

文章编号: 100120920(2010)012008204

需求依赖广告费用和销售价格的 newsboy 型产品库存模型

汪峻萍^{1a}, 周永务², 杨剑波^{1b}

(1. 合肥工业大学 a. 数学学院, b. 管理学院, 合肥 230009; 2. 华南理工大学 工商管理学院, 广州 510641)

摘要: 在假定随机需求是关于销售价格和广告费用的一般函数的前提下, 提出一个新的 newsboy 模型, 给出了寻求最优广告费用、销售价格及订货量的分析方法, 并且还分析了需求的不确定性对最优销售价格和广告策略的影响。最后, 通过数值实例验证了模型的求解过程并得到相关管理启示。

关键词: 库存; newsboy 模型; 随机需求; 价格; 广告

中图分类号: O227 **文献标识码:** A

Inventory model for newsboy type products with demand depending on advertising expenditure and selling price

WANG Junping^{1a}, ZHOU Yongwu², YANG Jianbo^{1b}

(1a. School of Mathematics, 1b. School of Management, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China. Correspondent: WANG Junping, E-mail: misswangjp@sina.com.cn)

Abstract: This paper develops a new newsboy model under the assumption that the random demand is a general function with respect to the selling price and the advertising expenditure. An analytical solution is provided for finding the optimal advertising expenditure, selling price and order quantity. The influence of demand uncertainty on the optimal policies is investigated as well. Numerical examples illustrate the solution procedure, and some managerial insights are obtained.

Key words: Inventory; Newsboy model; Random demand; Price; Advertising

1 引言

随着消费者需求的个性化和多样化, 企业产品的生命周期逐渐趋短, 越来越多的产品具有 newsboy 型产品的特征。比如: 电脑产品的更新换代, 新的产品不断出现, 老的产品很快被淘汰。就服装制造业而言, 市场的潮流变化迅速, 大多服装企业 1 年分 4 季推出新品, 就意味着一件服装在市场上的销售周期只有 3 个月左右。近些年, newsboy 型产品的订购和库存问题引起了研究者的广泛关注, 许多研究者从不同的角度对经典的 newsboy 模型作了进一步的扩展。对市场营销而言, 主要存在两类推广: 第 1 类是假定需求是依赖销售价格的随机变量, 即可以利用价格杠杆来刺激需求。例如, 文献 [1] 首次将价格因素引入到 newsboy 模型中。 [2] 考虑

了零售商如何设定合适的价格以刺激顾客需求, 从而最大化自身期望利润的问题。 [3] 指出可采用加和与乘积两种方式刻画 newsboy 型产品需求的随机性。 [4] 对考虑价格决策的 newsboy 问题作了总结和进一步推广。 [5] 进一步将 [4] 的模型推广到考虑销售商的风险规避情形。 [6] 在 newsboy 框架下探讨了采用多重价格折扣来销售多余的库存产品。 [7] 在假定需求依赖价格的前提下, 考虑了顾客可能返还一部分产品或撤消自己订单的情形。 [8] 考虑了存在次级市场以销售 newsboy 型产品的问题。另一类则假定需求是依赖广告费用的随机变量, 即可以采用广告投入来刺激消费。此类研究主要是由于研究者认识到了广告在企业产品营销中的重要作用。根据美国国家统计局提供的数据显示, 美国企业的广

收稿日期: 2009202204; **修回日期:** 2009204229.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70771034); 新世纪优秀人才支持计划项目(NCET0520557); 高等学校全国优秀博士学位论文作者专项基金项目(200565); 广东省教育厅人文社会科学重点研究基地重大项目(08JDXM63003).

