

文章编号: 1001-0920(2010)01-0126-04

一类高阶次随机非线性系统的输出反馈镇定

李武全, 井元伟, 张嗣瀛

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘要: 针对一类高阶次随机非线性系统, 研究其输出反馈镇定问题. 通过选择有效的观测器和李雅普诺夫函数, 所设计的光滑输出反馈控制器保证了闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的, 输出几乎处处调节到零. 数值仿真验证了控制方案的有效性.

关键词: 高阶次随机非线性系统; 输出反馈; 镇定

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Output-feedback control of a class of high-order stochastic nonlinear systems

LI Wuquan, JING Yuanwei, ZHANG Siying

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: LI Wuquan, E-mail: sea81@126.com)

Abstract: For a class of high-order stochastic nonlinear systems, the problem of output-feedback stabilization is investigated. By adopting an effective observer and choosing the appropriate Lyapunov function, an output-feedback controller is constructed to ensure that the equilibrium at the origin of the closed-loop system is globally asymptotically stable in probability, and the output can be regulated to the origin almost surely. A simulation example shows the effectiveness of the output-feedback controller.

Key words: High-order stochastic nonlinear systems; Output-feedback; Stabilization

1 引言

本文考虑如下的高阶随机非线性系统:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1^p dt + f_1^T(x_1) d, \\ dx_2 &= u^p dt + f_2^T(x_1, x_2) d, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $u \in R$, $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$ 和 $y \in R$ 分别是系统的控制输入、状态和输出; x_2 是不可测的状态; $p \geq 1$ 是奇数; d 是定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的独立标准 Wiener 过程, F 和 P 分别是样本空间, \mathcal{F} -代数域和概率测度. 函数 $f_i: R^i \rightarrow R^i$ 是 C^1 函数, 满足 $f_i(0) = 0$, $i = 1, 2$.

当 $p = 1$ 时, 系统 (1) 退化成一般的随机非线性系统. 文献 [1] 首次为这类系统设计了全局渐近稳定输出反馈控制器. 通过变换系统的形式和施加不同的增长条件, 文献 [2-5] 研究了随机非线性系统的输出反馈镇定问题.

当 $p > 1$ 时, 由于高阶随机非线性系统 (1) 既不可控也不能反馈线性化, 现有的方法很难应用于系统 (1). 文献 [6-9] 研究了高阶随机非线性系统的状态反馈镇定问题, 但对于系统 (1) 的输出反馈镇定问题, 至今仍无相关结果.

受文献 [8, 10] 的启发, 本文针对系统 (1), 研究其输出反馈控制问题. 通过选择适当的观测器和有效的增益函数来设计控制器, 以保证闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的.

2 预备知识

用 R^+ 表示全体非负实数, X^T 表示 X 的转置, $\text{Tr}\{X\}$ 表示方阵 X 的迹, $\|\cdot\|$ 表示欧氏空间中向量的 2 范数, C^i 表示相应定义域上的 i 阶连续可微函数. K 表示连续、严格单调、零点等于 0 的 R^+ 到 R^+ 的函数全体; K_∞ 表示 K 中无界函数全体; $R^+ \times R^+$ 到 R^+ 的函数 $(s, t) \mapsto \kappa(s, t)$ 表示对给定的 t , (\cdot, t)

收稿日期: 2009-01-06; 修回日期: 2009-06-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60274009); 国家高技术研究发展计划项目 (2004AA412030).

作者简介: 李武全 (1981—), 男, 山东梁山人, 博士生, 从事随机非线性系统的研究; 张嗣瀛 (1925—), 男, 山东章丘人, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 从事复杂性科学、复杂系统控制等研究.

K , 而给定 $s, (s, \cdot)$ 是单调递减的且 $\lim_t (s, t) = 0$.

