

文章编号: 1001-0920(2010)01-0084-05

一类优化问题的分解算法

邢进生

(山西师范大学 数学与计算机科学学院, 山西 临汾 041004)

摘要: 讨论一类大规模系统的优化问题, 提出一种递阶优化方法. 该方法首先将原问题转化为多目标优化问题, 证明了原问题的最优解在多目标优化问题的非劣解集中, 给出了从多目标优化问题的解集中挑出原问题最优解的算法, 建立了算法的理论基础. 仿真结果验证了算法的有效性.

关键词: 大系统; 分解-协调算法; 多目标优化

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

Decomposition algorithm on a class of optimization problems

XIN G Jirsheng

(School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen 041004, China. E-mail: xjs@dns.sxnu.edu.cn)

Abstract: The optimization problem for a class of large-scale systems is considered. A hierarchical optimization method is proposed, which converts the original problem into multi-objective optimization problem. It is proved that the optimal solution of the original nonseparable problem is in the set of solutions of multi-objective optimization problem. An algorithm is given, which can select out the optimal solution of the original nonseparable optimization problem from the set of solutions of multiobjective optimization problem. Theoretical base of the algorithm is established. Simulation result shows effectiveness of the algorithm.

Key words: Large scale system; Decomposition-coordinating principle algorithm; Multi-objective optimization

1 引言

如果对现有的、处理大规模优化问题的多级方法, 以整体有效性进行排序, 原始-对偶法^[1]将处在显著位置. 该方法以分解-协调原理为基础, 在使用时, 将整体问题分解为规模较小的、通过互连方程相联系的一系列子问题. 以此为基础, 发展了关联平衡法和关联预测法^[2]. 这两种方法是大系统理论的根本基石, 其中蕴涵的分解-协调原理是系统科学对处理复杂系统的突出贡献. 原始-对偶法能够用于许多问题, 而且相当有效. 它所解决的问题必须满足整体目标函数关于各子系统的决策变量是可分的.

然而, 决策者面临的优化问题常常具有下列特点: 系统可能是线性的或者非线性, 可能是单变量或多变量, 也可能存在序列扰动或连续扰动. 在这种优化问题中, 用一个目标去度量系统的性能是不实际的. 尽管采用单一的性能指标在数学上极大简化了所要解决的问题, 但决策者必须关注系统的整个运

行过程、许多特性和指标. 对于大规模系统而言, 它总是多功能、多目标、多属性的, 相互之间可能存在冲突, 要保证每个目标都达到最优是不可能的. 工程上处理这类问题的一个行之有效的方法是采用效用函数法, 即整体目标函数取为多个性能指标的非线性函数. 这便导致了在原始-对偶意义下的不可分优化问题.

对于可分问题, 能够用原始-对偶算法, 把大规模问题分解为 N 个维数较小的子问题进行有效求解; 对于不可分问题, 可近似地用各目标的线性加权和近似整体目标, 将不可分问题变成可分问题, 再用原始-对偶方法求解; 另外, 也可利用人工智能的算法进行处理^[3-5]. 然而, 这种策略和方法仅能得到次优解, 特别当整体目标与某个子目标之间存在严重的非线性关系时, 无论怎么选权系数或算法, 加权和都不能作为整体目标的一个较好的近似, 甚至这种近似最优解可能与实际最优解相差很大. 对于不

收稿日期: 2009-02-20; 修回日期: 2009-06-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574060); 山西省自然科学基金项目(2006011039).

作者简介: 邢进生(1964—), 男, 太原人, 教授, 博士, 从事智能控制、数据挖掘等研究.

可分的动态优化问题, Li 引入了 k -次可分性^[6], 解决了一类不可分的优化问题. 对于不可分静态优化问题, Title 等人引入伪变量作为可分性策略, 给出了优化算法^[7]. 但是, 该方法仅适用于一类特殊问题, 且没有讨论算法收敛性问题.

本文以两个目标函数为例, 在原始-对偶框架下, 解决了非线性效用函数的优化问题. 具体做法是: 将不可分问题嵌入到一个多目标优化问题中, 证明原不可分问题的最优解在多目标优化问题的非劣解集中; 然后用原始-对偶算法从非劣解集中挑出原问题的最优解. 本文方法的突出特点在于既运用了原始-对偶算法的分解特点, 还找到了不可分问题的最优解.