作者简介: 汪峻萍(1975), 女, 安徽黄山人, 讲师, 博士生, 从事物流与供应链管理的研究; 周永务(1964), 男, 安徽庐江人, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理研究。

告投入从 1990 年的 1300 亿美元增加到 2000 年的 2360 亿美元. 文献[9]将广告效应引入到 newsboy 问题中, 并将潜在市场规模看成是一个随机变量, 假定实际的市场需求是潜在市场规模和边际递减项的乘积. 在此假定下, 他们建立了一个同时决策订购量和广告费用的模型. [10]在假定需求的期望是关于广告费用的幂函数的前提下, 建立了一个推广的 newsboy 模型, 并分别以期望利润最大化和达到某个利润水平的概率最大化为目标, 探讨了最优订购量和广告投入的联合决策问题. 但其在模型中隐含着如下假定: 当广告投入趋于无穷大时, 期望需求也趋向无穷大. 这一假定显然与现实不符. 最近, 周永务等^[11]在假定期望需求是关于广告投入的一般函数且具有边际递减效应的前提下, 建立了 newsboy 型商品最优广告费用与订货策略的联合确定模型.

虽然现有文献已建立了需求依赖价格或广告费用的 newsboy 模型, 但很少有文献涉及销售价格和广告费用同时决策的问题, 原因是同时考虑这两个因素难以给出模型的分析解. 在实际的市场运作当中, 同时采用这两种营销手段的商品比比皆是. 比如爱国者、金士顿等移动闪存盘, 各类品牌服装等.

本文在假定随机需求是关于价格和广告费用的一般函数的前提下, 提出了一个更一般的 newsboy 模型, 给出了寻求最优广告费用、销售价格及订货量的分析方法, 并分析了需求的不确定性对最优销售价格和广告投入的影响. 最后, 通过数值实例验证了模型的求解过程并得到相关管理启示.

2 记号与假定

Q 表示系统在销售期初的订购量(决策变量); a 表示广告费用(决策变量); p 表示经销商单位产品的销售价格(决策变量); $D(a, p)$ 表示经销商所面临的期望需求; b 表示单位短缺产品延期供给费用; 销售期末若产品过剩, 则折扣价 v 进行清仓处理; c_n 表示单位产品的正常购买成本; c_e 表示紧急订购时单位产品的购买成本; E 表示均值为 1 的正随机变量, 其概率分布函数为 $F(\#)$, 概率密度函数为 $f(\#)$.

假定 1 根据实际情形, 假定期望需求 $D(a, p)$ 满足如下性质: 1) $5D(a, p)/5p < 0$; 2) $5D(a, p)/5a \setminus 0, 5^2 D(a, p)/5a^2 < 0$; 3) $D(+ \] , 0) = D_m$.

性质 1) 表示期望需求是关于销售价格的减函数; 性质 2) 表示期望需求是随着广告投入的增加而增加, 但广告投入的边际效用是递减的; 性质 3) 指出由于潜在顾客的有限性, 当销售价格趋于零且广告投入趋于无限大时, 期望需求将趋于一个上界 D_m . 为了便于分析, 假设期望需求函数具有如下形式:

$$D(a, p) = D_{my}(p)u(a). \quad (1)$$

其中: D_m 是经销商所面临的最大潜在需求; $y(p)$ 和 $u(a)$ 是归一化因子, 即 $0 < y(p) < 1, 0 < u(a) < 1$, 分别表示销售价格和广告费用对市场需求的影 响. 由性质 3), 假定 $yc(p) < 0$. 为证明模型最优解存在的唯一性, 进一步假定 $y(p)$ 是关于 p 的一个下凸函数, 且 $py(p)$ 是一个下凹函数, 即

$$yd(p) \setminus 0, 2yc(p) + pyd(p) [0. \quad (2)$$

注 1 虽然为了获得模型的解析解而要求 $y(p)$ 和 $py(p)$ 分别为下凸和下凹函数, 但这并非是一个苛刻的条件. 比如: 如果 $y(p)$ 是常见的线性函数 $y(p) = 1 - \frac{p}{H}$ 或非线性函数 $y(p) = (1 + p)^{-b} (0 < b [1)$, 则上述条件总是满足的.

其次, 由上述分析可知, $u(a)$ 应满足

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} u(a) = 1, uc(a) \setminus 0, ud(a) < 0. \quad (3)$$

另外, 为反映销售期内需求的不确定性, 该产品在整个销售期的实际需求量 x 被假定是 $D(a, p)$ 与均值 1 的正随机变量 E 的乘积, 即 $x = D(a, p) \# E$ 因此, 需求的概率密度函数可表示成

$$g(x, a, p) = \frac{1}{D(a, p)} f\left(\frac{x}{D(a, p)}\right). \quad (4)$$

假定 2 需求是一个非负随机变量, 且分布函数二阶可微.

