常数, 则

$$y(t) \leq m \exp[r(t - a)].$$

如果切换系统(1)的状态轨迹满足不等式(5), 则切换系统(1)是输入-状态稳定的. 本文的目的就是要找到使得切换系统(1)输入-状态稳定的条件.

3 基于平均驻留时间的输入状态-稳定分析

首先, 考虑切换系统(4)所有子系统都是稳定子

系统的情况, 可以得到如下结果.

定理 1 对于切换系统 (1), $g_i(t, x)$ 和 $m_i(t, x)$ 的 Lipschitz 常数分别为 $l_{g,i}$, $l_{m,i}$; $r_i(t, x)$ 满足 $\|r_i(t, x)\| \leq \bar{r}_i$, $u_i(t)$ 满足 $\|u_i(t)\| \leq \sup \|u_i(t)\|$. 当切换系统 (1) 的输入为零时, 有自治切换系统 (4). 对于自治切换系统 (4) 的所有子系统, 如果存在 $V_i(\bar{x}) : \text{cl}\Omega_i^{\bar{x}} \rightarrow R$, 常数 $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ 和 $\varepsilon_i > 0$, 满足

$$\begin{cases} \alpha_i \|\bar{x}\|^2 \leq V_i(\bar{x}) \leq \beta_i \|\bar{x}\|^2, \\ \dot{V}_i(\bar{x}) \leq -\varepsilon_i \|\bar{x}\|^2. \end{cases} \quad (7)$$

令 $\mu = \max\{\sqrt{\beta_i/\alpha_i}\}$, $\lambda = \min\{\varepsilon_i/2\beta_i\}$, $0 < \lambda^* < \lambda$, 如果平均驻留时间满足

$$\tau_a \geq \ln \mu / \lambda^*, \quad (8)$$

则非线性切换系统 (1) 输入-状态稳定.

证明 对于切换系统 (1) 和 (4) 的任意子系统, 从起始点出发, 各子系统相应的状态轨迹为

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t (g_i(s, x) + m_i(s - \theta(s), x) + \\ &\quad r_i(s, x)u_i) ds, \\ \bar{x}(t) &= \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^t (g_i(s, \bar{x}) + m_i(s - \theta(s), \bar{x})) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $x(t_0) = x_0$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$. 则状态轨迹 $x(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|\bar{x}(t) + x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \\ &\quad \|\bar{x}(t)\| + \|x(t) - \bar{x}(t)\|. \end{aligned}$$

将式 (9) 代入, 可得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \|\bar{x}(t)\| + \|x_0 - \bar{x}_0\| &+ \int_{t_0}^t \|g_i(s, x) - g_i(s, \bar{x})\| ds + \\ \int_{t_0}^t \|m_i(s - \theta(s), x) - m_i(s - \theta(s), \bar{x})\| ds &+ \\ \int_{t_0}^t \|r_i(s, x)u_i(s)\| ds. \end{aligned}$$

由 Lipschitz 条件, 可得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \|\bar{x}(t)\| + \|x_0 - \bar{x}_0\| &+ \int_{t_0}^t l_{g,i} \|x(s) - \bar{x}(s)\| ds + \\ \int_{t_0}^t l_{m,i} \|x(s - \theta(s)) - \bar{x}(s - \theta(s))\| ds &+ \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| (t - t_0). \end{aligned}$$

应用引理 1 的 Gronwall-Bellman 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \|\bar{x}(t)\| + \|x_0 - \bar{x}_0\| + \bar{r}_i \sup \|u_i\| (t - t_0) &+ \\ \int_{t_0}^t l_{g,i} [\|x_0 - \bar{x}_0\| + \bar{r}_i \sup \|u_i\| (s - t_0)] \times & \\ \exp(l_{g,i}(t - s)) ds / 2 + \int_{t_0}^t l_{m,i} [\|x_0 - \bar{x}_0\| + & \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| (s - \theta(s) - t_0)] \exp(l_{m,i}(t + \theta(s) - s)) ds / 2. \end{aligned}$$

令 $x_0 = \bar{x}_0$, 对不等式右边进行分步积分, 经整理

后可得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \|\bar{x}(t)\| + \bar{r}_i \sup \|u_i\| (\exp(l_{g,i}(t - t_0)) - 1) / 2l_{g,i} &+ \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| (\exp(l_{m,i}(t + h - t_0)) - 1) / 2l_{m,i}. \end{aligned} \quad (10)$$