2 原始-对偶算法

本节首先介绍原始-对偶(Primal-Dual)算法, 它是以后各节讨论的基础. 考虑下面形式的大规模优化问题:

$$(PD) \quad \min t(x), \\ \text{s. t. } h(x) = 0.$$

其中 $t: R^n \rightarrow R, h: R^n \rightarrow R^m (m < n)$ 是给定的函数. 在约束优化问题(PD)中, 当 t 和 h 具有如下特殊结构时:

$$t(x) = \sum_{i=1}^N t_i(x^i), \quad h(x) = \sum_{i=1}^N h_i(x^i),$$

如果视 x^i 为第 i 个子系统的决策变量, $t_i(x^i)$ 为第 i 个子系统的目标函数, 则目标函数 $t(x)$ 表示整个大系统的目标函数为各子系统目标函数之和, 且决策时, 子系统之间没有竞争, 整体约束条件 $h(x)$ 为各子系统约束之和. 式中 $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)^T, t_i: R^{k_i}$

$R, h_i: R^{k_i} \rightarrow R^m$, 且 $\sum_{i=1}^N k_i = n$.

目标函数和约束条件中没有出现交叉项, 这种形式便是所谓的可分性形式, 正是这一特点, 才能采用原始-对偶方法把一个大规模优化问题分解为几个规模较小的子问题, N 的大小代表了问题的规模.

问题(PD)的 Lagrangian 函数 L 为

$$L(x, \lambda) = t(x) + \lambda^T h(x),$$

其中 λ 是 Lagrange 乘子. 对偶函数为

$$D(\lambda) = \min_x L(x, \lambda).$$

可以证明, 在目标函数与约束满足凸性的条件下, 问题(DP)等价于 $\max D(\lambda)$. 因此, 可用梯度法获得 $\max D(\lambda)$ 的最优解, 即

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \nabla D(\lambda_k).$$

其中 k 为迭代次数, $\nabla D(\lambda_k)$ 是对偶函数 $D(\lambda)$ 在 λ_k

处的梯度向量, 为步长参数.

根据对偶函数 $D(\lambda)$ 的定义, 容易看出下面的关系式成立:

$$\max_{\lambda} D(\lambda) = \max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda).$$

上式表明: 对偶问题的最大化可通过右边的两级算法来实施, 第 1 级(也称为下级)就是对固定的 λ , 解最小化问题 $\min_x L(x, \lambda)$; 第 2 级(也称为上级)用梯度法解对偶问题. 观测第 1 级优化问题的特点, 显然有

$$\min_x L(x, \lambda) = \min_{i=1}^N \min_{x^i} [t_i(x^i) + \lambda^T h_i(x^i)].$$

这表明: 当大规模问题具有前述的可分性结构时, 它能够被分解成中括弧内的 N 个具有较小维数的最小化问题. 这就是原始-对偶算法的分解原理: 对于上级给定的协调变量 λ , 下级独立求解 N 个子问题; 然后把所求的解报告上级, 上级根据当前的解重新修正协调变量 λ . 这样, 通过上下两级不断地信息交换, 最终可以得到原问题的最优解.

3 问题描述

考虑下面的大规模不可分优化问题:

$$(NOP) \quad \min_x [t_1(x) + \phi(t_2(x))], \\ \text{s. t. } h(x) = 0.$$

其中

$$t_1(x) = \sum_{i=1}^N t_{1i}(x^i), \quad t_2(x) = \sum_{i=1}^N t_{2i}(x^i), \\ h(x) = \sum_{i=1}^N h_i(x^i), \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^N)^T.$$

为研究问题(NOP), 需要下面一些基本假定.

假定 1 $t_{ij}, h_i, \phi(u)$ 是可微函数.

假定 2 $t_1(x), t_2(x), h(x)$ 关于决策变量 x^i 是可分的, 且 $t_1(x), t_2(x)$ 是凸函数.

假定 3 $\phi(u)$ 是严格增函数.

