第 26 卷 第 10 期 Vol. 26 No. 10
控 制 与 决 策 Control and Decision
2011 年 10 月 Oct. 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 10-1596-05

基于二次分离方法的时变时滞系统稳定性分析

张红强[1], 刘健辰[2]

(1. 湖南科技大学 信息与电气工程学院，湖南 湘潭 411201；2. 湖南大学 电气与信息工程学院，长沙 410082)

摘 要: 基于二次分离方法研究时变时滞系统的时滞相关稳定性问题. 通过引入更为严格的积分二次约束, 取得保守性更小的稳定性判据. 借鉴时变时滞分解思想, 提出基于线性矩阵不等式的改进的稳定性判据. 数值算例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 时变时滞系统；时滞相关；二次分离方法；线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Stability analysis for time-varying delay systems based on quadratic separation approach

ZHANG Hong-qiang[1], *LIU Jian-chen*[2]

(1. School of Information and Electrical Engineering，Hu'nan University of Science and Technology，Xiangtan 411201, China；2. College of Electrical and Information Engineering，Hu'nan University，Changsha 410082，China. Correspondent：ZHANG Hong-qiang，E-mail：6152159@qq.com)

Abstract: This paper investigates the delay-dependent stability criterion of time-varying delay systems based on quadratic separation approach. By introducing some more strict integral quadratic constraints, less conservative stability criterion is obtained. Based on the idea of the time-varying delay decomposition, an improved stability criterion is obtained in terms of linear matrix inequalities. Numerical example shows that the effectiveness of the proposed methods.

Key words: time-varying delay system；delay-dependent；quadratic separation approach；linear matrix inequality

1 引 言

时滞普遍存在于大量自然和工程系统中[1], 由于其经常成为系统恶化甚至不稳定的根源, 时滞系统的稳定性分析和控制器设计一直是研究热点之一. 对于时滞系统稳定性分析, LKF (Lyapunov Krasovskii functional) 方法被广泛采用, 取得的成果也最为丰富[2-6]. 目前, Gouaisbaut 等人将用于不确定系统鲁棒性分析的二次分离 (QS) 方法引入时滞系统稳定性分析, 取得了一系列有意义的成果. 文献 [7] 首次将 QS 法用于定常时滞系统的稳定性分析. [8] 将该方法推广到时变时滞情况, 但在推导积分二次约束 (IQC) 条件时使用了比较不精确的不等式放大, 造成了 [8] 中的结果存在较大的保守性, 本文即以此为主要出发点.

本文基于 QS 法分析时变时滞系统的时滞相关稳定性. 通过引入更为严格的 IQC, 改进文献 [8] 的结果, 并尝试揭示时变时滞情况下 QS 法与 LKF 方法之间的潜在联系. 对于定常时滞系统, 时滞分解法可以有效减小稳定性判据的保守性[9]. 该方法通过构造新的 LKF, 可以更加充分地利用时滞信息. [9] 通过数值算例表明, 随着增加时滞分解数 N, 可以不断降低稳定性判据的保守性, 并且当 N 足够大时, 甚至可以逼近解析解. 相似于定常时滞系统, [10] 将时滞分解的思想用于时变时滞系统, 称其为时变时滞分解法. 本文借鉴 [10] 的时变时滞分解思想, 基于 QS 法提出一种改进的时变时滞系统稳定性判据. 最后, 通过数值算例验证了本文所提出方法的有效性.

2 主要结果

首先对文中变量作如下说明: 对于对称矩阵 A 和 B, $A > B$ 表示 $A - B$ 正定; $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 为块对角矩阵, 即 $\mathrm{diag}\{X_1, X_2\} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$; $\xi = \mathrm{col}\{\xi_1, \xi_2\}$ 表

收稿日期: 2010-06-30；**修回日期:** 2010-08-22.

基金项目: 湖南省教育厅科学研究基金项目(07C264).

作者简介: 张红强(1979−), 男, 讲师, 硕士, 从事时滞系统分析、鲁棒控制等研究；刘健辰(1978−), 男, 博士生, 从事时滞混合系统的研究.