下面给出一些引理:

引理 1^[10] 对于任意的奇数 $p \geq 1$, 下面不等式成立:

$$[(-a + a)^p - a^p] \leq \frac{p+1}{2^{p-1}}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

引理 2^[10] 对于任意的奇数 $p \geq 1$, 下面不等式成立:

$$|a^p - b^p| \leq p|a - b|(a^{p-1} + b^{p-1}), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

引理 3^[10] 假设 m 和 n 是正实数, a, b 和 $c > 0$ 是连续的数量函数, 则对于任意的 $c > 0$, 均有下面的不等式成立:

$$|a|^n |b|^m \leq c |a|^{n+m} + \frac{m}{n+m} \left(\frac{n}{c(n+m)}\right)^{n/m} |b|^{n+m} \frac{(n+m)^{n/m}}{m}.$$

考虑如下随机非线性系统:

$$dx = f(x, u)dt + g(x)dw. \quad (2)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是可测的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是输入, w 是独立标准 Wiener 过程向量. 对于任意 $t \geq 0$, 当 $x \in \mathbb{R}^n$ 时, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ 是局部 Lipschitz 函数, 且 $f(0) = 0, g(0) = 0$.

定义 1^[3] 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在一类 KL 函数 (\cdot, \cdot) , 满足 $P\{|x(t)| < (\cdot, |x_0|, t)\} \geq 1 - \epsilon, \forall t \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 则称系统 (2) 在平衡点 $x = 0$ 是依概率全局渐近稳定的.

引理 4^[3] 对于系统 (2), 若存在一个 C^2 函数 $V(x), K_1$ 函数 α_1 和 α_2, K_2 函数 α_3 , 使得

$$\alpha_1(x) \leq V(x) \leq \alpha_2(x),$$

$$LV(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f + \frac{1}{2} \left\{ g^T \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} g \right\} \leq -\alpha_3(x),$$

则系统 (2) 在 $(0, +\infty)$ 上几乎处处存在唯一解, 且在平衡点 $x = 0$ 是依概率全局渐近稳定的, 即 $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0\} = 1$, 其中 $LV(x)$ 称为 $V(x)$ 沿系统 (2) 的无穷小算子.

3 控制器设计与稳定性分析

对于系统 (1), 作如下假设:

假设 1 对于 $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$, 存在两个非负光滑函数 $\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1)$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned} |f_1^T(x_1)| &\leq |x_1|^p \alpha_1(x_1), \\ |f_2^T(x_1, x_2)| &\leq (|x_1|^p + |x_2|^p) \alpha_2(x_1). \end{aligned} \quad (3)$$

注 1 如何为随机系统 (1) 施加适当的增长条件, 是解决其输出反馈问题的一个关键. 对于高阶次系统的状态反馈镇定问题, 已有不同类型的增长条件和系统形式被提出^[6-9]. 但对于系统 (1) 的输出反馈镇定问题, 至今仍无相关结果.

3.1 设计状态反馈控制器

假设 x_2 是可测的, 对于系统 (1), 用反推的方法设计状态反馈控制器.

Step1 定义误差变量 $\eta_1 = x_1$ 和李雅普诺夫函数 $U_1(\eta_1) = \frac{1}{4} k_1 |\eta_1|^4$, 其中 $k_1 > 0$ 是常数. 由式 (1) 和 (3) 可得

$$\begin{aligned} LU_1(\eta_1) &\leq k_1 |\eta_1|^3 x_2^p + \frac{3}{2} k_1 |\eta_1|^2 |f_1^T(x_1)|^2 \\ &\leq k_1 |\eta_1|^3 (x_2^p - x_2^{*p}) + k_1 |\eta_1|^3 x_2^{*p} + \\ &\quad \frac{3}{2} k_1 |\eta_1|^2 |f_1^T(x_1)|^2 \\ &\leq -c_{11} |\eta_1|^{p+3} + k_1 |\eta_1|^3 (x_2^p - x_2^{*p}). \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $c_{11} > 0$, 且

$$\begin{aligned} x_2^* &= -\eta_1(x_1) \eta_1 = \\ &= -\left(\frac{c_{11}}{k_1} + \frac{3}{2} |f_1^T(x_1)|^2\right)^{1/p} \eta_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Step2 定义 $\eta_2 = x_2 - x_2^*$, 引入变换 $u = \left(\frac{1}{k_2}\right)^{1/p} u_0$, 由式 (1) 和 η_2 的定义可得

$$\begin{aligned} d\eta_2 &= \\ &= \left[\frac{1}{k_2} u_0^p - \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} x_2^p - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_2^*}{\partial x_1^2} |f_1^T(x_1)|^2 \right] dt + \\ &= \left(f_2^T(x_1, x_2) - \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} f_1^T(x_1) \right) d\eta_1. \end{aligned} \quad (6)$$