以上 3 个假定是建立本文算法的理论基础, 由于后面的算法以梯度信息为工具, 因此问题中所有函数必须可微, $\phi(u)$ 的凸性要求避免了梯度信息搜索容易陷入局部最优的困难. 尽管这些假设限制了本文方法的应用范围, 产生了保守性, 但保证了该方法严密的理论基础.

如果记整体目标函数为

$$t(x) = t_1(x) + \phi[t_2(x)],$$

显然有 $\partial t / \partial t_1 > 0$, 根据假定 3, 有 $\partial t / \partial t_2 > 0$. 这两个不等式表明: 系统的两个目标函数或者性能指标 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 的改善, 必然导致整体目标函数或者性能的改善.

问题(NOP)代表了相当广泛的一类优化问题.

例1 在决策、控制理论与工程中,常常遇到的以方差为目标函数的优化问题,目标函数有如下形式:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \left[f_i(x_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \right]^2,$$

展开后整理得

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_i^2(x_i) - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N f_i(x_i) \right)^2.$$

取 $t_1(x) = \sum_{i=1}^N f_i^2(x_i)$, $t_2(x) = \left(\sum_{i=1}^N f_i(x_i) \right)^2$, 则 $f(x) = t_1(x) - \frac{1}{N} t_2(x)$, 这正好是问题(NOP)的形式.

例2 随机序列决策分析中的目标函数^[8,9]常取如下形式:

$$f(s_1, x_1, s_2, x_2, \dots, s_N, x_N) = \sum_{i=1}^N f_i(s_i, x_i) + \left[\sum_{i=1}^N g_i(s_i, x_i) \right]^{1/2}.$$

取 $t_1 = \sum_{i=1}^N f_i(s_i, x_i)$, $t_2 = \sum_{i=1}^N g_i(s_i, x_i)$, $(u) = \sqrt{u}$, $u \geq 0$, 则 $f = t_1 + t_2$, 这也是问题(NOP)中目标函数的形式.

另外,可靠性问题、效用问题的目标函数都具有问题(NOP)的形式.因此,深入研究问题(NOP)的求解方法十分重要.

4 可分性策略

对于不可分问题(NOP),构造下面的多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad & \min_x [t_1(x), t_2(x)]^T, \\ \text{s. t.} \quad & h(x) = 0. \end{aligned}$$

对于多目标优化问题,使每个目标函数都能达到最优的解是不存在的,一般来说,仅关心非劣解.

定义1 设 x^* 是多目标优化问题(MOP)的可行解,如果不存在(MOP)的可行解 x ,使得

$$t_i(x) < t_i(x^*), \quad i = 1, 2$$

至少有一个不等式成立,则称 x^* 是多目标优化问题(MOP)的非劣解.实质上非劣解就是在可行域中,没有比它更好的解.

定理1 原问题(NOP)的最优解是多目标优化问题(MOP)的一个非劣解.

证明 设 x^* 是原问题(NOP)的最优解.用反证法,假定 x^* 不是问题(MOP)的一个非劣解,那么存在一个可行解 x 使得

$$t_i(x) < t_i(x^*), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

至少有一个严格的不等式成立.根据假定3,关于 $t_2(x)$ 是严格递增的,根据式(1)有

$$t_1(x) + [t_2(x)] < t_1(x^*) + [t_2(x^*)],$$

即

$$t(x) < t(x^*).$$

这与 x^* 是原问题(NOP)的最优解矛盾.因此, x^* 是问题(MOP)的一个非劣解.

定理1表明:原不可分问题(NOP)的最优解在多目标优化问题(MOP)的非劣解集中,而非劣解构成的集合一般比可行解要少得多,且求非劣解已有许多成熟的方法,这样仅需关注(MOP)的非劣解集便可找出原问题的最优解.由于 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 是凸函数,(MOP)的所有非劣解可由下面的加权Lagrangian问题产生:

$$\begin{aligned} (\text{WLP}) \quad & \min t_1(x) + t_2(x), \\ \text{s. t.} \quad & h(x) = 0. \end{aligned}$$

其中 λ 为正的权系数.问题(WLP)的目标函数为

$$t_1(x) + t_2(x) = \sum_{i=1}^n [t_{1i}(x_i) + t_{2i}(x_i)].$$

由此看出问题(WLP)的目标函数是可分的,给定 λ , 它的解可用原始对偶算法求出,即把一个大规模问题分解成一些维数较小的子问题并行求解.

