文章编号: 1001-0920 (2012) 01-0093-06

时滞LPV重复过程的 H_∞ 控制

齐 迹[1], 李艳辉[2]

(1. 齐齐哈尔大学 通信与电子工程学院，黑龙江 齐齐哈尔 161006;
2. 东北石油大学 电子信息工程学院，黑龙江 大庆 163318)

摘 要: 将时滞线性参数变化 (LPV) 思想应用于重复过程, 研究其 H_∞ 控制问题. 基于参数依赖 Lyapunov 函数方法, 给出了该重复过程的稳定性和控制器设计的充分条件; 同时通过投影定理引入两个附加矩阵, 解除了重复过程矩阵和依赖于参数的 Lyapunov 函数矩阵之间的耦合, 使得到的条件便于求解. 仿真实例表明了该设计方法的有效性.

关键词: 线性参数变化重复过程；参数依赖 Lyapunov 函数；参数线性矩阵不等式；H_∞ 控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H_∞ control of time-delayed LPV repetitive processes

QI Ji[1], *LI Yan-hui*[2]

(1. Communication and Electronic Engineering Institute，Qiqihar University，Qiqihar 161006，China；2. School of Electric Information Engineering，Northeast Petroleum University，Daqing 163318，China．Correspondent：QI Ji, E-mail：qi_ji_1979@yahoo.com.cn)

Abstract: The paper investigates the problem of H_∞ control for a class of time-delayed linear parameter varying repetitive processes. Sufficient conditions for the analysis of stability and the existence of the controller are proposed, which are established in terms of the parameter-dependent Lyapunov functions. By using the projection lemma and with the help of two slack matrices, the parameter-dependent Lyapunov functions matrices and the repetitive processes matrices are decoupled so that the problem is solved. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed design scheme.

Key words: linear parameter-varying repetitive processes；parameter-dependent Lyapunov functions；parameter linear matrix inequalities；H_∞ control

1 引 言

重复过程是一种具有理论和实际意义的特殊二维系统. 该过程的主要特点是具有一系列重复性动作, 这种动作在一个固定的有限时间内动态进行, 并且每一次动作的输出结果又作用于下一次动作, 对下一次动作的输出结果产生影响. 这与 Rosser[1]和 Gao[2]研究的二维系统有着本质区别. 近年来, 对重复过程的研究已引起人们越来越多的关注, 出现了很多研究成果. 例如: 文献 [3-4] 研究其控制问题; [5-6] 采用线性矩阵不等式的方法研究其稳定性问题; [7-8] 分别研究其 L_2-L_∞ 滤波和 H_∞ 模型降阶问题.

线性参数变化 (LPV) 系统是一类重要的时变系统, 许多实际系统 (如机器人、磁悬浮轴承、飞行器等) 都可用上述模型来描述. 近年来, 针对 LPV 系统的研究已引起国内外学者的广泛关注, 并取得大量的研究成果[9-11]. 然而, 这些研究仅限于一般的系统.

本文研究了时滞线性参数变化重复过程的 H_∞ 控制问题. 基于参数线性矩阵不等式方法给出了该重复过程参数二次稳定的时滞相关的充分条件. 通过投影定理引入两个附加矩阵, 解除了系统矩阵和参数依赖的 Lyapunov 函数矩阵之间的耦合, 得到了便于求解的充分条件. 最后通过数值算例验证了所提出的 H_∞ 控制器设计方法的可行性.

2 问题描述

考虑如下时滞 LPV 重复过程:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{k+1}(t) = {} & A(\rho)x_{k+1}(t) + A_d(\rho)x_{k+1}(t-\tau(\rho)) + \\ & A_1(\rho)y_k(t) + A_2(\rho)u_{k+1}(t) + \\ & A_3(\rho)w_{k+1}(t), \\ y_{k+1}(t) = {} & B(\rho)x_{k+1}(t) + B_d(\rho)x_{k+1}(t-\tau(\rho)) +\end{aligned}$$

收稿日期: 2010-07-03；**修回日期:** 2011-03-23.

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12511002).

作者简介: 齐迹(1979−), 女, 讲师, 硕士, 从事随机系统、二维系统等研究；李艳辉(1970−), 女, 教授, 博士后, 从事鲁棒控制/滤波、神经网络控制等研究.

$$
\begin{aligned}
&B_1(\rho)y_k(t)+B_2(\rho)u_{k+1}(t)+\\
&B_3(\rho)w_{k+1}(t),\\
&z_{k+1}(t)=C(\rho)x_{k+1}(t)+C_1(\rho)y_k(t),\\
&x_{k+1}(0)=0,\ \forall k\geqslant 0,\\
&y_0(t)=0,\ \forall 0\leqslant t\leqslant\alpha.
\end{aligned}\tag{1}
$$