示 $\xi=[\xi_1^{\mathrm{T}}\ \ \xi_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$; $B^{\perp}\in\boldsymbol{R}^{n\times(n-r)}$ 为矩阵 $B\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 的右正交补, 且 $\mathrm{rank}(B)=r$; 矩阵中的"$*$"为对称元素; 0_n 和 I_n 分别为 $n\times n$ 维的零矩阵和单位矩阵, 且在没有引起混淆的情况下简写为 0 和 I; $0_{n\times m}$ 为 $n\times m$ 维的零矩阵; $e_i(i=1,2,\cdots,p)$ 为块元矩阵, 如 $e_2=[0\ \ I\ \ 0_{n\times(p-2)n}]$; 在没有引起混淆的情况下, 变量 $x(t)$ 和 $x(s)$ 等分别简写为 x 和 x_s 等.

考虑如下时变时滞系统:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-h(t)),\ \forall t\geqslant 0,\\&x_t(\theta)=\varphi(\theta),\ \forall\theta\in[-\bar{h},0].\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $h(t)$ 为时变时滞, 且满足

$$0\leqslant h(t)\leqslant\bar{h},\ \bar{h}>0,\tag{2}$$

$$\dot{h}(t)\leqslant\mu.\tag{3}$$

QS 法给出了一个互联系统稳定 (或适定) 的充分条件, 具体可总结为如下引理.

引理 1[11]　对于反馈互联系统

$$\omega(t)=\nabla z(t),\ E(t)z(t)=\boldsymbol{A}(t)\omega(t).\tag{4}$$

如果存在矩阵 $\Theta=\Theta^{\mathrm{T}}$ 使得

$$[E(t)\ \ -\boldsymbol{A}(t)]^{\perp\mathrm{T}}\Theta[E(t)\ \ -\boldsymbol{A}(t)]^{\perp}>0,\ \forall t\tag{5}$$

成立, 则系统 (4) 稳定 (或适定). 其中: $z(t)$ 和 $\omega(t)$ 为系统增广状态向量; $E(t)$ 为广义约束矩阵, $E(t)$ 与 $\boldsymbol{A}(t)$ 共同表征了系统状态之间的动态和静态关系; ∇ 为包括时滞在内的各种不确定性算子矩阵; Θ 为分离算子, 满足如下 IQC 条件:

$$[I\ \ \nabla]\Theta[I\ \ \nabla]^{\mathrm{T}}\leqslant 0,\ \forall t.\tag{6}$$

对于定常时滞系统, 文献 [7] 采用算子 $\nabla_0:=x\to\int_0^t x_s\mathrm{d}s$ 和 $\nabla_1:=x\to x(t-h)$ 可以得到时滞无关稳定性判据. 进而, 再引入算子 $\nabla_2:=x\to x(t-\bar{h})$ 可以得到时滞相关稳定性判据. 下面, 考虑采用 QS 法分析时变时滞系统 (1) 的稳定性, 首先引入一些线性算子的 IQC 条件.

引理 2[8]　对于算子 ∇_0,∇_1, 矩阵 $P>0,Q_1>0$, 有如下 IQC 条件成立:

$$\begin{bmatrix}I\\\nabla_0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0&-P\\-P&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\\nabla_0\end{bmatrix}<0,\tag{7}$$

$$\begin{bmatrix}I\\\nabla_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-Q_1&0\\0&(1-\mu)Q_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\\nabla_1\end{bmatrix}<0.\tag{8}$$

引理 3[8]　对于算子 $\nabla_2,\nabla_5:=x\to\int_{t-\bar{h}}^{\mathrm{T}}x(u)\mathrm{d}u$, 矩阵 $Q_2>0,Q_3>0$, 有如下 IQC 条件成立:

$$\begin{bmatrix}I\\\nabla_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-Q_2&0\\0&Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\\nabla_2\end{bmatrix}<0,\tag{9}$$

$$\begin{bmatrix}I\\\nabla_5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\alpha Q_3&\beta Q_3\\\beta Q_3&Q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\\nabla_5\end{bmatrix}<0.\tag{10}$$

其中: $\alpha=(c^2-r^2)\bar{h}^2$, $\beta=-c\bar{h}$, $c=0.25$, $r=0.75$.