由式 (7), 可得

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((- \varepsilon_i / 2\beta_i)(t - t_0)) \|\bar{x}(t_0)\| &= \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((- \varepsilon_i / 2\beta_i)(t - t_0)) \|x(t_0)\|. \end{aligned} \quad (11)$$

将其代入式 (10), 可得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((- \varepsilon_i / 2\beta_i)(t - t_0)) \|x(t_0)\| &+ \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| (\exp(l_{g,i}(t - t_0)) - 1) / 2l_{g,i} &+ \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| (\exp(l_{m,i}(t + h - t_0)) - 1) / 2l_{m,i}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) &= \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((- \varepsilon_i / 2\beta_i)(t - t_0)) \|x(t_0)\|, \\ \gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_i \sup \|u_i\| (\exp(l_{g,i}(t - t_0)) - 1) / 2l_{g,i} &+ \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| (\exp(l_{m,i}(t + h - t_0)) - 1) / 2l_{m,i}, \end{aligned}$$

由定义 2 可知, $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ 是 \mathcal{KL} 类函数; 由定义 1 可知 $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|)$ 是 \mathcal{K} 类函数. 因此, 根据定义 3, 子系统是输入-状态稳定的. 然后考虑整个切换系统 (1) 的状态轨迹, 假设在 $[t_0, t]$ 时间段内, 共进行了 k 次切换, 则过程中实际运行的子系统有 $N(t_0, t) = k + 1$. 系统状态轨迹满足

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \sqrt{\beta_{k+1}/\alpha_{k+1}} \exp((- \varepsilon_{k+1} / 2\beta_{k+1})(t - t_k)) \|x(t_k)\| &+ \\ \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\| (\exp(l_{g,k+1}(t - t_k)) - & \\ 1) / 2l_{g,k+1} + \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\| (\exp(l_{m,k+1}(t + & \\ h - t_k)) - 1) / 2l_{m,k+1}. \end{aligned}$$

依次将 $\|x(t_k)\|$, $\|x(t_{k-1})\|$, \dots , $\|x(t_1)\|$ 代入, 有 $\mu = \max\{\sqrt{\beta_i/\alpha_i}\}$, $\lambda = \min\{\varepsilon_i/2\beta_i\}$, 经整理后可得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \mu^{k+1} \exp(-\lambda(t - t_0)) \|x(t_0)\| + \mu^k \exp(- & \\ \lambda(t - t_1)) (\bar{r}_1 \sup \|u_1\| (\exp(l_{g,1}(t_1 - t_0)) - 1) / 2l_{g,1} &+ \\ \bar{r}_1 \sup \|u_1\| (\exp(l_{m,1}(t_1 + h - t_0)) - 1) / 2l_{m,1}) + \dots &+ \\ \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\| (\exp(l_{g,k+1}(t - t_k)) - 1) / 2l_{g,k+1} &+ \\ \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\| (\exp(l_{m,k+1}(t + h - t_k)) - & \\ 1) / 2l_{m,k+1} + \mu \exp(-\lambda(t - t_k)) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\bar{r}_k \sup \|u_k\|(\exp(l_{g,k}(t_k - t_{k-1})) - 1)/2l_{g,k} + \\ & \bar{r}_k \sup \|u_k\|(\exp(l_{m,k}(t_k + h - t_{k-1})) - 1)/2l_{m,k}). \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \alpha_i \|\bar{x}\|^2 \leq V_i(\bar{x}) \leq \beta_i \|\bar{x}\|^2, \\ \dot{V}_i(\bar{x}) \leq -\varepsilon_i \|\bar{x}\|^2; \end{cases} \quad (14)$$

当 $i \in I^+$ 时, 满足

$$\begin{cases} \alpha_i \|\bar{x}\|^2 \leq V_i(\bar{x}) \leq \beta_i \|\bar{x}\|^2, \\ \dot{V}_i(\bar{x}) \leq \varepsilon_i \|\bar{x}\|^2. \end{cases} \quad (15)$$

根据定义 5, 有

$$k + 1 = N(t_0, t) \leq N_0 + (t - t_0)/\tau_a.$$

所以

$$\begin{aligned} \mu^{k+1} &= \mu^{N(t_0, t)} \leq \\ \mu^{N_0 + (t - t_0)/\tau_a} &= \mu^{N_0} \exp(\lambda^*(t - t_0)). \end{aligned}$$

