

文章编号: 1001-0920(2011)11-1627-05

一种基于粒子群优化的非线性系统辨识方法

李秀英, 韩志刚

(黑龙江省普通高等学校电子工程重点实验室, 哈尔滨 150080)

摘要: 针对单入单出离散时间非线性动态系统提出一种辨识方法. 该方法采用带误差修正的改进泛模型作为非线性系统的结构模型, 模型中的时变特征参量及误差修正系数采用粒子群 (PSO) 算法优化, 优化后的模型可以逼近非线性系统. 该方法简单、易于实现. 通过对 Box-Jenkins 煤气炉数据等非线性被控对象的仿真研究及对模型的分析, 表明了所提出算法的有效性.

关键词: 非线性系统辨识; 粒子群优化; 特征参量; 改进泛模型

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Identification approach for nonlinear systems based on particle swarm optimization

LI Xiu-ying, HAN Zhi-gang

(Key Laboratory of Electronic Engineering, College of Heilongjiang Province, Harbin 150080, China. Correspondent: LI Xiu-ying, E-mail: xiuxiu4480@sina.com)

Abstract: An identification approach is proposed for a single-input and single-output nonlinear dynamic system of discrete time. In this method, the improved universal model with error correcting is taken as the structure model of the system, and the particle swarm optimization(PSO) algorithm is adopted to optimize the time-varying characteristic parameter and the error correcting coefficient. The model after optimization can approximate the nonlinear system. This method is simple and easy to implement. The simulation results of Box-Jenkins gas furnace data etc. and the analysis of the model show the effectiveness of the method.

Key words: nonlinear system identification; particle swarm optimization; characteristic parameter; improved universal model

1 引言

非线性系统辨识作为非线性系统研究领域的一个重要分支, 近 20 年来得到了迅速发展^[1]. 随着智能控制与智能优化理论不断成熟, 产生了许多基于神经网络^[2]、模糊逻辑^[3]、遗传算法^[4]、粒子群优化算法^[5-7]等知识的新型非线性系统辨识方法, 为非线性系统辨识开辟了一条新途径.

所谓系统辨识就是从一组模型中选择一个模型, 按照某种准则使之能更好地拟合由系统的输入输出观测数据体现出的实际系统的动态或静态特性. 如何确定模型的结构以及如何估计模型的参数是非线性系统辨识中最重要的问题. 利用神经网络、模糊逻辑等辨识非线性系统, 就是利用其具有能够以任意精度逼近非线性映射的特性. 然而, 如何选择神经

网络的拓扑结构, 如何确定模糊 T-S 模型中前件划分等问题仍没有统一的方法. 文献 [8] 提出了一种非线性系统多项式逼近的建模方法来确定模型的结构, 但算法过于繁琐. [9] 将非线性系统的结构划分为若干个典型的元模型, 具有一定的局限性. [10] 基于 Hammerstein 模型提出了一种非线性系统辨识方法, 但参数辨识涉及到矩阵特征值分解, 比较复杂.

粒子群优化算法 (PSO) 是由美国 Kenney 等人于 1995 年提出的基于对鸟群捕食行为模拟的演化算法^[11]. 该算法与遗传算法类似, 是一种基于迭代的优化工具. 由于遗传算法、粒子群优化算法等具有全局、并行搜索的特性, 可以用来辨识非线性系统模型的参数. 但与遗传算法相比, PSO 的优点在于流程简单易实现, 而且性能良好, 短短几年时间便获得了快速发

收稿日期: 2010-06-25; 修回日期: 2010-09-02.

基金项目: 黑龙江省普通高等学校电子工程重点实验室基金项目(DZZD20100023).

作者简介: 李秀英(1978—), 女, 讲师, 博士生, 从事非线性系统的建模与控制等研究; 韩志刚(1934—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制、无模型控制理论与应用等研究.

展,在函数优化、人工神经网络训练、模糊系统控制等诸多领域得到广泛应用^[12].

本文基于文献[13]中的泛模型概念,提出一种非线性系统辨识方法.该方法首先对泛模型加以改进,得到带误差修正的泛模型;然后将改进后的泛模型作为非线性系统的模型结构来逼近非线性系统,模型中的未知参数采用粒子群算法进行优化.通过对 Box-Jenkins 煤气炉数据的仿真以及一般的非线性系统的仿真结果,表明了所提出算法的有效性.