其中: α 是通道长度, 在第 k 个通道上, $x_{k+1}(t)\in R^n$ 是过程状态向量; $y_k(t)\in R^m$ 是通道剖面向量; $u_{k+1}(t)\in R^l$ 是控制输入向量; $w_{k+1}(t)\in R^q$ 是扰动输入, 并假定其为能量有界, 即 $L_2\in\{[0,\infty),[0,\infty)\}$; $z_{k+1}(t)\in R^p$ 是输出信号; 假定系统 (1) 中的矩阵 $A(\cdot),A_d(\cdot),A_1(\cdot),A_2(\cdot),A_3(\cdot),B(\cdot),B_d(\cdot),B_1(\cdot),B_2(\cdot),B_3(\cdot),C(\cdot),C_1(\cdot)$ 和滞后 $\tau(\cdot)$ 均为时变参数 $\rho(t)$ 的函数, 且

$$0<\tau(\cdot)\leqslant\tau<\infty,\ 0\leqslant\dot{\tau}(\cdot)\leqslant\tau_d<1,\ \forall t\geqslant 0.\tag{2}$$

$\rho(t)=[\rho_1(t),\rho_2(t),\cdots,\rho_s(t)]^{\mathrm{T}}$, 参数向量 $\rho_i(t)\in[\underline{\rho}_i,\bar{\rho}_i]$ 满足 $\rho_i(t)$ 实时可测. 以下用 ρ,ρ_i 代表 $\rho(t)$ 和 $\rho_i(t)$, 参数变化率 $\dot{\rho}_i(t)=v_i(t)\in[\underline{v}_i,\bar{v}_i]$.

假定系统的状态可以直接测量, 本文的目的是设计一个无记忆状态反馈控制器

$$
\begin{aligned}
&u_{k+1}(t)=\left[\ K_1(\rho)\ \ K_2(\rho)\ \right]\begin{bmatrix}x_{k+1}(t)\\ y_k(t)\end{bmatrix}=\\
&K_1(\rho)x_{k+1}(t)+K_2(\rho)y_k(t).
\end{aligned}\tag{3}
$$

其中: $K_1(\rho)$ 和 $K_2(\rho)$ 是待设计的状态反馈控制器的增益, 依赖于参数 $\rho(t)$. 于是由式 (1) 和 (3) 可得闭环时滞 LPV 重复过程为

$$
\begin{cases}
\dot{x}_{k+1}(t)=\hat{A}(\rho)x_{k+1}(t)+A_d(\rho)x_{k+1}(t-\tau(\rho))+\\
\qquad\hat{A}_1(\rho)y_k(t)+A_3(\rho)w_{k+1}(t),\\
y_{k+1}(t)=\hat{B}(\rho)x_{k+1}(t)+B_d(\rho)x_{k+1}(t-\tau(\rho))+\\
\qquad\hat{B}_1(\rho)y_k(t)+B_3(\rho)w_{k+1}(t),\\
z_{k+1}(t)=C(\rho)x_{k+1}(t)+C_1(\rho)y_k(t),\\
x_{k+1}(0)=0,\ \forall k\geqslant 0,\\
x_0(t)=0,\ \forall 0\leqslant t\leqslant\alpha.
\end{cases}\tag{4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\hat{A}(\rho)=A(\rho)+A_2(\rho)K_1(\rho),\\
&\hat{A}_1(\rho)=A_1(\rho)+A_2(\rho)K_2(\rho),\\
&\hat{B}(\rho)=B(\rho)+B_2(\rho)K_1(\rho),\\
&\hat{B}_1(\rho)=B_1(\rho)+B_2(\rho)K_2(\rho).
\end{aligned}
$$

3 H_∞ 状态反馈控制

本文的目标是: 给定时滞 LPV 重复过程 (1), 设计形如式 (3) 的无记忆 H_∞ 状态反馈控制器, 使闭环时滞 LPV 重复过程 (4) 渐近稳定, 且满足在零初始条件下 (即 $x_{k+1}(0)=0,\forall k\geqslant 0; y_0(t)=0,\forall 0\leqslant t\leqslant\alpha$) 对于任意的 $w_{k+1}(t)\in L_2\{[0,\infty),[0,\infty)\}$ 且不为 0, 有

$$\|z_{k+1}(t)\|_2<\gamma\|w_{k+1}(t)\|_2,\ \gamma>0.\tag{5}$$

其中

$$\|f(t)\|_2=\sqrt{\int_0^\infty f(t)^{\mathrm{T}}f(t)\mathrm{d}t}.$$

满足以上要求的控制器称为 H_∞ 状态反馈控制器.

3.1 闭环过程的稳定性与 H_∞ 性能分析

本节分析闭环时滞 LPV 重复过程 (4) 的稳定性和 H_∞ 性能. 首先给出一个有用的引理.