将其代入式 (12), 得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \mu^{N_0} \exp(-(\lambda - \lambda^*)(t - t_0)) &\|x(t_0)\| + \mu^k \exp(- \\ \lambda(t - t_1)) &(\bar{r}_1 \sup \|u_1\|(\exp(l_{g,1}(t_1 - t_0)) - 1)/2l_{g,1} + \\ \bar{r}_1 \sup \|u_1\| &(\exp(l_{m,1}(t_1 + h - t_0)) - 1)/2l_{m,1}) + \cdots + \\ \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\| &(\exp(l_{g,k+1}(t - t_k)) - 1)/2l_{g,k+1} + \\ \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\| &(\exp(l_{m,k+1}(t + h - t_k)) - 1)/ \\ 2l_{m,k+1} + \mu \exp(-\lambda(t - t_k)) &\times \\ (\bar{r}_k \sup \|u_k\| &(\exp(l_{g,k}(t_k - t_{k-1})) - 1)/2l_{g,k} + \\ \bar{r}_k \sup \|u_k\| &(\exp(l_{m,k}(t_k + h - t_{k-1})) - 1)/2l_{m,k}). \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\begin{aligned} \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) &= \\ \mu^{N_0} \exp(-(\lambda - \lambda^*)(t - t_0)) &\|x(t_0)\|, \end{aligned}$$

由定义 2 可知, $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ 是 \mathcal{KL} 类函数; 令式 (13) 不等号右边除去 $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ 的部分为 $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|)$, 由定义 1 可知 $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|)$ 是 \mathcal{K} 类函数. 因此, 根据定义 3, 切换系统 (1) 是输入-状态稳定的. \square

注 1 由定理 1 的证明过程可以看出, 定理 1 是通过确保自治切换系统 (4) 的所有子系统都是指数稳定的, 进而保证切换系统 (1) 的所有子系统都是输入-状态稳定的, 从而实现切换系统 (1) 是输入-状态稳定的.

如果自治切换系统 (4) 的所有子系统不都是指数稳定的, 也就是说切换系统 (1) 的所有子系统不都是输入-状态稳定的, 是否还能保证整个切换系统 (1) 是输入-状态稳定的. 经进一步研究, 有如下结果:

定理 2 对于切换系统 (1), $g_i(t, x)$ 和 $m_i(t, x)$ 的 Lipschitz 常数分别为 $l_{g,i}$, $l_{m,i}$; $r_i(t, x)$ 满足 $\|r_i(t, x)\| \leq \bar{r}_i$, $u_i(t)$ 满足 $\|u_i(t)\| \leq \sup \|u_i(t)\|$. 当切换系统 (1) 的输入为零时, 有自治切换系统 (4). 对于自治切换系统 (4) 的所有子系统, 如果存在 $V_i(\bar{x}) : \text{cl}\Omega_i^{\bar{x}} \rightarrow R$, 常数 $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ 和 $\varepsilon_i > 0$, 当 $i \in I^-$ 时, 满足

其中: I^- 表示稳定子系统的集合, I^+ 表示不稳定子系统的集合, $T^-(t_0, t)$ 表示在 $[t_0, t]$ 时间段内系统在所有 $i \in I^-$ 对应的子系统运动的总时间, $T^+(t_0, t)$ 表示在 $[t_0, t]$ 时间段内系统在所有 $i \in I^+$ 对应的子系统运动的总时间. 令 $\mu = \max_{i \in I^-} \{\sqrt{\beta_i/\alpha_i}\}$, $\lambda^- = \min_{i \in I^-} \{\varepsilon_i/2\beta_i\}$, $\lambda^+ = \max_{i \in I^+} \{\varepsilon_i/2\alpha_i\}$, $0 < \lambda^* < \lambda^-$, 如果切换规则满足

$$T^-(t_0, t)/T^+(t_0, t) \geq (\lambda^+ + \lambda^*)/(\lambda^- - \lambda^*), \quad (16)$$

平均驻留时间满足

$$\tau_a \geq \ln \bar{\mu}/\lambda^*, \quad (17)$$

则非线性切换系统 (1) 输入-状态稳定.