2 非线性系统辨识的新方法

2.1 结构模型——带误差修正的泛模型

单入单出离散时间非线性动态系统可描述为

$$y(k+1) = f(y(k), \dots, y(k-n_y), u(k), \dots, u(k-n_u)). \quad (1)$$

其中: $f(\cdot)$ 为任意非线性函数, $y(k)$ 和 $u(k)$ 分别表示系统的输出和输入, n_y 和 n_u 为阶次.

文献[13]指出,在输入输出等价的意义下,非线性系统(1)可描述为

$$y(k+1) = y(k) + \varphi(k)[u(k) - u(k-1)]. \quad (2)$$

模型中的 $\varphi(k)$ 称为特征参量,必须在线实时地进行估计(如最小二乘法),这一点是该模型可用的先决条件.当系统在设定值处处于稳定状态时, $\varphi(k)$ 事实上是 $y(k)$ 关于 $u(k-1)$ 的梯度(或是它的某种近似),故也可称之为 $y(k)$ 关于 $u(k-1)$ 的伪梯度.从理论上可以证明,很大一类非线性复杂系统都能在输入-输出等价的意义下用式(2)的模型描述.模型(2)具有一定的广泛性,因此称为泛模型.

本文在泛模型概念的基础上,借鉴预测控制中的误差反馈修正思想,提出带误差修正的泛模型.对于非线性系统(1),给出如下假设:

假设 1 系统(1)是输出可控的,即对某一致有界的期望输出信号 $y_0(k)$,存在一致有界的可行控制输入信号 $u(k)$,使得该系统在此控制输入信号的作用下其输出 $y(k)$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时,有 $y(k) \rightarrow y_0(k)$.

假设 2 系统(1)是广义 Lipschitz 的,即满足对任意的 k 和 $\Delta u(k)$,有

$$|\Delta y(k+1)| \leq b |\Delta u(k)|.$$

其中: b 为常数, $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$, $\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k)$.

类似于文献[13],可以给出如下定理:

定理 1 对于任意的一步时滞非线性动态系统,若满足假设 1 和假设 2,则当 $u(k) \neq u(k-1)$,即 $\Delta u(k) \neq 0$ 时,一定存在一个伪梯度向量 $\varphi(k)$,且 $|\varphi(k)| < b$,使得非线性系统(1)的动态模型可以线

性化表示为

$$y(k+1) = y(k) + \varphi(k)[u(k) - u(k-1)] + he(k). \quad (3)$$

其中: $\varphi(k)$ 为特征参量,在非线情形它是时变的; $e(k) = y_0(k) - y(k)$ 为 k 时刻模型的输出误差; h 为误差修正系数.

特征参量 $\varphi(k)$ 是时变的,因此可以建立一个 AR 模型对 $\varphi(k)$ 进行估计,即

$$\hat{\varphi}(k) = \theta_1 \hat{\varphi}(k-1) + \theta_2 \hat{\varphi}(k-2) + \dots + \theta_p \hat{\varphi}(k-p) = \Phi^T \Theta. \quad (4)$$

其中: $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T$ 为待定系数, p 为适当的阶数.则 $k+1$ 时刻系统的预测输出为

$$\hat{y}(k+1) = \hat{y}(k) + \hat{\varphi}(k) \Delta u(k) + he(k).$$

将式(3)作为非线性系统的结构模型,当 $\Delta u(k)$ 和 $y_0(k+1)$ 均已知时,非线性系统辨识问题便转化为如何确定特征参量 $\varphi(k) = \hat{\varphi}(k)$ 和误差修正系数 h ,使得系统相应的输出为 $\hat{y}(k+1)$,并满足 $\sum_{k=1}^N [y_0(k+1) - \hat{y}(k+1)]^2$ 为最小.

基于改进泛模型的辨识器原理如图 1 所示.

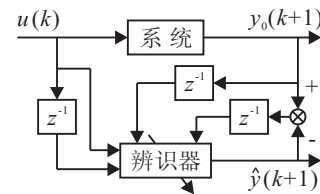


图 1 辨识器结构

2.2 参数优化——粒子群优化算法

自然界中的群集行为是目前复杂性科学研究的一个焦点.群集中的每个个体只利用其自身及其同伴的信息指导其行为,以一定速度向群集中心运动,使整个群集具有适应性、鲁棒性、分散性和自组织性等良好的性质.标准粒子群算法(PSO)就是受到自然界群集行为的启发而产生的.每个粒子具有位置和速度两个特征,算法的核心思想是通过跟踪粒子的个体极值和种群的全局极值来更新粒子的速度和位置,当达到终止条件时,当前的全局最优解即为该问题的最优解.设在第 k 次迭代时,第 i 个粒子的位置和速度矢量分别为

$$z_i^k = (z_{i1}^k, z_{i2}^k, \dots, z_{iD}^k), v_i^k = (v_{i1}^k, v_{i2}^k, \dots, v_{iD}^k).$$