引理 1 给定一个对称矩阵 $\varXi\in R^{m\times m}$ 和两个具有适当维数的一般矩阵 M,N, 存在一个矩阵 U 使得线性矩阵不等式

$$\varXi+M^{\mathrm{T}}UN+N^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}M<0\tag{6}$$

成立的充分必要条件是下述不等式成立:

$$M^{\perp T}\varXi M^{\perp}<0,\ N^{\perp T}\varXi N^{\perp}<0.\tag{7}$$

其中: $M^{\perp}$ 和 $N^{\perp}$ 分别为其对应的直交补.

下面的定理将给出闭环过程 (4) 渐近稳定并满足 H_∞ 性能指标 $\gamma>0$ 的充分条件.

定理 1 考虑闭环时滞 LPV 重复过程 (4), 给定正常数 γ 和 τ, 对于任意的时滞 $\tau(\rho)$ 满足式 (2). 如果存在连续可微矩阵 $P(\rho)>0$, 常矩阵 $Q_1>0,Q_2>0,Q_3>0$ 使得如下参数线性矩阵不等式对于所有参数变化轨迹均成立:

$$
\begin{bmatrix}
\varPi_{11} & \varPi_{12} & \varPi_{13} & \varPi_{14} & C^{\mathrm{T}}(\rho) & \hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho) & \varPi_{17}\\
* & \varPi_{22} & 0 & 0 & 0 & B_d^{\mathrm{T}}(\rho) & \varPi_{27}\\
* & * & -Q_2 & 0 & C_1^{\mathrm{T}}(\rho) & \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho) & \varPi_{37}\\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & B_3^{\mathrm{T}}(\rho) & \varPi_{47}\\
* & * & * & * & -I & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -Q_2 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -Q_3
\end{bmatrix}<0.\tag{8}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\varPi_{11}=P(\rho)\hat{A}(\rho)+\hat{A}^{\mathrm{T}}(\rho)P(\rho)+Q_1+\\
&\qquad\sum_{i=1}^{s}(v_i\partial P(\rho)/\partial P_i)-Q_3,\\
&\varPi_{12}=P(\rho)A_d(\rho)+Q_3,\ \varPi_{13}=P(\rho)\hat{A}_1(\rho),\\
&\varPi_{14}=P(\rho)A_3(\rho),\ \varPi_{17}=\tau\hat{A}^{\mathrm{T}}(\rho)Q_3,\\
&\varPi_{22}=-(1-\sum_{i=1}^{s}(v_i\partial\tau(\rho)/\partial P_i))Q_1-Q_3,\\
&\varPi_{27}=\tau A_d^{\mathrm{T}}(\rho)Q_3,\ \varPi_{37}=\tau\hat{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)Q_3,\\
&\varPi_{47}=\tau A_3^{\mathrm{T}}(\rho)Q_3.
\end{aligned}
$$

则在零初始条件下对于任意的 $w_{k+1}(t)\in L_2\{[0,\infty),[0,\infty)\}$ 且不为 0, 闭环时滞 LPV 重复过程 (4) 渐近稳定且满足式 (5) 的 H_∞ 性能指标.

证明　建立闭环时滞LPV重复过程渐近稳定的条件. 选取如下的Lyapunov-Krasovskii函数:

$$\begin{cases} V(t,k)=V_1(t,k)+V_2(k,t)+V_3(t,k), \\ V_1(t,k)=x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)P(\rho)x_{k+1}(t)+ \\ \qquad \int_{t-\tau(\rho)}^{t} x_{k+1}^{\mathrm{T}}(s)Q_1x_{k+1}(s)\mathrm{d}s, \\ V_2(k,t)=y_k^{\mathrm{T}}(t)Q_2y_k(t), \\ V_3(t,k)=\tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}(\theta)Q_3\dot{x}_{k+1}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{9}$$

其中: $P(\rho)>0, Q_1>0, Q_2>0, Q_3>0$.