证明 首先对于切换系统 (1) 的所有子系统, 与定理 1 的推导过程相似, 可以得到

$$\|x(t)\| \leq \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \|\bar{x}(t)\| + \bar{r}_i \sup \|u_i\|(\exp(l_{g,i}(t - t_0)) - 1)/2l_{g,i} + \\ & \bar{r}_i \sup \|u_i\|(\exp(l_{m,i}(t + h - t_0)) - 1)/2l_{m,i}. \end{aligned} \quad (19)$$

考虑 $i \in I^-$ 的部分子系统, 与定理 1 中推导过程一样, 可以得到

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((-\varepsilon_i/2\beta_i)(t - t_0)) &\|x(t_0)\| + \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| &(\exp(l_{g,i}(t - t_0)) - 1)/2l_{g,i} + \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| &(\exp(l_{m,i}(t + h - t_0)) - 1)/2l_{m,i}. \end{aligned}$$

显然 $i \in I^-$ 的部分子系统都是输入-状态稳定的.

考虑 $i \in I^+$ 的部分子系统, 根据式 (15), 有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((\varepsilon_i/2\alpha_i)(t - t_0)) &\|\bar{x}(t_0)\| = \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((\varepsilon_i/2\alpha_i)(t - t_0)) &\|x(t_0)\|. \end{aligned} \quad (20)$$

将其代入式 (18), 可得

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \\ \sqrt{\beta_i/\alpha_i} \exp((\varepsilon_i/2\alpha_i)(t - t_0)) &\|x(t_0)\| + \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| &(\exp(l_{g,i}(t - t_0)) - 1)/2l_{g,i} + \\ \bar{r}_i \sup \|u_i\| &(\exp(l_{m,i}(t + h - t_0)) - 1)/2l_{m,i}. \end{aligned}$$

显然 $i \in I^+$ 的部分子系统都不是输入-状态稳定的, 甚至是不稳定的. 然后考虑整个切换系统 (1) 的状态轨迹, 假设在 $[t_0, t]$ 时间段内, 共进行了 k 次切换, 则过程中实际运行的子系统有 $N(t_0, t) = k + 1$. 根据

式(16), 可得

$$\lambda^+ T^+(t_0, t) - \lambda^- T^-(t_0, t) \leq -\lambda^*(T^+(t_0, t) + T^-(t_0, t)) = -\lambda^*(t - t_0). \quad (21)$$

与定理 1 过程类似, 经整理后, 系统状态轨迹满足

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq & \mu^{k+1} \exp(-\lambda^*(t - t_0)) \|x(t_0)\| + \mu^k \exp_1(\lambda^-, \\ & \lambda^+, t)(\bar{r}_1 \sup \|u_1\|(\exp(l_{g,1}(t_1 - t_0)) - 1)/2l_{g,1} + \\ & \bar{r}_1 \sup \|u_1\|(\exp(l_{m,1}(t_1 + h - t_0)) - 1)/2l_{m,1}) + \dots + \\ & \mu \exp_k(\lambda^-, \lambda^+, t)(\bar{r}_k \sup \|u_k\|(\exp(l_{g,k}(t_k - t_{k-1})) - \\ & 1)/2l_{g,k} + \bar{r}_k \sup \|u_k\|(\exp(l_{m,k}(t_k + h - t_{k-1})) - \\ & 1)/2l_{m,k}) + \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\|(\exp(l_{g,k+1}(t - t_k)) - \\ & 1)/2l_{g,k+1} + \bar{r}_{k+1} \sup \|u_{k+1}\|(\exp(l_{m,k+1}(t + h - \\ & t_k)) - 1)/2l_{m,k+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $\exp_j(\lambda^-, \lambda^+, t)$ 是以 e 为底数关于 λ^-, λ^+, t 的指数函数. 令 $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) = \mu^{k+1} \exp(-\lambda^*(t - t_0)) \|x(t_0)\|$, 由定义 2 可知 $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ 是 \mathcal{KL} 类函数; 令式(21)不等号右边除去 $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ 的部分为 $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|)$, 由定义 1 可知 $\gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|)$ 是 \mathcal{K} 类函数. 因此, 根据定义 3, 切换系统(1)是输入-状态稳定的. \square

注 2 当切换系统(1)的部分子系统不稳定时, 通过选择合适的切换规则和驻留时间, 依然可以保证整个系统是输入-状态稳定的, 同时无需考虑切换时刻 Lyapunov 函数值的变化情况.