引理 4　对于算子 $\nabla_3:=x\to\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{t-h}^t x_s\mathrm{d}s$, $\nabla_4:=x\to\dfrac{1}{\bar{h}-h}\displaystyle\int_{t-\bar{h}}^{t-h}x_s\mathrm{d}s$, 矩阵 $R>0$, 有如下 IQC 条件成立:

$$\begin{bmatrix}I\\\nabla_3\\\nabla_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-\bar{h}R&0&0\\0&hR&0\\0&0&(\bar{h}-h)R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\\nabla_3\\\nabla_4\end{bmatrix}<0.\tag{11}$$

证明　根据 Cauchy-Schwarz (C-S) 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&h\|\nabla_3\|_2^2+(\bar{h}-h)\|\nabla_4\|_2^2=\\&\int_0^\infty h\Big(\frac{1}{h}\int_{t-h}^t x_s\mathrm{d}s\Big)^2\mathrm{d}t+\\&\int_0^\infty(\bar{h}-h)\Big(\frac{1}{\bar{h}-h}\int_{t-\bar{h}}^{t-h}x_s\mathrm{d}s\Big)^2\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_0^\infty\Big[\int_{t-h}^t x_s^2\mathrm{d}s+\int_{t-\bar{h}}^{t-h}x_s^2\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t=\\&\int_0^\infty\Big[\int_{t-\bar{h}}^t x_s^2\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t=\\&\int_{t-\bar{h}}^t\Big[\int_0^\infty x_s^2\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t=\bar{h}\|x\|_2^2.\end{aligned}\tag{12}$$

整理式 (12), 可得 ∇_3 和 ∇_4 的 IQC (11). □

注 1　引理 4 在计算算子 ∇_3 和 ∇_4 的 IQC 时仅使用了 C-S 不等式, 而文献 [8] 在引理 4 的证明过程中将 $\int_0^\infty\Big[h\int_{t-h}^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s+(\bar{h}-h)\int_{t-\bar{h}}^{t-h}\|x_s\|^2\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t$ 放大为 $\int_0^\infty\Big[\bar{h}\int_{t-h}^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s+\bar{h}\int_{t-\bar{h}}^{t-h}\|x_s\|^2\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t$, 使得引理 4 比 [8] 取得的 IQC 更为严格, 同时也使得下文的定理 1 比 [8] 中的结果具有更小的保守性.

引理 5[12]　如下 3 个条件相互等价:

1) $x^{\mathrm{T}}\varXi x<0,\ \forall Bx=0,\ x\neq 0$;

2) $B^{\perp\mathrm{T}}\varXi B^{\perp}<0$, 其中 $B^{\perp}$ 为 B 的任意零空间基矩阵;

3) 存在矩阵 X, 使得 $\varXi+XB+B^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}<0$.

其中: $x\in\boldsymbol{R}^n$ 为广义状态; 条件 1) 中的 $Bx=0$ 为广义状态应满足的约束; 条件 3) 中的矩阵 X 代表引入的额外的自由变量, 称为乘子矩阵.

下面利用引理 1, 结合 IQC 条件 (7)～(11), 获得系统 (1) 稳定的充分条件.

定理 1　如果存在适当维数的正定对称矩阵 P, $Q_j(j=1,2,3)$, R 和矩阵 X, 使得下式成立, 则系统 (1) 稳定:

$$\Theta(h)+X[E\ \ -\boldsymbol{A}(h)]+[E\ \ -\boldsymbol{A}(h)]^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}>0.\tag{13}$$

其中

$$E=\begin{bmatrix}I_{6n}\\0_{3n\times 6n}\end{bmatrix},\ \Theta(h)=\begin{bmatrix}\Theta_{11}&\Theta_{12}\\\Theta_{12}^{\mathrm{T}}&\Theta_{22}(h)\end{bmatrix},$$