沿方程(4) ($w_{k+1}(t)=0$) 的解分别对式(9)中各式求导数, 得

$$\begin{aligned} &\dot{V}_1(t,k)= \\ &2x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)P(\rho)[\hat{A}(\rho)x_{k+1}(t)+ \\ &A_d(\rho)x_{k+1}(t-\tau(\rho))+\hat{A}_1(\rho)y_k(t)]+ \\ &x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\dot{P}(\rho)x_{k+1}(t)+x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)Q_1x_{k+1}(t)- \\ &\Big(1-\sum_{i=1}^{s}(v_i\partial\tau(\rho)/\partial P_i)\Big)\times \\ &x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t-\tau(\rho))Q_1x_{k+1}(t-\tau(\rho)), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\Delta V_2(k,t)= \\ &y_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)Q_2y_{k+1}(t)-y_k^{\mathrm{T}}(t)Q_2y_k(t)= \\ &x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho)Q_2\hat{B}(\rho)x_{k+1}(t)+ \\ &2x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho)Q_2B_d(\rho)_1x_{k+1}(t-\tau(\rho))+ \\ &2x_{k+1}(t)\hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho)Q_2\hat{B}_1(\rho)y_k(t)+ \\ &x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t-\tau(\rho))B_d^{\mathrm{T}}(\rho)Q_2B_d(\rho)\times \\ &x_{k+1}(t-\tau(\rho))+2x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t-\tau(\rho))\times \\ &B_d^{\mathrm{T}}(\rho)Q_2B_1(\rho)y_k(t)+ \\ &y_k^{\mathrm{T}}(t)[\hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho)Q_2B_1(\rho)-Q_2]y_k(t), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\dot{V}_3(t,k)\leqslant \\ &\tau^2\dot{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)Q_3\dot{x}_{k+1}(t)- \\ &\tau\int_{t-\tau(\rho)}^{t}\dot{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}(\theta)Q_3\dot{x}_{k+1}(\theta)\mathrm{d}\theta\leqslant \\ &\tau^2[\hat{A}(\rho)x_{k+1}(t)+A_d(\rho)x_{k+1}(t-\tau(\rho))+ \\ &\hat{A}_1(\rho)y_k(t)]^{\mathrm{T}}Q_3[\hat{A}(\rho)x_{k+1}(t)+ \\ &A_d(\rho)x_{k+1}(t-\tau(\rho))+\hat{A}_1(\rho)y_k(t)]- \\ &\int_{t-\tau(\rho)}^{t}\dot{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}(\theta)\mathrm{d}\theta Q_3\int_{t-\tau(\rho)}^{t}\dot{x}_{k+1}(\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

综合式(10)∼(12), 可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k,t)=&\dot{V}_1(t,k)+\Delta V_2(k,t)+\dot{V}_3(t,k)\leqslant \\ &\Phi_k^{\mathrm{T}}(t)\Pi\Phi_k(t). \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\Phi_k(t)=[\ x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\ \ x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t-\tau(\rho))\ \ y_k^{\mathrm{T}}(t)\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13}\\ * & \Pi_{22} & 0\\ * & * & -Q_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ B_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}Q_2\begin{bmatrix}\hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ B_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+ \\ \tau^2\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ A_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}Q_2\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ A_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

$\Pi_{11}, \Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{22}$ 在式(8)中已定义. 由式(8)可推出

$$\begin{bmatrix}\Pi_{11}+\lambda I & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho) & \tau\hat{A}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ * & \Pi_{22} & 0 & B_d^{\mathrm{T}}(\rho) & \tau A_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ * & * & -Q_2 & \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho) & \tau\hat{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\\ * & * & * & *-Q_2 & 0\\ * & * & * & * & -Q_3\end{bmatrix}<0, \tag{14}$$

其中 λ 为很小的正常数. 由Schur补可知, 式(8)等价于

$$\Pi+\begin{bmatrix}\lambda I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0. \tag{15}$$

因此, 对于任意 $\Phi_k(t)\neq 0$, 有

$$\Delta V(k,t)\leqslant\eta_k^{\mathrm{T}}(t)\Pi\eta_k(t)<-\lambda\left|\Xi_k(t)\right|^2<0. \tag{16}$$

根据Lyapunov稳定性定理可知, 当满足条件(8)时, 闭环时滞LPV重复过程(4) (当 $w_{k+1}(t)=0$ 时) 渐近稳定.

假定零初始条件下对于任意 $w_{k+1}(t)\in L_2\{[0,\infty),[0,\infty)\}$ 且不为0, 考虑如下性能指标:

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\alpha}[z_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)z_{k+1}(t)-\gamma^2w_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)w_{k+1}(t)]\mathrm{d}t. \tag{17}$$

根据得到的渐近稳定和零输入条件, 对于任意 $w_{k+1}(t)\in L_2\{[0,\infty),[0,\infty)\}$ 且不为0和 $t>0$, 有

$$J\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\alpha}\bar{\Phi}_k^{\mathrm{T}}(t)\bar{\Pi}\bar{\Phi}_k(t)\mathrm{d}t. \tag{18}$$

其中

$$\bar{\Phi}_k(t)=[\ x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\ \ x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t-\tau(\rho))\ \ y_k^{\mathrm{T}}(t)\ \ w_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\Pi}=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14}\\ * & \Pi_{22} & 0 & 0\\ * & * & -Q_2 & 0\\ * & * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ B_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\\ B_3^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}Q_2\times \\ \begin{bmatrix}\hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ B_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\\ B_3^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\tau^2\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ A_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\\ A_3^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}Q_2\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ A_d^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \hat{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\\ A_3^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+$$

$$\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}(\rho) \\ 0C_1^{\mathrm{T}}(\rho) \\ 0 \end{bmatrix} Q_2 \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}(\rho) \\ 0C_1^{\mathrm{T}}(\rho) \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