假定 3 销售季节期间的短缺量完全延期供给.

假定 4 不失一般性, 假定 $p > c_e > c_n > v$.

3 模型的建立

在上述的记号与假定下, 易得经销商的期望利润为

$$\begin{aligned} 0(Q, a, p) = & (p - c_e - b)D(a, p) + bD(a, p)S(Q/D(a, p)) + \\ & (c_e - c_n)Q - (c_e - v)D(a, p) \int_0^{Q/D(a, p)} F(x)dx - a, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$S(x) = x - \int_0^x F(t)dt.$$

由于 $5^2 0(Q, a, p)/5Q^2 < 0$, 求解方程 $5 0(Q, a, p)/5Q = 0$ 可得最优订购量 Q^* 满足

$$F[Q^*/D(a, p)] = G$$

或

$$Q^* = D(a, p)F^{-1}(G), \quad (6)$$

其中 $G = (c_e + b - c_n)/(c_e + b - v)$.

将式(6)代入(5)可得经销商的期望利润为

$$0(a, p) = (p - H)D_{my}(p)u(a) - a, \quad (7)$$

其中

$$H = v + (c_e + b - v) \left[1 - \int_0^{F^{-1}(Q)} xf(x) dx \right]. \quad (8)$$

令 $0(a, p)$ 关于 p 求二阶偏导数得

$$5^2 0(a, p) / 5p^2 = D_{mu}(a) [2yc(p) + pyd(p) - Hyd(p)]. \quad (9)$$

由于 $\int_0^1 xf(x) dx = 1$, 可得 $H > 0$. 再由式(2)

和(9)可得 $5^2 0(a, p) / 5p^2 [0]$, 即 $0(a, p)$ 是关于 p 的下凹函数. 因此, 通过求解一阶最优性条件, 可得最优销售价格 p^* 满足

$$y(p^*) + (p^* - H)yc(p^*) = 0. \quad (10)$$

注意到 $yc(p) < 0$, 故利用(10), 易推出 $p^* > H$.

将 p^* 代入式(7), 可得

$$0(a) = (p^* - H)D_{my}(p^*)u(a) - a. \quad (11)$$

$0(a)$ 是关于 a 的下凹函数, 通过求解一阶最优性条件, 可得最优广告费用 a^* 满足

$$(p^* - H)D_{my}(p^*)uc(a^*) - 1 = 0. \quad (12)$$

综合上述分析, 可得如下定理.

定理 1 使得经销商期望利润最大化的最优销售价格 p^* , 广告费用 a^* 以及订购量 Q^* 可由下式给出:

$$y(p^*) + (p^* - H)yc(p^*) = 0, \quad (13)$$

$$(p^* - H)D_{my}(p^*)uc(a^*) - 1 = 0, \quad (14)$$

$$Q^* = D(a^*, p^*)F^{-1}(G). \quad (15)$$

将 a^* 代入式(11), 可得经销商的期望利润为 $0(a^*)$.

4 库存系统的相关性质

由式(15), 易得最优订购量、销售价格和广告费用三者之间具有如下关系:

性质 1 经销商的广告费用投入越多或销售价格制定越低, 经销商的订购量越大.

对式(10)两边同时关于 a 求导, 得 $5p^* / 5a = 0$. 由此可得如下性质:

性质 2 经销商的最优销售价格不随广告投入的变化而变化.

从性质 2 可以观察到, 最优销售价格仅与价格对期望需求的影响因子以及单位购买成本等有关, 而与广告费用投入的多少无关, 因此经销商应该提高销售价格以平衡由于高广告投入所带来的损失.