用反证法容易证明,问题(WLP)的最优解一定是(MOP)的非劣解,同时由 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 的凸性假定,(MOP)非劣前沿上的每一点都存在支撑平面,因而其所有非劣解都可用(WLP)的最优解产生.给定一个正数 λ ,解(WLP)可得到(MOP)的一个非劣解,让 λ 取遍其定义域中的所有值,便可得到(MOP)的全部非劣解.那么究竟非劣解集中,哪个非劣解是原问题的最优解,下面给出最优性定理.

定理2 设 x^* 是(NOP)的最优解,则在(WLP)中,由 $\lambda^* = [t_2(x^*)]$ 产生的非劣解是(NOP)的最优解.

证明 设 x^* 是(NOP)的最优解,最优性条件

$$\frac{\partial}{\partial x} [t_1(x) + \lambda^* [t_2(x)]] \Big|_{x=x^*} = 0.$$

因上式左边的导数为向量,进一步可写成如下形式:

$$\frac{\partial t_1(x^*)}{\partial x} + \lambda^* [t_2(x^*)] \frac{\partial b(x^*)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

假设 λ^* 对应的非劣解为(NOP)的最优解,由问题(WLP)和文献[10],有

$$\frac{\partial t_1(x^*)}{\partial x} + \lambda^* \frac{\partial b(x^*)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

结合式(2)和(3),可得到 $\lambda^* = [t_2(x^*)]$.故定理得证.

5 参数的校正公式

对于给定的 λ ,求解问题(WLP),所得的解记为 $x(\lambda)$.若最优性条件 $\frac{\partial}{\partial x} [t_1(x) + \lambda [t_2(x)]] = 0$ 满足,则 $x(\lambda)$ 为问题(NOP)的最优解;否则,要修正 λ .下面推导

的修正公式,从而获得一种新算法.

令 $t(x) = t_1(x) + [t_2(x)]$, 则 $t(x)$ 关于 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 的梯度为

$$\nabla t = \left[\frac{\partial t}{\partial t_1}, \frac{\partial t}{\partial t_2} \right]^T = [1, (t_2)]^T. \quad (4)$$

设 $w = [1,]^T$, 构造如下方向向量:

$$V(w) = [V_1(w), V_2(w)]^T = -\nabla t + \frac{w^T \nabla t}{w^T w} w. \quad (5)$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\nabla t^T \cdot V(w) = -\|\nabla t(w)\|^2 + \frac{(w^T \nabla t)^2}{w^T w} = 0,$$

说明 $V(w)$ 是 $t(x)$ 的一个下降方向.

假设 $V(w) = 0$, 根据式(5)中 $V(w)$ 的定义, 有

$$\frac{w^T \nabla t}{w^T w} - 1 = 0, \quad \frac{w^T \nabla t}{w^T w} - (t_2) = 0,$$

即 $[t_2(x)]$, 这便是定理 2 的最优性条件. 因此可以得出一个结论, 定理 2 的最优性条件与 $V(w) = 0$ 等价.

设第 s 次迭代所用的 w 记为 w_s , 问题 (WLP) 的解为 x_s . 构造如下问题:

$$\begin{aligned} \min & t_1(x); \\ \text{s. t. } & t_2(x) - t_2(x_s) - V_2(w_s), h(x) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

则问题(6)的 Lagrangian 问题为

$$\begin{aligned} \min L(x, \mu) &= t_1(x) + \mu [t_2(x) - t_2(x_s) - V_2(w_s)], \\ \text{s. t. } & h(x) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)的对偶问题为

$$H(\mu) = \min_x L(x, \mu), \quad h(x) = 0.$$

最优点 (x^*, μ^*) 实际就是问题 $\max_{\mu} \min_x L(x, \mu)$ 的解. 对于给定的 μ , (x_s, w_s) 为已知参数, 因此从式(7)可以看出, 求解 $\min_x L(x, \mu)$ 与求解问题 (WLP) 完全等价. 因此, 问题(7)中的 μ 与问题 (WLP) 中的 μ 本质上是完全相同的. μ^* 可使对偶函数 $H(\mu)$ 达到最大, 即