$\Theta_{11} = \mathrm{diag}\{0, -Q_1, -Q_2, -\bar{h}R, 0, \alpha Q_3\}$,

$\Theta_{12} = \mathrm{diag}\{-P, 0, 0, 0, 0, \beta Q_3\}$,

$\Theta_{22}(h) = \mathrm{diag}\{0, (1-\mu)Q_1, Q_2, hR, (\bar{h}-h)R, Q_3\}$,

$\boldsymbol{A}(h) = \mathrm{col}\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_9\}$,

$\boldsymbol{A}_{1,4,5,6} = [A \ \ A_d \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$,

$\boldsymbol{A}_{2,3} = [I \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$, $\boldsymbol{A}_7(h) = [-I \ \ I \ \ 0 \ \ hI \ \ 0 \ \ 0]$,

$\boldsymbol{A}_8(h) = [0 \ \ -I \ \ I \ \ 0 \ \ (\bar{h}-h)I \ \ 0]$,

$\boldsymbol{A}_9 = [-I \ \ 0 \ \ I \ \ 0 \ \ 0 \ \ I]$.

证明 为了利用引理1, 将系统(1)表示为反馈互联形式(4), 即

$$\omega = \nabla z,\ Ez = \boldsymbol{A}(h)\omega.$$

其中

$$z = \mathrm{col}\{\dot{x}, x, x, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}\},$$

$$\omega = \mathrm{col}\{x, x(t-h), x(t-\bar{h}), w_1, w_2, w_3\},$$

$$\nabla = \mathrm{diag}\{\nabla_0, \nabla_1, \cdots, \nabla_5\},\ w_1 = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\dot{x}_s\mathrm{d}s,$$

$$w_2 = \frac{1}{\bar{h}-h}\int_{t-\bar{h}}^{t-h}\dot{x}_s\mathrm{d}s,\ w_3 = \int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}_s\mathrm{d}s.$$

矩阵E和$\boldsymbol{A}(h)$可以根据向量z和ω中各个变量之间的关系直接确定. 为了确定对应于∇的分离算子$\Theta(h)$, 只需将引理2, 引理3和引理4中$\nabla_0, \nabla_1, \cdots, \nabla_5$的IQC条件代入即可. 这样, 利用引理1, 对于任意h, 若

$$[E \ \ -\boldsymbol{A}(h)]^{\perp\mathrm{T}}\Theta(h)[E \ \ -\boldsymbol{A}(h)]^{\perp} > 0 \tag{14}$$

成立, 则系统(4)稳定. 再基于引理5, 可得式(13)等价于(14). □

注2 在式(14)中会出现h的非线性项, 故式(14)无法直接求解, 但通过引理5引入乘子变量可以获得与式(14)等价的LMI条件(13). 式(13)消除了其中h的耦合, 使得h线性地出现在式(13)中. 这样, 根据鲁棒稳定性理论, 式(13)的可行性等价于其在不确定参数顶点处的可行性, 即式(13)对于任意h的可行性等价于其在两个边界点0和$\bar{h}$的可行性.

文献[7]指出了QS法与LKF法之间存在等价关系. 下面针对时变时滞系统情况, 具体讨论两者之间的对应关系. 考虑如下LKF:

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px + \int_{t-h}^{t}x_s^{\mathrm{T}}Q_1x_s\mathrm{d}s + \int_{t-\bar{h}}^{t}x_s^{\mathrm{T}}Q_2x_s\mathrm{d}s + \int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta. \tag{15}$$

其中: $P>0, Q_1>0, Q_2>0, R>0$. 计算式(15)的微分可得

$$\dot{V}(x) \leqslant 2x^{\mathrm{T}}P\dot{x} + x^{\mathrm{T}}(Q_1+Q_2)x - (1-\mu)x^{\mathrm{T}}(t-h)Q_1x(t-h) - x^{\mathrm{T}}(t-\bar{h})Q_2x(t-\bar{h}) + \bar{h}\dot{x}^{\mathrm{T}}R\dot{x} - \int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s. \tag{16}$$

由Jensen不等式[1], 有

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s \leqslant -hv_1^{\mathrm{T}}Rv_1 - (\bar{h}-h)v_2^{\mathrm{T}}Rv_2. \tag{17}$$