另外, 由式(13) ~ (15), 易得库存系统具有如下性质:

性质 3

$$1) 5p^* / 5c_n > 0, 5a^* / 5c_n < 0, 50(a^*) / 5c_n <$$

0;

$$2) 5p^* / 5c_e > 0, 5a^* / 5c_e < 0, 50(a^*) / 5c_e < 0;$$

$$3) 5p^* / 5b > 0, 5a^* / 5b < 0, 50(a^*) / 5b < 0;$$

$$4) 5p^* / 5v < 0, 5a^* / 5v > 0, 50(a^*) / 5v > 0.$$

性质 3 指出, 当单位产品的购买成本(无论是在正常订购模式下还是紧急订购模式下)较大时或单位短缺产品延期供给费用较高时, 经销商将制定一个较高的销售价格; 而当单位产品的残值较高时, 则制定一个较低的销售价格. 另外, 广告投入费用和经销商的期望利润随着单位产品的购买成本或单位短缺产品延期供给费用的增加而减小, 随着单位产品残值的增加而增加. 了解库存系统的上述结构性质, 有助于经销商进行正确的决策.

5 需求不确定性对最优策略的影响

如果需求是确定的, 则对任何的广告投入费用 a 和销售价格 p , 需求 $D(a, p)$ 是给定的, 因此订货量应该是 $Q = D(a, p)$, 从而经销商总利润为

$$0_d(a, p) = (p - c_n)D_{my}(p)u(a) - a. \quad (16)$$

类似于第 3 节的讨论, 易得使得 $0_d(a, p)$ 取得最大化的最优销售价格和广告费用满足

$$y(p_d) + (p_d - c_n)yc(p_d) = 0, \quad (17)$$

$$(p_d - c_n)D_{my}(p_d)uc(a_d) - 1 = 0. \quad (18)$$

为了便于比较在随机环境和确定性环境下所对应的最优策略, 首先给出如下两个引理:

引理 1 $1 + \int_0^{F^{-1}(G)} F(x) dx > F^{-1}(G)$.

引理 2 $H > c_n$.

引理 1 和引理 2 的证明过程略.

由式(13), (14), (17), (18) 以及引理 1 和引理 2, 易得如下结论:

定理 2 随机需求情形下的最优广告投入费用总是小于确定性需求情形下的最优广告投入费用, 但最优销售价格则恰好相反, 即 $a^* < a_d, p^* > p_d$. 证明略.

定理 2 表明, 环境的不确定性将导致经销商一方面减少在广告方面的投入, 另一方面却增加单位产品的销售价格, 因而也将导致经销商销售出更少的产品.

6 数值仿真分析

为了验证模型的结论, 本文考虑如下的数值实例. 模型中用到的参数值如下: $c_n = 2, c_e = 4, v = 0.5, b = 1, D_m = 10000$. 销售价格和广告费用的影响因子函数分别假定为: $y(p) = 1 - Hp, u(a) = 1 - Qe^{-Ka}$, 其中 $H = 0.05, Q = 0.75, K = 0.001$. 并且假设正随机变量 E 服从均值为 1 的指数分布.

首先, 利用定理 1, 可得使得经销商期望利润最

大化的最优销售价格 p^* , 广告费用 a^* 以及订购量 Q^* 的显性表达式分别为

$$p^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} + H \right), \tag{19}$$

$$a^* = \frac{1}{K} \ln \left[\frac{D_m(1 - HH)^2 K}{4H} \right], \tag{20}$$

$$Q^* = \left[\frac{D_m(1 - HH)^2 K - 4H}{2(1 - HH)K} \right] F^{-1}(G). \tag{21}$$

将各参数值代入式(19) ~ (21), 可得 $p^* = 11.8$, $a^* = 3221.6$, $Q^* = 4356.8$. 再将上述最优策略代入式(5), 得到经销商的最大期望利润为 $\Pi(Q^*, a^*, p^*) = 29202.3$.

接下来分析参数 K 和 H 的变化对最优策略及相应期望利润的影响. 由于篇幅限制, 本文只给出了参数 K 的变化图形, 见图1~ 图4. 由灵敏度分析可知: 1) 最优订购量和期望利润随着 K 的增加而增加, 但最优广告费用却随着 K 的增加而减小; 而最优销售价格却随着 K 增加而保持不变. 2) 最优销售价格、广告费用、订购量以及相应的期望利润均随着 H 的增加而减小.