$$H(\mu^*) = \max_{\mu} H(\mu).$$

因此 μ^* 的搜索可用梯度法进行, 于是下次的 μ 值为

$$\mu_{s+1} = \mu_s + \alpha \frac{\partial H(\mu_s)}{\partial \mu}. \quad (8)$$

而 $\frac{\partial H(\mu)}{\partial \mu} = -V_2(w)$, 迭代终止的条件为 $\frac{\partial H}{\partial w} = 0$, 即 $V_2(w) = 0$, 满足原问题的最优性条件. 这样第 $s + 1$ 次的校正公式为

$$w_{s+1} = w_s - V_2(w_s), \quad (9)$$

其中 $V_2(w_s)$ 可按式(5)的定义数值求出.

综上所述, 解决问题 (NOP) 的算法为:

Step1: 对于给定的 w , 用原始-对偶算法求解问

题 (WLP);

Step2: 用式(9)校正.

每校正一次, 问题 (WLP) 被求解一次, 即产生问题 (MOP) 的非劣解. 校正结束的条件为 $V(w) = 0$, 这等同于从问题 (MOP) 的非劣解集中挑出, 找到了原问题 (NOP) 的最优解.

6 算 例

假设系统的整体约束为

$$t_{11} + t_{21} - 7 = 0, \quad t_{12} + t_{22} - 20 = 0.$$

其中

$$t_{11}(x_1) = 2x_{11} + 2x_{12} - 4x_{13},$$

$$t_{21}(x_2) = x_{21} - x_{22} + 5x_{23},$$

$$t_{12}(x_1) = 2x_{11} + 3x_{12} + x_{13},$$

$$t_{22}(x_2) = x_{21} + 7x_{22} + x_{23}.$$

系统的各性能指标分别为

$$f_{11}(x_1) = x_{11}^4 + 6x_{11}^2 x_{12}^2 + x_{11} x_{12}^3 -$$

$$6x_{11} x_{13}^2 - x_{12} x_{13} + 4x_{13}^3,$$

$$f_{21}(x_2) = 4x_{21}^2 + 2x_{21} x_{22} + 2x_{22}^2 +$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23}^2,$$

$$f_{12}(x_1) = x_{11}^2 + 2x_{11} x_{12} + 4x_{11} x_{13} + 3x_{12}^2 +$$

$$2x_{12} x_{13} + 5x_{13}^2 + 4x_{11} - 2x_{12} + 2x_{13},$$

$$f_{22}(x_2) = x_{21}^2 - 4x_{21} x_{22} + 6x_{21} x_{23} +$$

$$5x_{22}^2 - 10x_{22} x_{23} + 8x_{23}^3.$$

系统由两个子系统构成, 两个子系统的决策变量为 x_1 和 x_2 , 其中 $x_1 = [x_{11}, x_{12}, x_{13}]^T$, $x_2 = [x_{21}, x_{22}, x_{23}]^T$. 这表明每个子系统共有 3 个决策变量. 度量系统的两个性能指标分别为 $t_1(x_1, x_2)$ 和 $t_2(x_1, x_2)$, 其中

$$t_1(x_1, x_2) = f_{11}(x_1) + f_{21}(x_2),$$

$$t_2(x_1, x_2) = f_{12}(x_1) + f_{22}(x_2).$$

整体性能指标为 $t_1 + \Phi(t_2)$, 其中 $\Phi(u) = u^2$.

优化问题为

$$\min [t_1 + \Phi(t_2)];$$

$$\text{s. t. } t_{11} + t_{21} - 7 = 0,$$

$$t_{12} + t_{22} - 20 = 0.$$

显然, t_1, t_2 满足假设 1 ~ 假设 3, 根据第 3 节的分析, 工程中的方差最小化问题, 可以转化为该问题, 只是目标函数中相差一个长数因子 N .