其中

$$v_1 = \frac{(x - x(t-h))}{h},\ v_2 = \frac{(x(t-h) - x(t-\bar{h}))}{\bar{h}-h}.$$

这样, 如果式(18)成立, 则系统(1)渐近稳定, 即

$$\dot{V}(x) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}\Xi(h)\xi,\ \forall S(h)\xi = 0. \tag{18}$$

其中

$$\xi = \mathrm{col}\{\dot{x}, x, x(t-h), x(t-\bar{h}), v_1, v_2\},$$

$$\Xi(h) = \mathrm{diag}\{\Xi_1, -(1-\mu)Q_1, -Q_2, -hR, -(\bar{h}-h)R\},$$

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \bar{h}R & P \\ P & Q_1+Q_2 \end{bmatrix},$$

$$S(h) = \begin{bmatrix} -I & A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & I & 0 & hI & 0 \\ 0 & 0 & -I & I & 0 & (\bar{h}-h)I \end{bmatrix}.$$

利用引理5, 可得到式(18)等价于

$$\Xi(h) + XS(h) + S^{\mathrm{T}}(h)X^{\mathrm{T}} < 0. \tag{19}$$

在定理1中, 令$Q_3=0$, 经过矩阵计算可发现式(19)将与(13)完全相同, 即QS法中的∇_0等算子与LKF方法中的$x^{\mathrm{T}}Px$等二次项相对应; 而QS法中的IQC对应于LKF方法中对$\dot{V}(x(t))$中各项的定界; 特别是QS法中所使用的Cauchy-Schwarz不等式对应于LKF方法中的Jensen不等式. 实际上, Jensen不等式可以由Cauchy-Schwarz不等式证明得到. 但QS法与LKF方法相比有两个不同之处: 1)可以更加方便地利用频域知识达到对某些算子更精确的定界, 例如定理1中的算子∇_5, 在时域中只能得到相当保守的定界$(c=0, r=1)$; 2)QS法一般会得到更大维数的LMI条件, 例如: 令$Q_3=0$, 等价条件式(13)和(19)的维数分别为$10n$和$6n$, n为系数状态维数. 下面通过引入新的算子和相应的IQC, 采用与定理1相似的方法, 取得保守性更小的稳定性判据.

引理6 对于算子

$$\bar{\nabla}_1 := x \to x(t-h/2),\ \bar{\nabla}_2 := x \to x(t-\bar{h}/2),$$

$$\bar{\nabla}_3 := x \to \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t}x_s\mathrm{d}s,$$

$$\bar{\nabla}_4 := x \to \frac{1}{\bar{h}-h}\int_{t-\bar{h}/2}^{t-h/2}x_s\mathrm{d}s,$$

$$\bar{\nabla}_5 := x \to \int_{t-\bar{h}/2}^{t}x_s\mathrm{d}s,$$

矩阵$\bar{Q}_1>0, \bar{Q}_2>0, \bar{Q}_3>0, \bar{R}>0$, 有如下IQC成立:

$$\begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -\bar{Q}_1 & 0 \\ 0 & (1-\mu/2)\bar{Q}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\bar{Q}_2 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \alpha\bar{Q}_3/4 & \beta\bar{Q}_3/2 \\ \beta\bar{Q}_3/2 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_5 \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_3 \\ \bar{\nabla}_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\bar{h}\bar{R}/4 & 0 & 0 \\ 0 & h\bar{R} & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{h}-h)\bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_3 \\ \bar{\nabla}_4 \end{bmatrix} < 0. \tag{23}$$