在进行数值实验时, 还假定随机变量 Γ 服从均

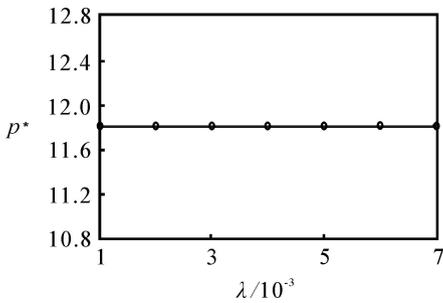


图1 参数 K 的变化对最优销售价格的影响

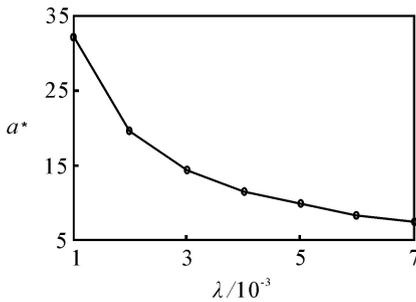


图2 参数 K 的变化对最优广告费用的影响

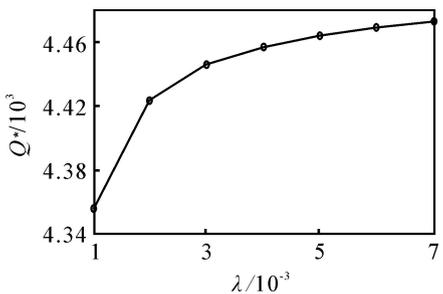


图3 参数 K 的变化对最优订购量的影响

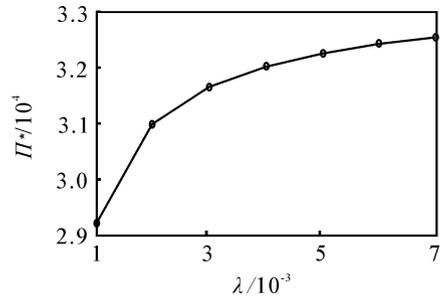


图4 参数 K 的变化对期望利润的影响

匀分布和 Γ 分布. 通过计算发现所得的结论与上述相同, 限于篇幅, 略去了具体的计算过程.

7 结 论

企业在市场营销过程中经常同时使用价格和广告这两个重要手段, 然而已有文献所提出的 newsboy 模型却将这两个手段分割开, 显然不能满足企业的实际需要. 鉴于此, 本文对经典的 newsboy 模型作了进一步推广, 建立了需求同时依赖销售价格和广告费用的 newsboy 模型, 给出了寻求模型的分析方法. 为了便于库存管理者的决策, 还给出了库存系统的一些结构性质, 并且分析了需求的不确定性对最优销售价格和广告投入的影响. 通过数字实例验证了模型的求解过程, 并得到相关的管理启示. 本文考虑的单个经销商的情形, 进一步可以研究带有多个竞争销售商的 newsboy 问题. 另外, 本文假定随机需求的概率分布是已知的, 进一步可参考文献[12]来讨论在随机需求的概率分布未知时经销商的最优广告和销售策略.

参考文献(References)

- [1] Whitin T M. Inventory control and price theory [J]. Management Science, 1995, 2(1): 61268.
- [2] Lau A, Lau H. The newsboy problem with price dependent demand distribution [J]. IIE Transactions, 1988, 20(2): 1682175.
- [3] Polatoglu L H. Optimal order quantity and pricing decisions in single period inventory systems [J]. Int J of Production Economics, 1991, 23(123): 1752185.
- [4] Petruzzi N C, Dada M. Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions [J]. Operations Research, 1999, 47(2): 183194.
- [5] Agrawal V, Seshadri S. Impact of uncertainty and risk aversion on price and order quantity in the newsvendor problem [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2000, 2(4): 410423.
- [6] Khouja M. Optimal ordering, discounting, and pricing in the single period problem [J]. Int J of Production Economics, 2000, 65(2): 202216.

参数估计误差, 数据长度为3000, 3种方法的参数估计误差 D 随 t 变化曲线如图1所示. 参数估计误差曲线可以用来衡量参数估计精度收敛于真值的速率和参数估计精度.