用本文的算法就是对于给定的参数 w , 用原始-对偶算法求解问题 (WLP), 即

$$\min [t_1 + t_2];$$

$$\text{s. t. } t_{11} + t_{21} - 7 = 0,$$

$$t_{12} + t_{22} - 20 = 0.$$

然后用式(9)校正, 误差为

$$e = \left| -\Phi(t_2) + \frac{1 + \Phi(t_2)}{1 + \frac{1}{2}} \right|.$$

变量的初值均取为 0.5,校正 的步长取为 0.02,下级的步长均取为 0.01, 经过 18 次校正,误差 e 小于 0.001. 所得的最优解为

$$x_1^* = (-0.0360, 0.3149, 0.1441),$$

$$x_2^* = (-0.0888, -0.1318, -0.0048).$$

目标函数值为 -0.0890, 最优的 $\lambda^* = 0.0181$, $\phi(t_2) = 0.0182$.

如果用工程上加权近似法来近似整体目标函数,即

$$t_1(x) + [t_2(x)]^2 \quad w_1 t_1(x) + w_2 t_2(x) =$$

$$w_1 [t_1(x) + \frac{w_2}{w_1} t_2(x)] = w_1 [t_1(x) + t_2(x)].$$

显然,给定一个 λ , 由于目标函数 $t_1(x) + t_2(x)$ 是可分的,可直接获得原问题的近似最优解. 下面给出一组 λ 的值,用原始-对偶法求解对应的性能指标值,结果如表 1 所示.

表 1 不同 λ 对应 $t_1(x) + t_2(x)$ 的最优值

λ	$t_1(x) + t_2(x)$	迭代次数
0.0181	-0.0890	18
0.5	6.8733	51
1	10.7912	76

表 1 表明:如果对此类不可分问题,采用常用的加权近似法,尽管能使不可分问题采用原始-对偶法,但求出的次优解与原问题真正的最优解相差太远.

7 结 论

本文解决了目标函数具有不可分形式的大规模优化问题,提出了一种新算法,并建立了算法的理论基础. 该算法实际上为 3 级算法,第 1 和第 2 级为原始-对偶算法,第 3 级为 λ 的校正. 仿真结果表明,该 3 级算法是有效的. 本文解决了目标函数不可分的

优化问题,如果约束中也有不可分情况出现,问题将会更复杂,有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Lasdon L S. Optimization theory for large systems[M]. London: Macmillan Company, 1975.

[2] Singh M G, Titli A. Systems: Decomposition, optimization and control[M]. Oxford: Pergamon Press, 1978.

[3] Shang R H, Jiao L C, Ma W P. Immune clonal multi-objective optimization algorithm for constrained optimization[J]. J of Software, 2008, 19(11): 2943-2956.

[4] Shen X N, Guo Y, Chen Q W. Multi-objective optimization genetic algorithm keeping diversity of population[J]. Control and Decision, 2008, 23(12): 1435-1440.

[5] Wang Y, Chai Z X. Constrained optimization evolutionary algorithms [J]. J of Software, 2009, 20(1): 11-19.

[6] Li D. On general multiple linear-quadratic control problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 38(11): 1722-1727.

[7] Titli A, Lefevre T, Richetin M. Multilevel optimization methods for nonseparable problems and application[J]. Int of J Systems Science, 1973, 4(6): 865-880.

[8] Sniedovich M. A class of nonseparable dynamic programming problems [J]. J of Optimization Theory and Applications, 1987, 52(1): 111-121.

[9] Ishi H, Shiode, Namasuya Y. Stochastic spanning tree problem[J]. Discrete Applied Mathematics, 1981, 3(1): 263-273.

[10] Reid R W, Citron S J. On noninferior performance index vectors[J]. J of Optimization and Applications, 1971, 7(1): 11-128.

下 期 要 目

面向干扰事件的可靠性物流系统设计研究进展 秦绪伟, 唐立新

诱导连续区间有序加权平均算子及其在区间数群决策中的应用 周礼刚, 等

求解模糊柔性 Job-shop 调度问题的多智能体免疫算法 徐新黎, 等

基于约束的 CPM 动态优化算法 朱群雄, 等

基于支持向量机的误分类代价敏感模糊推理系统 郑恩辉, 等

采用循环拥挤排序策略的 NSGA- 算法 罗辞勇, 等

基于组合灰色预测模型的焦炉火道温度模糊专家控制 王伟, 等