同理, 由式 (8) 能推导出

$$\bar{\Pi} + \begin{bmatrix} \lambda I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0, \tag{19}$$

其中 λ 为很小的正常数. 则对于任意 $\bar{\Phi}_k(t) \neq 0$, 有

$$J \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\alpha} \bar{\Phi}_k^{\mathrm{T}}(t) \bar{\Pi} \bar{\Phi}_k(t) \mathrm{d}t < \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\alpha} |\varsigma_k(t)|^2 \, \mathrm{d}t < 0. \tag{20}$$

当满足条件 (8) 时, 对于任意 $w_{k+1}(t) \in L_2\{[0,\infty),[0,\infty)\}$ 且不为 0, 闭环时滞 LPV 重复过程 (4) 渐近稳定且满足式 (5) 的 H_∞ 性能指标. □

注 1 本文研究状态在时间上趋于无穷大的时滞 LPV 重复过程的渐近稳定问题; 而一般重复过程研究的是沿通道的稳定, 即在一个固定通道上, 状态在有限时间内的稳定性问题.

注 2 定理 1 的证明考虑了线性参数变化较慢而不足以影响系统的动态特性, 基于 Lyapunov-Krasovskii 函数方法建立系统的渐近稳定性. 这种分析不具备全局性, 由此得到的结果具有一定的保守性.

注 3 定理 1 式 (9) 中含有 Lyapunov 函数矩阵与重复过程矩阵之间的耦合, 因此式 (9) 实际为参数 $\rho(t)$ 的非线性矩阵不等式, 这给控制器的设计带来了困难. 为此, 本文根据文献 [12], 通过引进附加矩阵来达到解耦的目的, 从而得到以下改进的稳定条件.

定理 2 考虑时滞 LPV 重复过程 (1), 给定正常数 γ 和 τ, 对于任意的时滞 $\tau(\rho)$ 满足式 (2), 如果存在连续可微矩阵 $P(\rho) > 0$, 常矩阵 $Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0$ 使得参数线性矩阵不等式 (21) 对于所有参数变化轨迹成立, 则在零初始条件下对于任意 $w_{k+1}(t) \in L_2\{[0,\infty),[0,\infty)\}$ 且不为 0, 闭环时滞 LPV 重复过程 (4) 渐近稳定且满足式 (5) 的 H_∞ 性能指标, 即

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & \Omega_{15} & 0 & 0 & U^{\mathrm{T}} & \tau Q_3 \\ * & \Omega_{22} & Q_3 & 0 & 0 & \Omega_{26} & \Omega_{27} & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{22} & 0 & 0 & 0 & \Omega_{37} & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_2 & 0 & \Omega_{46} & \Omega_{47} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & 0 & \Omega_{57} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Omega_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -Q_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{21}$$

其中

$$\Omega_{11} = -(U + U^{\mathrm{T}}),\ \Omega_{13} = U^{\mathrm{T}} A_d(\rho),$$
$$\Omega_{12} = P(\rho) + U^{\mathrm{T}} \hat{A}(\rho),\ \Omega_{14} = U^{\mathrm{T}} \hat{A}_1(\rho),$$
$$\Omega_{15} = U^{\mathrm{T}} A_3(\rho),$$
$$\Omega_{22} = -P(\rho) + Q_1 + \sum_{i=1}^{s} (v_i \partial P(\rho)/\partial \rho_i),$$
$$\Omega_{26} = C^{\mathrm{T}}(\rho),\ \Omega_{27} = \hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho),$$

Π_{22} 与式 (9) 中相同,

$$\Omega_{37} = B_d^{\mathrm{T}}(\rho),\ \Omega_{46} = C_1^{\mathrm{T}}(\rho),\ \Omega_{47} = B_1^{\mathrm{T}}(\rho),$$
$$\Omega_{55} = -\gamma^2 I,\ \Omega_{57} = B_3^{\mathrm{T}}(\rho),\ \Omega_{88} = -P(\rho).$$

证明 式 (21) 中的第 1 个 8×8 维的对角线子参数线性矩阵不等式可写为

$$\Xi + M^{\mathrm{T}} U N + N^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} M < 0. \tag{22}$$

其中

$$M = [\, -I \ \ \hat{A}(\rho) \ \ A_d(\rho) \ \ \hat{A}_1(\rho) \ \ A_3(\rho) \ \ 0 \ \ 0 \ \ I \,],$$
$$N = [\, I \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \,],$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} 0 & P(\rho) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Omega_{22} & Q_3 & 0 & 0 & C^{\mathrm{T}}(\rho) & \hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho) & 0 \\ * & * & \Pi_{22} & 0 & 0 & 0 & B_d(\rho) & 0 \\ * & * & * & -Q_2 & 0 & C^{\mathrm{T}}(\rho) & \hat{B}_1(\rho) & 0 \\ * & * & * & * & \gamma^2 I & 0 & B_3(\rho) & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -P(\rho) \end{bmatrix}.$$