此时,粒子的个体极值与种群的全局极值分别为

$$p_i^k = (p_{i1}^k, p_{i2}^k, \dots, p_{iD}^k), p_g^k = (p_{g1}^k, p_{g2}^k, \dots, p_{gD}^k),$$

则第 $k+1$ 次迭代中,粒子根据如下公式更新速度和位置:

$$v_{id}^{k+1} = wv_{id}^k + c_1r_1(p_{id}^k - z_{id}^k) + c_2r_2(p_{gd}^k - z_{id}^k), \quad (5)$$

$$z_{id}^{k+1} = z_{id}^k + v_{id}^{k+1}, d = 1, 2, \dots, D. \quad (6)$$

其中: D 为目标搜索空间维数, $i = 1, 2, \dots, m$, m 也被称为群体规模, 通常取 $20 \sim 40$; w 为惯性权重; c_1 和 c_2 为 2 个学习因子; r_1 和 r_2 为 2 个 $[0, 1]$ 之间均匀分布的随机数.

用粒子群算法对模型中的未知参数进行优化的基本步骤如下:

Step 1: 初始化. 确定粒子向量 $x = (\theta_1, \dots, \theta_p, h)$ 以及种群规模 m , 在可行域中随机产生 m 个粒子的初始位置和初始速度. 根据 Clerk 等人^[14]提出的 PSO 收敛因子模型, 设定 $c_1 = c_2 = 1.4962$, $w = 0.7298$. Clerk 从数学上证明了采用该迭代公式可以获得比原始 PSO 的迭代公式更好的收敛性, 实验结果也支持这一结论. 本文的仿真研究将使用这组参数.

Step 2: 评价粒子群. 选取适应值函数为

$$\sum_{k=1}^N [y_0(k) - \hat{y}(k)]^2 + \sum_{k=1}^N [\varphi(k) - \varphi(k-1)]^2,$$

根据适应值函数计算每个粒子的适应值.

Step 3: 根据粒子群当前状态更新粒子的个体极值 p_i 和种群的全局极值 p_g .

Step 4: 利用式 (5) 更新粒子的速度, 利用式 (6) 更新粒子的位置.

Step 5: 如果达到最大迭代次数, 则寻优结束; 否则, $t = t + 1$, 转 Step 2.

3 仿真研究

例 1 Box-Jenkins 煤气炉数据^[15]. Box-Jenkins 煤气炉是一种典型的非线性系统建模常用的仿真验证例子. 著名的 Box-Jenkins 数据集包含 296 组输入输出观测数据, 其中输入 $u(k)$ 为进入煤气炉的煤气流量, 输出 $y(k)$ 为释放出的煤气中的 CO_2 浓度. 由于该过程是动态变化的, 影响系统输出的变量的选取方法有很多. 研究模糊建模的学者大都用此数据作为验证自己所提出算法的仿真例子, 其中文献 [8] 对这一实例比较了多种研究结果.

本文选用式 (3) 所示的带误差修正的泛模型作为该非线性系统的结构模型, 其中的时变参数向量 $\varphi(k)$ 用 1 个 4 阶的 AR 模型进行预报, 则采用粒子群算法经 300 代迭代后得到未知参数的最优值, 即得到该非线性系统的模型为

$$\begin{aligned} y(k) = & y(k-1) + \hat{\varphi}(k)\Delta u(k-1) + \\ & h[y_0(k-1) - y(k-1)] = \\ & y(k-1) + \hat{\varphi}(k)\Delta u(k-1) + \\ & 1.7260[y_0(k-1) - y(k-1)], \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\varphi(k)$ 由如下的 4 阶 AR 模型预报:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) = & \theta_1\hat{\varphi}(k-1) + \theta_2\hat{\varphi}(k-2) + \dots + \theta_4\hat{\varphi}(k-4) = \\ & 0.3691\hat{\varphi}(k-1) - 0.1530\hat{\varphi}(k-2) - \\ & 0.1950\hat{\varphi}(k-3) - 0.3524\hat{\varphi}(k-4). \end{aligned}$$

用模型 (7) 辨识 Box-Jenkins 煤气炉的仿真结果如图 2 所示. 其中实线为系统实际输出, 虚线为模型输出. 误差如图 3 所示, 均方误差为 0.4957.