选取 $U_2(\eta_1, \eta_2) = U_1(\eta_1) + \frac{1}{4} k_2 |\eta_2|^4$, 其中 $k_2 > 0$ 是常数. 由式 (4) 和 (6) 可得

$$\begin{aligned} LU_2(\eta_1, \eta_2) &\leq \\ &\leq -c_{11} |\eta_1|^{p+3} + k_1 |\eta_1|^3 (x_2^p - x_2^{*p}) + \\ &\quad \frac{3}{2} u_0^p - k_2 \frac{3}{2} \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} x_2^p + \\ &\quad \frac{1}{2} k_2 \left| \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1^2} \right| |f_1^T(x_1)|^2 - \frac{3}{2} |f_2^T(x_1, x_2) - \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} f_1^T(x_1)|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

利用式 (3), η_2 的定义及引理 2 和引理 3, 类似于文献 [8], 可得

$$\begin{aligned} |k_1 |\eta_1|^3 (x_2^p - x_2^{*p})| &\leq b_{21} |\eta_1|^{p+3} + \alpha_{21}(x_1) |\eta_2|^{p+3}, \\ \left| -k_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} \frac{3}{2} x_2^p \right| &\leq b_{22} |\eta_1|^{p+3} + \alpha_{22}(x_1) |\eta_2|^{p+3}, \\ \frac{1}{2} k_2 \left| \frac{\partial^2 x_2^*}{\partial x_1^2} \right| |f_1^T(x_1)|^2 &\leq \frac{3}{2} |f_2^T(x_1, x_2) - \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} f_1^T(x_1)|^2 \\ &\leq b_{23} |\eta_1|^{p+3} + \alpha_{23}(x_1) |\eta_2|^{p+3}, \\ \frac{3}{2} k_2 \frac{3}{2} |f_2^T(x_1, x_2) - \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} f_1^T(x_1)|^2 &\leq \\ &\leq b_{24} |\eta_1|^{p+3} + \alpha_{24}(x_1) |\eta_2|^{p+3}. \end{aligned}$$

其中: b_{2i} 和 $\alpha_{2i}(x_1)$ 分别是正数和非负光滑函数, $i =$

1,2,3,4. 将上面的不等式代入式(7) 可得

$$LU_2(x_1, z) = -c_{21} |z|^{p+3} + \frac{3}{2} (u_0^p - x_3^{*p}) + \frac{3}{2} x_3^{*p} + |z|^{p+3} \varphi_2(x_1) - c_{22} |z|^{p+3} - c_{22} |z|^{p+3} + \frac{3}{2} (u_0^p - x_3^{*p}). \quad (8)$$

其中

$$c_{21} = c_{11} - \sum_{s=1}^4 b_{2s} > 0, \quad \varphi_2(x_1) = \sum_{s=1}^4 \varphi_{2s}(x_1), \\ x_3^* = -\varphi_2(x_1) |z| = (c_{22} + \varphi_2(x_1))^{1/p} |z|, \\ c_{21} > 0 \text{ 和 } c_{22} > 0 \text{ 是常数.}$$

注2 在李雅普诺夫函数 $U_1(x_1)$ 和 $U_2(x_1, z)$ 中分别引入参数 k_1 和 k_2 , 这增加了设计的灵活性, 可通过选取合适的 k_1 和 k_2 , 使得 x_3^* 的增益尽量小, 这样在后面的不等式缩放中, 可使得函数 $L(x_1)$ 的增益不至于过大.

3.2 设计观测器

构造如下二维观测器:

$$dz = \left(\frac{1}{k_2} u_0^p - \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} (z + L(x_1))^p - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 L(x_1)}{\partial x_1^2} / |f_1^T(x_1)|^2 \right) dt - \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} f_1^T(x_1) dz, \quad (9)$$

其中 $L(x_1)$ 是满足 $\frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} > 0$ 的待定光滑函数.