矩阵 M, N 的直交补可分别选择为 $M^\perp, N^\perp$, 即

$$M^\perp = \begin{bmatrix} \hat{A}(\rho) & A_d(\rho) & \hat{A}_1(\rho) & A_3(\rho) & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$N^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

因此, 应用引理 1 可知, 式 (22) 等价于

$$M^{\perp \mathrm{T}} \Xi M^{\perp} < 0, \tag{23}$$

$$N^{\perp \mathrm{T}} \Xi N^{\perp} < 0. \tag{24}$$

根据 Schur 补可知, 式 (23) 等价于式 (8) 中第 1 个 6×6 维的对角线子参数线性矩阵不等式, 而 (24) 却包含于条件 (23) 中, 于是可定义对角矩阵

$$\begin{bmatrix} M^{\perp \mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{25}$$

用式 (25) 对参数线性矩阵不等式 (21) 进行全等变换, 便可得到定理 1 中的式 (8). 因此, 条件 (21) 能够保证闭环时滞 LPV 重复过程 (4) 渐近稳定且满足式 (5) 的 H_∞ 性能指标. □

3.2 控制器求解

与定理 1 相比, 定理 2 更有利于数值的实现, 可以方便地应用于控制系统的分析与综合. 下面根据定理 2 给出时滞 LPV 重复过程的 H_∞ 状态反馈控制器的求解方法.

定理 3 考虑闭环时滞 LPV 重复过程 (4), 给定正常数 γ 和 τ, 对于任意的时滞 $\tau(\rho)$ 满足式 (2), 存在形如式 (3) 的无记忆 H_∞ 状态反馈控制器, 使得闭环时滞 LPV 重复过程 (4) 渐近稳定且满足式 (5) 的 H_∞ 性能指标的充分条件是: 存在连续可微矩阵 $\tilde{P}(\rho) > 0$, 常矩阵 $\tilde{Q}_1 > 0, \tilde{Q}_2 > 0, \tilde{Q}_3 > 0$ 和一般矩阵 $\tilde{K}_1(\rho)$, $\tilde{K}_2(\rho)$ 以及常矩阵 V, 使得如下参数线性矩阵不等式对于所有参数变化轨迹成立:

$$\begin{bmatrix}
\bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & \bar{\Omega}_{13} & \bar{\Omega}_{14} & \bar{\Omega}_{15} & 0 & 0 & V & \tau Q_3 \\
* & \bar{\Omega}_{22} & \bar{Q}_3 & 0 & 0 & \bar{\Omega}_{26} & \bar{\Omega}_{27} & 0 & 0 \\
* & * & \bar{\Omega}_{33} & 0 & 0 & 0 & \bar{\Omega}_{37} & 0 & 0 \\
* & * & * & -\bar{Q}_2 & 0 & \bar{\Omega}_{46} & \bar{\Omega}_{47} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \bar{\Omega}_{55} & 0 & \bar{\Omega}_{57} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\bar{Q}_2 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \bar{\Omega}_{88} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{Q}_3
\end{bmatrix} < 0. \tag{26}$$

其中

$$\bar{\Omega}_{11} = -(V + V^{\mathrm{T}}),\ \bar{\Omega}_{13} = A_d(\rho)U,$$

$$\bar{\Omega}_{12} = \tilde{P}(\rho) + A(\rho)V + A_2(\rho)\bar{K}_1(\rho),$$

$$\bar{\Omega}_{14} = A_1(\rho)V + A_2(\rho)\bar{K}_2(\rho),\ \bar{\Omega}_{15} = A_3(\rho),$$

$$\bar{\Omega}_{22} = -\tilde{P}(\rho) + \bar{Q}_1 + \sum_{i=1}^{s}(v_i \partial \tilde{P}(\rho)/\partial \rho_i),$$

$$\bar{\Omega}_{26} = V^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}(\rho),$$

$$\bar{\Omega}_{27} = V^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}(\rho) + \bar{K}_1^{\mathrm{T}}(\rho) B_2^{\mathrm{T}}(\rho),$$

$$\bar{\Omega}_{33} = -\Big[1 - \sum_{i=1}^{s}(v_i \partial \tau(\rho)/\partial \rho_i)\Big]\bar{Q}_1 - \bar{Q}_3,$$

$$\bar{\Omega}_{37} = V^{\mathrm{T}} B_d^{\mathrm{T}}(\rho),\ \bar{\Omega}_{46} = C_1^{\mathrm{T}}(\rho),$$

$$\bar{\Omega}_{47} = V^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}}(\rho) + \bar{K}_2^{\mathrm{T}}(\rho) B_2^{\mathrm{T}}(\rho),$$

$$\bar{\Omega}_{55} = -\gamma^2 I,\ \bar{\Omega}_{57} = B_3^{\mathrm{T}}(\rho),\ \bar{\Omega}_{88} = -\bar{P}(\rho).$$