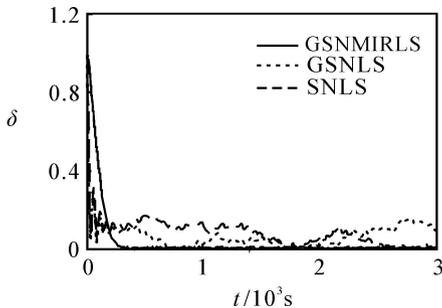


图1 参数估计误差 D 随 t 的变化曲线

从表1和图1的仿真结果可以看出:对于强观测噪声的MISO系统, GSNLS和GSNMIRLS的参数估计精度优于SNLS. SNLS的参数估计误差大, 明显是有偏差的; GSNLS对参数估计初值的选择比较敏感, 具有小波动, 而GSNMIRLS和GSNLS在通常不同的初始值、输入信号和观测噪声情况下, 都能收敛到全局最优. GSNMIRLS在强观测噪声下具有良好的工作特性.

7 结论

本文讨论了多个未知时延的MISO系统的辨识问题, 利用可分离性原理推导了用于估计时延和传递函数参数的SNLS辨识方法. 在此基础上, 为了降低收敛于局部最小的可能性, 引进全局优化理论, 推导了GSNLS方法. 为消除强观测噪声所带来的参数估计的偏差, 将多新息辨识方法融入GSNLS方法中, 得到了GSNMIRLS方法. 所提出的

GSNMIRLS方法不仅保留了GSNLS的特点, 提高了辨识精度, 弥补了强观测噪声所带来的偏差影响, 同时降低了辨识对参数初始值、输入信号和观测噪声的依赖性.

参考文献(References)

- [1] Unbehauen H, Rao G P. Continuous-time approaches to system identification) A survey [J]. Automatica, 1990, 26(2): 23225.
- [2] Gawthrop P J, Nihtila M T, Rad A B. Recursive parameter estimation of continuous-time systems with unknown time delay[J]. Control Theory and Advanced Technology, 1989, 5(1): 227248.
- [3] Ljung L. Theory and practice of recursive identification [M]. Cambridge: The MIT Press, 1983.
- [4] 申培萍. 全局优化方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006. (Shen P P. Global optimization method[M]. Beijing: Science Press, 2006.)
- [5] Ding F, Chen T. Parameter estimation of dual-rate stochastic systems by using an output error method[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(9): 14362 1441.
- [6] Ding F, Chen T. Performance analysis of multi-innovation gradient type identification methods [J]. Automatica, 2007, 43(1): 1214.
- [7] Ngia L S H. Separable nonlinear least-squares methods for efficient offline and online modeling of systems using Kautz and Laguerre filters[J]. IEEE Trans on Circuit and Systems, 2001, 48(2): 562579.
- [8] Zheng W X, Feng C B. Identification of stochastic time lag systems in the presence of coloured noise [J]. Automatica, 1990, 26(3): 7692779.

(上接第92页)

- [7] You P S. Dynamic pricing of inventory with cancellation demand[J]. J of the Operational Research Society, 2003, 54(10): 10921101.
- [8] Arcelus F J, Kumar S, Srinivasan G. Evaluating manufacturer's buyback policies in a single-period two-echelon framework under price-dependent stochastic demand[J]. Omega, 2008, 36(5): 8082824.
- [9] Gerchak Y, Parlar M. A single period inventory problem with partially controllable demand [J]. Computers & Operations Research, 1987, 14(1): 129.
- [10] Khouja M, Robbins S S. Linking advertising and quantity decisions in the single-period inventory model

[J]. Int J of Production Economics, 2003, 86(2): 932 105.

- [11] 周永务, 杨善林. Newsboy型商品最优广告费用与订货策略的联合确定[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(11): 59263. (Zhou Y W, Yang S L. Joint determination of optimal advertisement cost and order policy for Newsboy-type product [J]. Systems Engineering) Theory & Practice, 2002, 22(11): 59263.)
- [12] Gallego G, Moon I. The distribution free newsboy problem: Review and extensions [J]. J of the Operational Research Society, 1993, 44(8): 8252834.