4 状态反馈控制器的设计

切换系统各子系统的状态反馈控制器一般为如下形式:

$$u_i(t) = F_i x(t), \quad (23)$$

对于状态反馈矩阵 F_i , 通常的方法一般是通过求解一组线性矩阵不等式来得到一组固定的 F_i , 不管子系统在什么时间段运行, 也不管运行多少次, F_i 始终是固定不变的. 本节基于第 3 节的结论设计一类时变的状态反馈矩阵 F_i , 它会随着时间的变化而变化, 即使同一个子系统, 在不同的时间 F_i 也是不同的, 这样更能适应系统状态的变化.

设计如下子系统状态反馈控制器:

$$u_i(t) = F_i(t)x(t), \quad (24)$$

对式(23)两边同时取范数, 有

$$\|u_i(t)\| = \|F_i(t)x(t)\|.$$

根据范数的相容性, 有

$$\|u_i(t)\| \leq \|F_i(t)\|_F \|x(t)\|.$$

根据输入有界条件 $\|u_i(t)\| \leq \sup \|u_i(t)\|$, 可得

$$\|u_i(t)\| \leq \|F_i(t)\|_F \|x(t)\| \leq \sup \|u_i(t)\|,$$

则

$$\|F_i(t)\|_F \leq \sup \|u_i(t)\|/\|x(t)\|. \quad (25)$$

当系统满足定理 1 和定理 2 的条件时, 将 $\|x(t)\|$ 代入式(24), 即可得到当前 $\|F_i(t)\|_F$ 的最大值, 在整个控制过程中, 只需小于这个最大值, 则控制输入就是有界的, 从而保证系统是输入-状态稳定的. F_i 的具体结构, 可根据对系统的具体的性能要求来设计, 大大方便了控制器的设计.

5 算例仿真

例 1 考虑如下由两个子系统所组成的时滞切换系统:

子系统 1

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix} x(t - \\ & \theta(t)) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_1(t); \end{aligned}$$

子系统 2

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix} x(t - \\ & \theta(t)) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_2(t). \end{aligned}$$

其中: $0 \leq \theta(t) \leq 0.5$, $x_0 = (4, -3)$, $\sup \|u_i(t)\| = 1$. 为简化起见, 取 $\|F_i(t)\|_F \leq \sup \|u_i(t)\|/100 \|x(t)\|$.

可得 $\alpha_1 = 0.6479$, $\beta_1 = 2.9030$, $\varepsilon_1 = 1.3139$, $\alpha_2 = 0.6530$, $\beta_2 = 2.9121$, $\varepsilon_2 = 0.5737$. 有 $\mu = \max\{\sqrt{\beta_i/\alpha_i}\} = 2.1167$, $\lambda = \min\{\varepsilon_i/2\beta_i\} = 0.0985$, $\ln \mu/\lambda = 7.6128$.

取 $\tau_a = 8 \geq 7.6128$, 在 $t_1 = 1$ 时由子系统 1 切换到子系统 2, 则系统输入-状态稳定, 如图 1 所示.

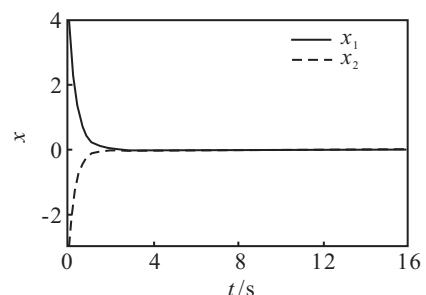


图 1 例 1 的状态轨迹图

例 2 考虑如下由两个子系统所组成的时滞切换系统:

子系统 1

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix} x(t -$$

$$\theta(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_1(t);$$

子系统 2

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} x(t-$$

$$\theta(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_2(t).$$

其中: $0 \leq \theta(t) \leq 0.5$, $x_0 = (4, -3)$, $\sup \|u_i(t)\| = 1$. 为简化起见, 取 $\|F_i(t)\|_F \leq \sup \|u_i(t)\|/10\|x(t)\|$. 子系统 1 不稳定, 子系统 2 稳定.