证明　IQC (20) 和 (21) 的证明过程参见文献 [8]. 假设零初始条件, 对于 $T>0$, 截断 $x(t)$, 即对于 $t>T$, $x(t)=0$, 有

$$\begin{aligned} & x^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\bar{Q}_1 & 0 \\ 0 & (1-\mu/2)\bar{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_1 \end{bmatrix} x = \\ & -\int_0^\infty x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1 x_s \mathrm{d}s + \\ & \int_0^\infty x_{s-h(s)/2}^{\mathrm{T}}(1-\mu/2)\bar{Q}_1 x_{s-h(s)/2}\mathrm{d}s \leqslant \\ & -\int_0^\infty x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1 x_s \mathrm{d}s + \\ & \int_0^\infty x_{s-h/2}^{\mathrm{T}}(1-\dot{h}(s)/2)\bar{Q}_1 x_{s-h/2}\mathrm{d}s = \\ & -\int_0^t x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1 x_s \mathrm{d}s + \int_{-h_0/2}^{T-h_T/2} x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1 x_s \mathrm{d}s = \\ & -\int_{T-h_T/2}^t x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1 x_s \mathrm{d}s < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\bar{Q}_2 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\nabla}_2 \end{bmatrix} x = \\ & -\int_0^\infty x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_2 x_s \mathrm{d}s + \int_0^\infty x_{s-\bar{h}/2}^{\mathrm{T}}\bar{Q}_2 x_{s-\bar{h}/2}\mathrm{d}s = \\ & -\int_0^t x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_2 x_s \mathrm{d}s + \int_{-\bar{h}/2}^{T-\bar{h}/2} x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_2 x_s \mathrm{d}s = \\ & -\int_{T-\bar{h}/2}^t x_s^{\mathrm{T}}\bar{Q}_2 x_s \mathrm{d}s < 0. \end{aligned}$$

将 $\bar{h}/2$ 替代式 (10) 中的 $\bar{h}$即可得到 IQC (22). IQC (23) 的证明过程参见引理 4, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & h\|\bar{\nabla}_3\|_2^2 + (\bar{h}-h)\|\bar{\nabla}_4\|_2^2 = \\ & \int_0^\infty h\Big(\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^t x_s \mathrm{d}s\Big)^2 \mathrm{d}t + \\ & \int_0^\infty (\bar{h}-h)\Big(\frac{1}{\bar{h}-h}\int_{t-\bar{h}/2}^{t-h/2} x_s \mathrm{d}s\Big)^2 \mathrm{d}t \leqslant \\ & \int_0^\infty \Big[\frac{1}{2}\int_{t-h/2}^t x_s^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{t-\bar{h}/2}^{t-h/2} x_s^2 \mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t = \\ & \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big[\int_{t-\bar{h}/2}^t x_s^2 \mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t = \\ & \frac{1}{2}\int_{t-\bar{h}/2}^t \Big[\int_0^\infty x_s^2 \mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t = \frac{\bar{h}}{4}\|x\|_2^2. \end{aligned}$$

整理上式, 即可得到 $\bar{\nabla}_3$ 和 $\bar{\nabla}_4$ 的 IQC (23). □

引理 7[10]　定义函数 $D(t) = t - h/2$, $D^2(t) = D(D(t))$, 对于算子 $\nabla_6 = x \rightarrow \int_{t-h}^{D^2(t)} x_s \mathrm{d}s$ 和矩阵 $Q_4 > 0$, 有如下 IQC 成立:

$$\begin{bmatrix} I \\ \nabla_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\vartheta Q_4 & 0 \\ 0 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \nabla_6 \end{bmatrix} < 0, \tag{24}$$

其中 $\vartheta = \bar{h}^2\mu^2/(4^2(1-\mu))$.

定理 2　如果存在适当维数的正定对称矩阵 P, $Q_1, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, Q_4, R, \bar{R}$ 和矩阵 X 使得下式成立, 则系统 (1) 渐近稳定:

$$\bar{\Theta}(h) + X[\bar{E} \ -\bar{\boldsymbol{A}}(h)] + [\bar{E} \ -\bar{\boldsymbol{A}}(h)]^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} > 0. \tag{25}$$