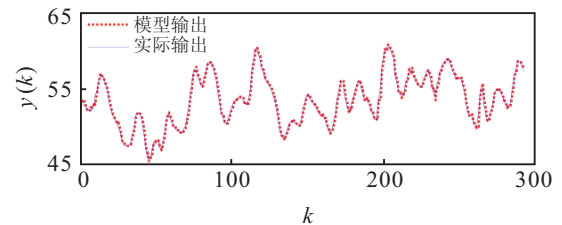


图 2 例 1 的模型输出与实际输出的比较

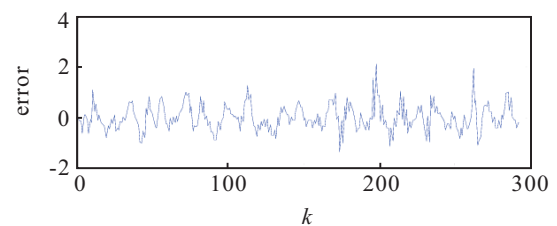


图 3 例 1 的建模误差

例 2 用文献 [16] 中的非线性模型产生 1000 对数据, 前 500 对数据用来建模, 后 500 对数据用来验证辨识结果. 则有

$$\begin{aligned} x(k) = & (x(k-1)x(k-2) + x(k-1)x(k-3) + \\ & x(k-2)x(k-3))/(1 + x(k-1)^2 + x(k-2)^2 + \\ & x(k-3)^2) + 2\sin(x(k-1)\cos(x(k-2))) + \\ & 2\sin(x(k-2)\cos(x(k-2))) + \\ & 2\sin(x(k-3)\cos(x(k-3))) + \\ & 6v(k-1)^2 + v(k-2)^3, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} v(k) = & 2\sin(k\pi/25) + 0.5\sin(k\pi/30) + 0.02e^{\sin(k\pi/40)}. \end{aligned}$$

根据前 500 组数据, 利用本文方法对该系统进行建模, 得

$$\begin{aligned} y(k) = & y(k-1) + \hat{\varphi}(k)(k-1) + h[y_0(k-1) - y(k-1)] = \\ & y(k-1) + \hat{\varphi}(k)(k-1) + 1.3620[y_0(k-1) - y(k-1)], \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\varphi(k)$ 由如下的 4 阶 AR 模型预报:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) = & \theta_1\hat{\varphi}(k-1) + \theta_2\hat{\varphi}(k-2) + \dots + \theta_4\hat{\varphi}(k-4) = \end{aligned}$$

$$1.5514\hat{\varphi}(k-1) - 1.7399\hat{\varphi}(k-2) + \\ 1.2871\hat{\varphi}(k-3) - 0.6576\hat{\varphi}(k-4).$$

用后 500 组数据验证模型的有效性, 仿真结果如图 4 所示. 其中实线为给定模型 (8) 的输出, 虚线为带误差修正泛模型 (8) 的输出. 图 5 为建模误差, 均方误差为 2.849 2.

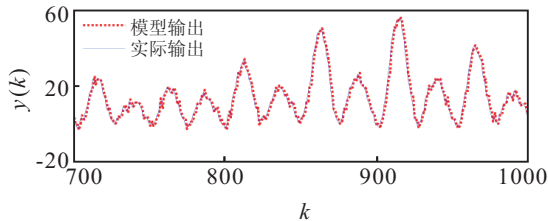


图 4 例 2 的模型输出与实际输出的比较

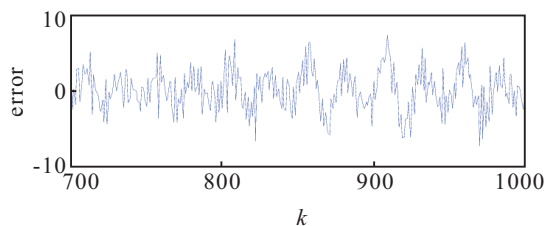


图 5 例 2 的建模误差

为进一步提高模型的辨识精度, 可利用 k 时刻及以前时刻模型的输出误差的加权融合方式对模型进行修正, 加权系数作为粒子向量中的参数进行优化. 仍以 Box-Jenkins 煤气炉数据为例进行仿真研究, 若选用 k 时刻及 $k-1$ 时刻的误差进行修正, 则均方误差为 0.404 1, 若再增加 $k-2$ 时刻的误差信息, 则均方误差为 0.365 9. 此种提高辨识精度的方法, 可看成是通过误差信息的融合来进一步提高对建模误差补偿的精度, 也可以理解为对误差数据建立一个自回归模型, 利用这个模型对下一时刻的误差进行预报, 以提高误差修正的精度.