可得 $\alpha_1 = 1.6972$, $\beta_1 = 5.3028$, $\varepsilon_1 = 13.5776$, $\alpha_2 = 2.0000$, $\beta_2 = 2.0000$, $\varepsilon_2 = 4.0000$. 有 $\mu = \max\{\sqrt{\beta_i/\alpha_i}\} = 1.7676$, $\lambda^+ = \varepsilon_1/2\alpha_1 = 4.0000$, $\lambda^- = \varepsilon_2/2\beta_2 = 1.0000$. 取 $\lambda^* = 0.5$, $\ln \mu/\lambda^* = 1.1392$, $T^-(t_0, t)/T^+(t_0, t) \geq (\lambda^+ + \lambda^*)/(\lambda^- - \lambda^*) = 9$.

取 $\tau_a = 2 \geq 1.1392$, 在 $t_1 = 1$ 时由子系统 1 切换到子系统 2, 则系统输入-状态稳定, 如图 2 所示.

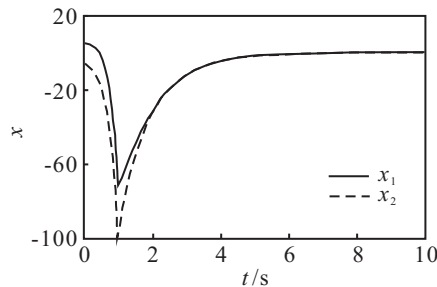


图 2 例 2 的状态轨迹图

6 结 论

本文对于一类时滞切换系统, 分为两种情况讨论: 一种是所有子系统都是输入-状态稳定的; 另一种是部分子系统是输入-状态稳定的, 还有一部分子系统是不稳定的. 分别讨论了其输入-状态稳定的条件, 利用多 Lyapunov 函数的方法保证了稳定子系统的稳定性, 利用平均驻留时间法和 Gronwall-Bellman 不等式, 从系统输入-状态稳定的定义出发, 推导出了使得一类时滞切换系统输入-状态稳定的充分条件. 与已有方法相比, 无需所有子系统都是输入-状态稳定的, 允许部分子系统不是输入-状态稳定的, 甚至可以是 不稳定的; 无需构造输入-状态稳定控制 Lyapunov 函数; 各子系统输入信号只需满足相应的上界条件, 再通过设计合适的切换规律, 即可实现整个系统的输入-状态稳定, 方便了子系统控制器的设计. 最后通过仿真算例验证了本文所提出方法的可行性.

参考文献(References)

- [1] Phat V N. Robust stability and stabilizability of uncertain linear hybrid systems with state delays[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2005, 52(2): 94-98.
- [2] 聂宏, 王明顺, 赵军. 线性不确定时滞系统混杂反馈鲁棒 H_∞ 镇定[J]. 控制与决策, 2004, 19(6): 642-646. (Nie H, Wang M S, Zhao J. Hybrid feedback H_∞ robust stabilization for a class of uncertain linear time-delay systems[J]. Control and Decision, 2004, 19(6): 642-646.)
- [3] Sun X M, Dimirovski G M, Zhao J, et al. Exponential stability for switched delay systems based on average dwell time technique and Lyapunov function method[C]. Proc of the American Control Conf. Minneapolis, 2006: 1539-1543.
- [4] Zhao J, Nie H. Sufficient conditions for input-to-state stability of switched systems[J]. Acta Automatic Sinica, 2003, 29(2): 252-257.
- [5] Liberson D. ISS and integral-ISS disturbance attenuation with bounded controls[C]. Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix: IEEE Press, 1999: 2501-2506
- [6] Angeli D, Mosca E. Lyapunov based switching supervisory control of nonlinear uncertain systems[C]. Proc of American Control Conf. Arlington, 2001: 967-972.
- [7] Xie W X, Wen C Y, Li Z G. Input-to-state stabilization of switched nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(7): 1111-1116.
- [8] Vu L, Chatterjee D, Liberzon D. Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control[J]. Automatica, 2007, 43(4): 639-646.
- [9] Khalil H K. Nonlinear Systems[M]. 3rd ed. Pearson Education: Prentice Hall Press, 2002: 183-198.
- [10] Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(4): 435-443.
- [11] Morse A S. Supervisory control of families of linear set-point controllers, Part 1: Exact matching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(10): 1413-1431.
- [12] Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time[C]. Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix: IEEE Press, 1999: 2655-2660.