令 $e = x_2 - L(x_1) - z$, 由于

$$dL(x_1) = \left(\frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} x_2^p + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 L(x_1)}{\partial x_1^2} / |f_1^T(x_1)|^2 \right) dt + \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} f_1^T(x_1) dz, \quad (10)$$

由式(1), (9) 和(10) 可得

$$de = \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} ((z + L(x_1))^p - x_2^p) dt + f_2^T(x_1, z) dz.$$

选取李雅普诺夫函数 $W(e) = \frac{1}{4} e^4$, 则

$$LW(e) = e^3 \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} ((z + L(x_1))^p - x_2^p) + \frac{3}{2} e^2 / |f_2^T(x_1, z)|^2. \quad (11)$$

利用引理1, e 的定义及 $\frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} > 0$, 可得

$$e^3 \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} ((z + L(x_1))^p - x_2^p) - \frac{1}{2^{p-1}} \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} e^{p+3}. \quad (12)$$

利用式(3), 引理2和引理3可得

$$\frac{3}{2} e^2 / |f_2^T(x_1, z)|^2$$

$$c_{31} |z|^{p+3} + c_{32} |z|^{p+3} + e^{p+3} \varphi_2(x_1). \quad (13)$$

其中: $c_{31} > 0$ 和 $c_{32} > 0$ 是常数, $\varphi_1(x_1)$ 和 $\varphi_2(x_1)$ 是非负光滑函数. 将式(12) 和(13) 代入(11) 得

$$LW(e) = c_{31} |z|^{p+3} + c_{32} |z|^{p+3} - \left(\frac{1}{2^{p-1}} \cdot \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} - \varphi_2(x_1) \right) e^{p+3} dz. \quad (14)$$

3.3 设计增益函数 $L(x_1)$

由于 x_2 是未知的, 用 $z + L(x_1)$ 替换虚拟控制器 x_3^* 中的 x_2 , 可得到控制器

$$u_0 = -\varphi_2(x_1) (z + L(x_1)) + \varphi_1(x_1) x_1. \quad (15)$$

因此, 系统(1) 的控制器为

$$u = -\left(\frac{1}{k_2} \right)^{1/p} \varphi_2(x_1) (z + L(x_1)) + \varphi_1(x_1) x_1. \quad (16)$$

将式(15) 和 x_3^* 代入(8), 利用引理2和引理3可得

$$LU_2(x_1, z) = -c_{21} |z|^{p+3} - c_{22} |z|^{p+3} + \frac{3}{2} |z|^{p+3} \varphi_2(x_1) [|z|^p - (z - e)^p] - c_{21} |z|^{p+3} - c_{22} |z|^{p+3} + |z|^{p+3} / |e| [|z|^{p-1} + e^{p-1}] \varphi_3(x_1) - c_{21} |z|^{p+3} - c_{52} |z|^{p+3} + e^{p+3} \varphi_5(x_1). \quad (17)$$

其中: $c_{42} > 0, c_{52} = c_{22} - c_{42} > 0$ 是常数; $\varphi_3(x_1), \varphi_4(x_1), \varphi_5(x_1)$ 是非负光滑函数.

取 $V(x_1, z, e) = U_2(x_1, z) + W(e)$, 由式(14) 和(17) 得

$$LV(x_1, z, e) = -c_{41} |z|^{p+3} - c_{62} |z|^{p+3} - \left(\frac{1}{2^{p-1}} \cdot \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} - \varphi_2(x_1) - \varphi_5(x_1) \right) e^{p+3}. \quad (18)$$

其中: $c_{41} = c_{21} - c_{31} > 0, c_{62} = c_{52} - c_{32} > 0$ 是常数. 取

$$L(x_1) = 2^{p-1} \left(c_3 x_1 + \int_0^{x_1} (\varphi_2(s) + \varphi_5(s)) ds \right), \quad (19)$$

其中 $c_3 > 0$ 是常数. 将式(19) 代入(18) 可得

$$LV(x_1, z, e) = -c_{41} |z|^{p+3} - c_{62} |z|^{p+3} - c_3 e^{p+3}. \quad (20)$$

基于式(20), 可得到本文的主要结果.

定理1 对于高阶随机非线性系统(1), 在假设1的条件下, 输出反馈控制器(16) 和(19) 可保证以下结论成立:

- 1) 系统(1) 在 $(0, +\infty)$ 上几乎处处有唯一解;
- 2) 系统的输出几乎处处可以调节到零;
- 3) 闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的.

证明 由于

$$V(x_1, x_2, e) = \frac{1}{4} k_1 x_1^4 + \frac{1}{4} k_2 x_2^4 + \frac{1}{4} e^4,$$

且 $y = x_1$, 基于式 (20), 利用引理 4 可知, 结论成立.