其中

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I_{12n} \\ 0_{6n\times 12n} \end{bmatrix}, \ \bar{\Theta}(h) = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{11} & \bar{\Theta}_{12} \\ \bar{\Theta}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{\Theta}_{22}(h) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} & \bar{\Theta}_{11} = \mathrm{diag}\{0, -Q_1, -\bar{Q}_1, -\bar{Q}_2, -\bar{h}R, 0, \\ & \qquad -\bar{h}\bar{R}/4, 0, \alpha\bar{Q}_3/4, \vartheta Q_4\}, \\ & \bar{\Theta}_{12} = \mathrm{diag}\{-P, 0, 0_{2n}, 0_{2n}, 0, 0, 0, 0, \beta\bar{Q}_3/2, 0\}, \\ & \bar{\Theta}_{22} = \mathrm{diag}\{0, (1-\mu)Q_1, (1-\mu/2)\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, hR, \\ & \qquad (\bar{h}-h)R, h\bar{R}, (\bar{h}-h)\bar{R}, \bar{Q}_3, Q_4\}, \\ & \bar{\boldsymbol{A}}(t) = \mathrm{col}\{\bar{\boldsymbol{A}}_1, \bar{\boldsymbol{A}}_2, \cdots, \bar{\boldsymbol{A}}_{16}\}, \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{1,7,8,\cdots,12} = [A \ \ A_d \ \ 0_{n\times 10n}], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{2,3,5} = [I \ \ 0_{n\times 11n}], \ \bar{\boldsymbol{A}}_4 = [0_{n\times 2n} \ \ I \ \ 0_{n\times 9n}], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_6 = [0_{n\times 4n} \ \ I \ \ 0_{n\times 7n}], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{13}(h) = [-I \ \ I \ \ 0_{n\times 4n} \ \ hI \ \ 0_{n\times 5n}], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{14}(h) = [0 \ \ -I \ \ 0_{n\times 3n} \ \ I \ \ 0 \ \ (\bar{h}-h)I \ \ 0_{n\times 4n}], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{15}(h) = [-I \ \ 0 \ \ I \ \ 0_{n\times 5n} \ \ hI \ \ 0_{n\times 3n}], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{16}(h) = [0_{n\times 2n} \ \ -I \ \ 0 \ \ I \ \ 0_{n\times 4n} \ \ (\bar{h}-h)I \ \ 0_{n\times 2n}], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{17} = [-I \ \ 0_{n\times 3n} \ \ I \ \ 0_{n\times 5n} \ \ I \ \ 0], \\ & \bar{\boldsymbol{A}}_{18} = [0 \ \ I \ \ 0 \ \ -I \ \ 0_{n\times 7n} \ \ I]. \end{aligned}$$

证明　与定理 1 的证明相似, 引入引理 6 和引理 7 中新的算子, 将系统 (1) 重新表示为反馈互联形式 (4), 其中

$$\begin{aligned} & z = \mathrm{col}\{\dot{x}, x, x, x_1, x, x(t-\bar{h}/2), \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}\}, \\ & \omega = \mathrm{col}\{x, x(t-h), x_1, x_2, x(t-\bar{h}/2)x(t-\bar{h}), \\ & \qquad w_1, w_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, w_4\}, \\ & \bar{w}_1 = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^t \dot{x}_s \mathrm{d}s, \ \bar{w}_2 = \frac{1}{\bar{h}-h}\int_{t-\bar{h}/2}^{t-h/2} \dot{x}_s \mathrm{d}s, \\ & \bar{w}_3 = \int_{t-\bar{h}/2}^t \dot{x}_s \mathrm{d}s, \ w_4 = \int_{t-h}^{D^2(t)} \dot{x}_s \mathrm{d}s, \\ & \nabla = \mathrm{diag}\{\nabla_0, \nabla_1, \bar{\nabla}_1, \bar{\nabla}_2, \nabla_3, \nabla_4, \bar{\nabla}_3, \bar{\nabla}_4, \bar{\nabla}_5, \nabla_6\}. \end{aligned}$$

利用引理 6 和引理 7 中的 IQC, 可得分离算子 $\bar{\Theta}(h)$, 进而根据引理 5 可得证. □

注 3　定理 2 中使用新算子 $\bar{\nabla}_5$ 引入的频域 IQC 和引理 6 中对算子 $\bar{\nabla}_3, \bar{\nabla}_4$ 定界得更为严格的 IQC, 使得定理 2 减小了文献 [10] 中结果的保守性.