此外, 若上述参数线性矩阵不等式 (26) 有可行解, 则 H_∞ 状态反馈控制器的参数可由下式求得:

$$K_1(\rho) = \bar{K}_1(\rho)V^{-1},\ K_2(\rho) = \bar{K}_2(\rho)V^{-1}. \tag{27}$$

证明 由于满足条件 (21) 的附加矩阵 U 可逆. 令 $V = U^{-1}$, 用矩阵 $J = \mathrm{diag}\{V, V, V, V, I, I, V, V, V\}$ 对式 (21) 进行全等变换, 得

$$\begin{bmatrix}
\bar{\Omega}_{11} & \hat{\Omega}_{12} & \bar{\Omega}_{13} & \hat{\Omega}_{14} & \bar{\Omega}_{15} & 0 & 0 & V & \hat{\Omega}_{19} \\
* & \hat{\Omega}_{22} & \hat{\Omega}_{23} & 0 & 0 & \bar{\Omega}_{26} & \hat{\Omega}_{27} & 0 & 0 \\
* & * & \hat{\Omega}_{33} & 0 & 0 & 0 & \bar{\Omega}_{37} & 0 & 0 \\
* & * & * & \hat{\Omega}_{44} & 0 & \bar{\Omega}_{46} & \hat{\Omega}_{47} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \hat{\Omega}_{55} & 0 & \bar{\Omega}_{57} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \hat{\Omega}_{77} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \hat{\Omega}_{88} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & \hat{\Omega}_{99}
\end{bmatrix} < 0. \tag{28}$$

其中

$$\hat{\Omega}_{12} = V^{\mathrm{T}} P(\rho) + \hat{A}(\rho)V,\ \hat{\Omega}_{14} = \hat{A}_1(\rho)V,$$

$$\hat{\Omega}_{15} = A_3(\rho),\ \hat{\Omega}_{19} = \tau V^{\mathrm{T}} \bar{Q}_3 V,$$

$$\hat{\Omega}_{22} = V^{\mathrm{T}}(-P(\rho) + \Omega_{22})V,\ \hat{\Omega}_{23} = V^{\mathrm{T}} Q_3 V,$$

$$\hat{\Omega}_{27} = V^{\mathrm{T}} \hat{B}^{\mathrm{T}}(\rho),\ \hat{\Omega}_{33} = V^{\mathrm{T}}(\Pi_{22} - Q_3)V,$$

$$\hat{\Omega}_{44} = -V^{\mathrm{T}} Q_2 V,\ \hat{\Omega}_{47} = V^{\mathrm{T}} \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(\rho),$$

$$\hat{\Omega}_{55} = -\gamma^2 I,\ \hat{\Omega}_{77} = -V^{\mathrm{T}} Q_2 V,$$

$$\hat{\Omega}_{88} = -V^{\mathrm{T}} P(\rho),\ \hat{\Omega}_{99} = -V^{\mathrm{T}} Q_3 V.$$

定义矩阵 $\bar{P}(\rho) = V^{\mathrm{T}} P(\rho) V$, $\bar{Q}_1 = V^{\mathrm{T}} Q_1 V$, $\bar{Q}_2 = V^{\mathrm{T}} Q_2 V$, $\bar{Q}_3 = V^{\mathrm{T}} Q_3 V$, 并令 $\bar{K}_1(\rho) = K_1(\rho)V$, $\bar{K}_2(\rho) = K_2(\rho)V$, 可得到式 (26). □

4 仿真研究

考虑形如式 (1) 的时滞 LPV 重复过程, 已知如下参数矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 + 0.2\rho_1 \\ -2 & -3 + 0.1\rho_2 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0.2\rho_1 & 0.2 \\ -0.2 + 0.1\rho_2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 + 0.1\rho_1 \\ 0.1 & 0.4 + 0.1\rho_2 \end{bmatrix},\ B_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2\rho_1 \\ 0 & 0.2 - 0.3\rho_2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5\rho_1 & 0.2 \\ 0.2\rho_2 & 0.1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 + 0.2\rho_1 \\ 0 & 0.5 + 0.1\rho_2 \end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-0.5+0.1\rho_1 & 0.2\\ 0.2 & -0.1+0.2\rho_2\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0.2\rho_1\\ 0.1+0.1\rho_2\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0.1\rho_1 & 0.2\\ 0.2 & -0.1+0.3\rho_2\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}0.2\rho_1\\ 0.1+0.1\rho_2\end{bmatrix}.$$