4 仿真例子

考虑如下随机非线性系统:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2^3 dt + \sin x_1 \ln(1 + x_1^2) d, \\ dx_2 &= u^3 dt + 2x_1^2 \sin x_2 d, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{21}$$

显然该系统满足假设 1. 取 $k_1 = 1/30, k_2 = 1/2500, L(x_1) = 3600x_1$, 按照前面的设计过程, 可求得

$$\begin{aligned} dz &= (u^3 - 3600(z + 3600x_1)^3) dt - \\ &3600 \sin x_1 \ln(1 + x_1^2) d. \end{aligned} \tag{22}$$

控制器为

$$u = -5000^{1/3} (z + 3603.95x_1), \tag{23}$$

选取初值

$$x_1(0) = 5 \times 10^{-4}, x_2(0) = 0.06, z(0) = 0.1.$$

图 1 给出了闭环系统 (21) ~ (23) 的响应曲线, 验证了控制方案的有效性.

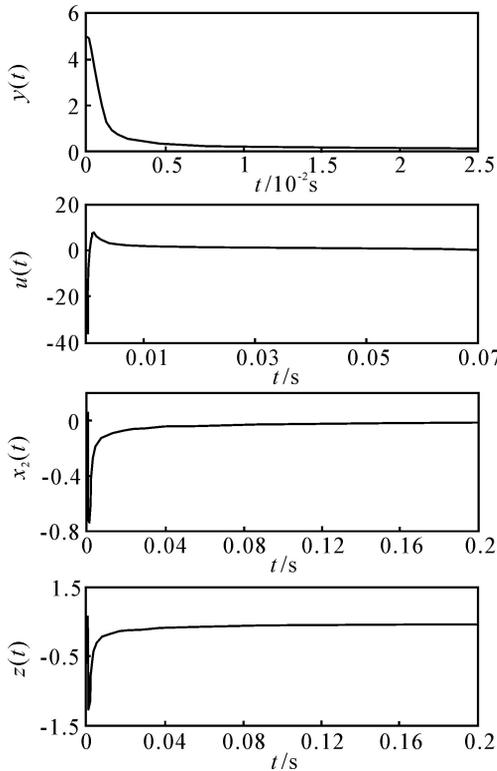


图 1 闭环系统 (21) ~ (23) 的响应曲线

5 结 论

本文研究了一类高阶随机非线性系统的输出反馈镇定问题, 所设计的控制器保证了闭环系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的. 进一步的工作是基于假设 1, 将本文方法推广到 n 阶系统.

参考文献(References)

[1] Deng H, Krstic M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(2) : 328-333.

[2] Deng H, Krstic M. Output-feedback stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance[J]. Systems and Control Letters, 2000, 39(1) :173-182.

[3] Krstic M, Deng H. Stabilization of uncertain nonlinear systems[M]. Springer: New York, 1998.

[4] Wu ZJ, Xie XJ, Zhang S Y. Stochastic adaptive backstepping controller design by introducing dynamic signal and changing supply function [J]. Int J of Control, 2006, 79(12) : 1635-1646.

[5] Wu ZJ, Xie XJ, Zhang S Y. Adaptive backstepping controller design using stochastic small-gain theorem [J]. Automatica, 2007, 43(4) : 608-620.

[6] Tian J, Xie XJ. Adaptive state-feedback stabilization for high-order stochastic nonlinear systems with uncertain control coefficients [J]. Int J of Control, 2007, 80(9) : 1503-1516.

[7] Tian J, Xie XJ. Adaptive state-feedback stabilization for high-order stochastic nonlinear systems with time-varying control coefficients[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(9) : 1188-1191.

[8] Xie XJ, Tian J. State-feedback stabilization for high-order stochastic nonlinear systems with stochastic inverse dynamics [J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(14) : 1343-1362.

[9] 段纳, 解学军, 张嗣瀛. 一类高阶次随机非线性系统的状态反馈镇定[J]. 控制与决策, 2008, 23(1) : 60-64. (Duan N, Xie XJ, Zhang S Y. State-feedback stabilization for a class of high-order stochastic nonlinear system[J]. Control and Decision, 2008, 23(1) : 60-64.)

[10] Qian CJ, Lin W. Smooth output feedback stabilization of planar systems without controllable/observable linearization[J]. IEEE Trans on Automatica Control, 2002, 47(12) : 2068-2073.