注 4 本文只给出了分解次数 $N=2$ 的情况, 对于分解次数 $N\geqslant 3$ 的情况, 可以采用定理 2 的方法自行推导. 随着增大分解次数, 可以获得保守性更小的结果, 但所需求解的 LMI 的维数和所涉及的求解变量数也将增多, 从而加重计算负担.

3 数值分析

考虑系统 (1), 参数如下:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

为便于比较, 表 1 给出了对于不同 μ 保证该系统稳定的最大时滞上界 $\bar{h}$. 所有计算均使用计算软件 Matlab 和 Yalmip[13]环境下的解算器 SeDuMi[14]. 由表 1 可见, 定理 1 和定理 2 分别改进了文献 [8] 和 [10] 的结果, 其中定理 2 和 [10] 的分解次数 N 同为 2, 而定理 2 相对于定理 1 可以取得更大的 $\bar{h}$, 表明了采用时变时滞分解技术可以有效减小保守性.

表 1 对于不同 μ 的最大时滞上界 $\bar{h}$

μ	0	0.1	0.2	0.5	0.8
文献 [8]	4.568	3.673	3.085	2.043	1.492
定理 1	5.843	5.262	5.262	5.262	5.262
文献 [10]	5.717	4.286	3.366	2.008	1.364
定理 2	6.152	5.966	5.853	5.654	5.607

4 结 论

本文基于 QS 方法研究了时变时滞系统的时滞相关稳定性. 通过引入更为严格的 IQC, 取得了保守性更小的稳定性判据. 借鉴时变时滞分解思想, 提出了一种改进的时变时滞系统稳定性判据. 数值算例表明了所提出方法的有效性. 下一步的研究方向是在 QS 方法中引入滤波器变换方法[15]和高阶微分方法[16], 尝试进一步减小稳定性判据的保守性.

参考文献(References)

[1] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Boston: Birkhauser, 2003: 1-5.

[2] Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1931-1937.

[3] He Y, Wang Q, Lin C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(2): 371-376.

[4] Han Q. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12): 2171-2176.

[5] Xu S, Lam J, Zou Y. New results on delay-dependent robust H_∞ control for systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2006, 42(2): 343-348.

[6] Suplin V, Fridman E, Shaked U. A projection approach to H_∞ control of time-delay systems[C]. Proc of 43rd IEEE Conf Decision Control. New York: IEEE Press, 2004: 4548-4553.

[7] Gouaisbaut F, Peaucelle D. A note on stability of time delay systems[C]. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design. Toulouse, 2006: 555-560.

[8] Ariba Y, Gouaisbaut F, Peaucelle D. Stability analysis of time-varying delay systems in quadratic separation framework[C]. Int Conf on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences. Genoa, 2008: 1-11.

[9] Han Q. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems[J]. Automatica, 2009, 45(2): 517-524.

[10] Ariba Y, Gouaisbaut F. Construction of Lyapunov-Krasovskii functional for time-varying delay systems[C]. IEEE Conf on Decision and Control. Cancun: IEEE Press, 2008: 3995-4000.

[11] Peaucelle D, Arzelier D, Henrion D, et al. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation[J]. Automatica, 2007, 43(5): 795-804.

[12] Oliveira M C, Skelton R. Stability tests for constrained linear systems[C]. Chapter in Perspectives in Robust Control. London: Springer, 2001: 243-244.

[13] Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab[C]. IEEE Int Symposium on Computer Aided Control Systems Design. New York: IEEE Press, 2004: 284-289.

[14] Labit Y, Peaucelle D, Henrion D. SeDuMi interface 1.02: A tool for solving LMI problems with SeDuMi[C]. IEEE Int Symposium on Computer Aided Control System Design. New York: IEEE Press, 2002: 272-277.

[15] Kao C Y, Rantzer A. Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays[J]. Automatica, 2007, 43(6): 959-970.

[16] Gouaisbaut F, Peaucelle D. Robust stability of time-delay systems with interval delays[C]. IEEE Conf on Decision and Control. New York: IEEE Press, 2007: 6328-6333.