4 关于模型的讨论

1) 收敛性. 用 $y_0(k+1)$ 与式 (3) 相减, 得 $k+1$ 时刻模型的输出误差为

$$e(k+1) = \\ (1-h)e(k) + y_0(k+1) - y_0(k) - \hat{\varphi}(k)\Delta u(k).$$

由于 $y_0(k+1)$, $y_0(k)$ 及 $\Delta u(k)$ 均已知, 若使误差当 $k \rightarrow \infty$ 时收敛, 则只需满足 $|1-h| < 1$, 同时 $|\hat{\varphi}(k)|$ 有界即可, 于是可得 $0 < h < 2$. 下面证明 $|\hat{\varphi}(k)|$ 的有界性. 当 $k=1, 2, \dots, p$ 时, 给系统一个外输入信号, 测得系统的相应输出. 令

$$\hat{\varphi}(k) = \varphi(k) = \frac{y_0(k+1) - y_0(k)}{u(k) - u(k-1)},$$

选取 $\varphi(k)$ 的初值, 由此可知 $|\hat{\varphi}(k)| (k=1, 2, \dots, p)$ 有界. 适当选择参数 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 的范围 (如 $|\theta_i| \leq 2, i=1,$

$2, \dots, p$), 则由式 (4) 可知, 当 $k=p+1$ 时, $|\hat{\varphi}(k)|$ 也有界. 以此类推, 可以得到结论 $|\hat{\varphi}(k)|$ 有界.

2) $\varphi(k)$ 的时变性. 因为模型 (3) 中的 $\varphi(k)$ 是未知参数, 而且 $\varphi(k)$ 是函数 f 关于 u 在 $u(k)$ 处的梯度, 因此模型 (3) 既具有参数时变的特征, 又具有结构时变的特征, 作为非线性系统的结构模型具有一定的适应性. 如果 $\varphi(k)$ 不依赖于 $u(k) - u(k-1)$ 和 $y_0(k+1) - y_0(k)$, 则系统是线性的.

3) $\varphi(k)$ 的自回归性. 因为 $\varphi(k)$ 的估计选用了自回归模型, 使得模型 (3) 在用 PSO 优化未知参数的基础上, 除系统的 I/O 数据外, 不再需要任何有关系统的信息, 因此模型 (3) 也可理解为基于数据驱动^[17] 的建模方法.

5 结 论

本文提出了一种非线性系统辨识方法. 该方法以带误差修正的泛模型为基础, 模型中的特征参量用一 AR 模型估计, AR 模型中的参数及泛模型中的误差修正系数作为粒子向量, 采用粒子群优化算法进行寻优.

本文提出的这种基于 PSO 优化泛模型的建模方法, 最大的优点在于实现简单, 而且参数收敛速度较快, 通过引入误差修正项, 使辨识器成为一个闭环结构. 在实际的非线性系统中, 只要可以测量得到系统的输入输出数据, 且输入输出数据是有界的, 便可应用本文的方法建立非线性系统的改进泛模型来逼近系统.

参考文献(References)

- [1] 李秀英, 韩志刚. 非线性系统辨识方法的新进展[J]. 自动化技术与应用, 2004, 23(10): 5-7.
(Li X Y, Han Z G. Advances in nonlinear system identification[J]. Techniques of Automation and Applications, 2004, 23(10): 5-7.)
- [2] Ren Xuemei. Identification of nonlinear systems using recurrent neural networks[J]. Control Theory & Applications, 2001, 18(6): 944-948.
- [3] 刘福才, 关新平, 裴润. 基于一种新模糊模型的非线性系统模糊辨识[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 113-116.
(Liu F C, Guan X P, Pei R. Fuzzy identification based on new fuzzy model for nonlinear systems[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(1): 113-116.)
- [4] 蒙祖强, 蔡自兴. 一种基于并行遗传算法的非线性系统辨识方法[J]. 控制与决策, 2003, 18(3): 367-370.
(Meng Z Q, Cai Z X. Identification method of nonlinear systems based on parallel genetic algorithm[J]. Control and Decision, 2003, 18(3): 367-370.)
- [5] 柯晶, 钱积新. 应用粒子群优化的非线性系统辨识[J]. 电路与系统学报, 2003, 8(4): 12-15.