其中: $\rho_1(t)=\sin t,\rho_2(t)=|\cos t|$ 为时变参数, 且满足 $\rho_1(t)\in[-1,1],\rho_2(t)\in[-1,1]$. $\tau(\rho)=0.5\rho_2(t)$ 为时变时滞, $\tau=0.5$ 代表最大时滞. 根据近似基函数和网格技术[13], 将定理 3 中式 (26) 的无限维线性矩阵不等式转化为有限维线性矩阵不等式组. 选取基函数为 $f_1(\rho)=1,f_2(\rho)=\rho_1(t),f_3(\rho)=\rho_2(t)$, 于是有 $Y(\rho)=Y_1+\rho_1(t)Y_2+\rho_2(t)Y_3$. 应用 Matlab 线性矩阵不等式工具箱, 可得 H_∞ 噪声抑制水平的 $\gamma^*=1.2512$, 同时可求得 H_∞ 状态反馈控制器参数为

$$\begin{aligned}K_1(\rho)=\;&1.0\times10^3[\,-1.4056\ \ 3.1653\,]+\\ &1.0\times10^3[\,-0.4845\ \ 1.4376\,]\rho_1(t)+\\ &1.0\times10^3[\,0.0296\ \ 0.1278\,]\rho_2(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_2(\rho)=\;&[\,-0.3654\ \ -0.1087\,]+\\ &[\,-0.7815\ \ -1.5068\,]\rho_1(t)+\\ &[\,0.7326\ \ 0.8954\,]\rho_2(t).\end{aligned}$$

5 结 论

本文针对时滞 LPV 重复过程, 采用参数依赖 Lyapunov 方法和参数线性矩阵不等式技术, 研究其 H_∞ 状态反馈控制问题. 通过投影定理引入两个附加矩阵, 解除了系统矩阵和依赖于参数的 Lyapunov 函数矩阵之间的耦合, 使得到的条件便于求解. 所得的结论均是时滞相关条件, 比时滞无关条件具有更小的保守性. 仿真结果验证了本文所给出设计方案的有效性.

参考文献(References)

[1] Xu S, Lam J, Lin Z, et al. Positive real control of 2D systems: Roesser models and linear repetitive processes[J]. Int J of Control, 2003, 76(11): 1047-1058.

[2] Gao Huijun, Lam James, Xu Shengyuan, et al. Stability and stabilization of uncertain 2D discrete systems with stochastic perturbation[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2005, 16: 85-106.

[3] Galkowski K, Lam J, Rogers E, et al. LMI based stability analysis and robust controller design for discrete linear repetitive processes[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(13): 1195-1211.

[4] Sulikowski B, Galkowski K, Rogers E, et al. Output feedback control of discrete linear repetitive processes[J]. Automatica, 2004, 40(12): 2167-2173.

[5] Dymkov M, Gaishun I, Galkowski K, et al. Exponential stability of discrete linear repetitive processes[J]. Int J of Control, 2002, 75(12): 861-869.

[6] Paszke W. Analysis and synthesis of multidimensional system classes using linear matrix inequality methods[D]. Poland: University of Zielona Gora, 2005.

[7] 吴立刚, 胡跃明. 线性连续重复过程的 L_2-L_∞ 滤波[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 919-923.
(Wu L G, Hu Y M. L_2-L_∞ filtering for linear differential repetitive processes[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 919-923.)

[8] 吴立刚, 胡跃明. 线性连续重复过程的 H_∞ 模型降阶[J]. 控制与决策, 2008, 23(10): 1196-1200.
(Wu L G, Hu Y M. H_∞ model reduction for linear differential repetitive processes[J]. Control and Decision, 2008, 23(10): 1196-1200.)

[9] Mahmoud M S. Linear parameter-varying discrete time-delay systems: Stability and L_2 gain controllers[J]. Int J of Control, 2000, 73(6): 481-494.

[10] 吴立刚, 王常虹, 高会军. 一类分布式时滞 LPV 系统的鲁棒 H_∞ 滤波[J]. 控制与决策, 2006, 21(9): 1059-1064.
(Wu L G, Wang C H, Gao H J. Robust H_∞ filtering for a class of LPV systems with distributed delays[J]. Control and Decision, 2006, 21(9): 1059-1064.)

[11] Wang J, Yuan W. Observer-based gain-scheduled H_∞ control for LPV systems with time-varying state delay[C]. Int conf on Mechatronics and Automation. Chengdu, 2008: 534-539.

[12] Apkarian P C, Tuan H D, Bernussou J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities(LMI) Characterizations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(12): 1941-1946.

[13] Wu F, Grigoriadis K M. LPV systems with parameter-varying time delays: Analysis and synthesis[J]. Automatica, 2001, 37(2): 221-229.