- (Ke J, Qian J X. Nonlinear system identification using particle swarm optimization[J]. J of Circuits and Systems, 2003, 8(4): 12-15.)
- [6] 邵雷, 雷虎民, 刘代军, 等. 基于微粒群算法的非线性系统建模方法研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 149-152.
(Shao L, Lei H M, Liu D J, et al. Study of nonlinear system modeling based on particle swarm optimizer[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 149-152.)
- [7] 高飞, 童恒庆. 基于改进粒子群优化算法的混沌系统参数估计方法[J]. 物理学报, 2006, 55(2): 577-582.
(Gao F, Tong H Q. Parameter estimation for chaotic system based on particle swarm optimization[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(2): 577-582.)
- [8] 罗秋滨, 李秀英, 韩志刚, 等. 一种非线性系统多项式逼近的建模方法[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(4): 829-832.
(Luo Q B, Li X Y, Han Z G, et al. Polynomial approach for nonlinear modeling[J]. J of System Simulation, 2008, 20(4): 829-832.)
- [9] 徐小平, 钱富才, 刘丁, 等. 基于PSO算法的系统辨识方法[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(13): 3525-3528.
(Xu X P, Qian F C, Liu D, et al. Method of system identification based on PSO algorithm[J]. J of System Simulation, 2008, 20(13): 3525-3528.)
- [10] 向微, 陈宗海. 基于Hammerstein模型描述的非线性系统辨识新方法[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 143-147.
(Xiang W, Chen Z H. New identification method of nonlinear systems based on Hammerstein models[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(1): 143-147.)
- [11] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]. Proc of 1995 IEEE Int Conf on Neural Networks. New York: IEEE, 1995: 1942-1948.
- [12] 纪震, 廖惠连, 吴青华. 粒子群算法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
(Ji Z, Liao H L, Wu Q H. Particle swarm algorithm and its application[M]. Beijing: Science Publishing House, 2008.)
- [13] 韩志刚, 蒋爱平, 王洪桥. 自适应辨识、预报和控制——多层递阶途径[M]. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1995.
(Han Z G, Jiang A P, Wang H Q. Adaptive identification prediction and control—Multi-level recursive approach[M]. Harbin: Heilongjiang Education Publishing House, 1995.)
- [14] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-73.
- [15] Box E P. Time series analysis, forecasting and control[M]. San Francisco: Holden Day, 1970.
- [16] Billings S A, Wei H L. The wavelet-NARMAX representation: A hybrid model structure combining polynomial model with multiresolution wavelet decompositions[J]. Int J of Systems Science(S0020-7721), 2005, 36(3): 137-152.
- [17] 侯忠生, 许建新. 数据驱动控制理论及方法的回顾和展望[J]. 自动化学报, 2009, 35(6): 650-667.
(Hou Z S, Xu J X. On data-driven control theory: The state of the art and perspective[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(6): 650-667.)

~~~~~

(上接第1626页)

- [18] Liu B, Xie G M, Chu T G, et al. Controllability of interconnected systems via switching networks with a leader[C]. IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics. Taipei, 2006: 3912-3916.
- [19] Ji Z J, Lin H, Lee T H. Controllability of multi-agent systems with switching topology[C]. IEEE Int Conf on Robotics, Automation and Mechatronics. Chengdu, 2008: 421-426.
- [20] Ji Z J, Wang Z D, Lin H, et al. Controllability of multi-agent systems with time-delay in state and switching topology[J]. Int J of Control, 2009, 83(2): 371-386.
- [21] Zamani M, Lin H. Structural controllability of multi-agent systems[C]. Proc of American Control Conf. St Louis, 2009: 5743-5748.
- [22] Martini S, Egerstedt M, Bicchi A. Controllability analysis of multi-agent systems using relaxed equitable partitions[J]. Int J of Systems, Control and Communications, 2010, 2(1/2/3): 100-121.
- [23] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2001: 195-196.
- [24] Biggs N. Algebraic graph theory[M]. The 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993: 101-102.
- [25] Dixon J D, Mortimer B. Permutation groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1996: 7-8.