第 25 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2010 年 1 月
Vol. 25 No. 1 Control and Decision Jan. 2010

文章编号: 1001-0920(2010)01-0008-06

区间直觉模糊动态规划方法

刘成斌[1], 罗 党[2], 党耀国[1], 刘思峰[1], 王正新[1]
(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016;
2. 华北水利水电学院 管理与经济学院, 郑州 450003)

摘 要: 基于直觉模糊集理论的思想与方法,探讨多阶段决策问题. 运用分析技巧,构建直觉模糊集比较可能度公式及区间直觉模糊集比较可能度公式. 在普通动态规划的基础上,提出区间直觉模糊动态规划及其最优解的概念,建立相应的数学模型及其最优解的算法,并指出直觉模糊动态规划是区间直觉模糊动态规划的特例. 通过算例分析,说明了算法的合理性和可行性. 为不确定动态规划和直觉模糊集理论的应用研究提供了新的思路.

关键词: 区间直觉模糊集; 可能度; 动态规划; 最优解
中图分类号: C934 **文献标识码**: A

Methods for interval-valued intuitionistic fuzzy dynamic programming

LIU Cheng-bin[1], *LUO Dang*[2], *DANG Yao-guo*[1], *LIU Si-feng*[1], *WANG Zheng-xin*[1]
(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. School of Management and Economics, North China University of Water-Conservancy and Electric Power, Zhengzhou 450003, China. Correspondent: WANG Zheng-xin, E-mail: jenkin226@163.com)

Abstract: Based on the intuitionistic fuzzy set theory, a multi-stage decision-making problem is discussed. Both intuitionistic fuzzy set comparison possibility degree formula and interval-valued intuitionistic fuzzy set comparison possibility degree formula are developed. According to the regular dynamic programming theory, the concepts of interval-valued intuitionistic fuzzy dynamic programming and its optimal solution are provided. At the same time, the mathematical model and the optimal algorithm of the interval-valued intuitionistic fuzzy dynamic programming are built. It is pointed out that intuitionistic fuzzy dynamic programming is a special case of interval-valued intuitionistic fuzzy dynamic programming. Numerical analyses shows the reasonableness and feasibility of the algorithm. This paper suggests a new area in the application of uncertain dynamic programming and intuitionistic fuzzy set theory.

Key words: Interval-valued intuitionistic fuzzy set; Possibility degree; Dynamic programming; Optimal solution

1 引 言

规划实质上属于决策范畴,主要研究在一定约束条件下,如何使目标达到最优[1]. 许多实际问题因问题复杂、环节多、时间长,需要分阶段作出多次决策,且每次决策都在其前一阶段决策结果的基础上作出,同时又影响到它后一阶段的决策,每个阶段都有若干方案可供选择. 决策者的任务就是在每个阶段选择一个合理的方案,使整个决策过程取得最好的结果. 这类受时间因素影响,依次作出决策以实现整个决策过程最优化的决策问题称为动态规划问题[2]. 规划过程中决定未来不确定性的因素,一是来自规划系统外部,二是来自内部规划系统可调节和控制的因素. 从本质上讲,规划内部的不确定因素在相当程度上是由外部的不确定因素决定的[3],许多学者也对不确定规划理论和应用研究做了大量的工作[3-6]. 因为直觉模糊集采用隶属函数和非隶属函数刻画不确定现象,所以用直觉模糊集描述不确定规划问题,可从正反两方面考虑不确定规划问题的解,

收稿日期: 2009-01-11; **修回日期**: 2009-05-14.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70701017); 江苏省高等学校优秀创新团队科研基金项目(Y0553-091); 河南省重点科技攻关项目(072102340009); 河南省哲学社会科学规划项目(2007BJJ014); 河南省科技厅软科学研究计划项目(082400440100).
作者简介: 刘成斌(1969—),男,河南商丘人,博士生,从事决策分析的研究; 党耀国(1964—),男,河南驻马店人,教授,博士生导师,从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

从而给决策者提供更全面的参考信息. 但是,现有的工作只限于直觉模糊线性规划等静态规划方面的理论与应用研究[6].

本文在普通动态规划的基础上融合直觉模糊集理论的思想,提出区间直觉模糊动态规划及其相关概念,并给出了最优解的算法. 这对不确定规划以及直觉模糊集理论的发展与应用具有一定的意义.

2　预备知识

2.1　区间直觉模糊集

定义 1[7]　设 X 为非空论域, X 上的一个直觉模糊集定义为

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}. \qquad (1)$$

其中: $\mu_A : X \to [0,1]$, $\nu_A : X \to [0,1]$, 且对于任意 $x \in X$, 有 $0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1$. $\mu_A(x)$ 表示 x 对 A 的隶属程度, 简称为隶属度; $\nu_A(x)$ 表示 x 对 A 的非隶属程度, 简称为非隶属度. 论域 X 上的直觉模糊集的全体构成的集合记为 $\mathrm{IFS}(X)$.

定义 2[7]　设 $A \in \mathrm{IFS}(X)$ 为定义 1 中所示的直觉模糊集, 称 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ 为 x 在 A 中的直觉指标(或直觉指数), 它表示元素 x 隶属于集合 A 与否的不确定程度.

定义 3[8]　设 X 为非空论域, X 上的区间直觉模糊集定义为

$$\overline{A} = \{\langle x, \tilde{\mu}_A(x), \tilde{\nu}_A(x)\rangle \mid x \in X\}. \qquad (2)$$

其中: $\tilde{\mu}_A(x) = [\underline{\mu}_A(x), \overline{\mu}_A(x)] \subseteq [0,1]$, $\tilde{\nu}_A(x) = [\underline{\nu}_A(x), \overline{\nu}_A(x)] \subseteq [0,1]$, 且对于任意 $x \in X$, 满足条件 $\sup \tilde{\mu}_A(x) + \sup \tilde{\nu}_A(x) \le 1$. 论域 X 上的区间直觉模糊集的全体构成的集合记为 $\mathrm{IIFS}(X)$. 若

$$\inf \tilde{\mu}_A(x) = \sup \tilde{\mu}_A(x),\ \inf \tilde{\nu}_A(x) = \sup \tilde{\nu}_A(x),$$

则区间直觉模糊集退化为通常的直觉模糊集.

定义 4[8]　设 $\overline{A}, \tilde{B} \in \mathrm{IIFS}(X)$ 为论域 X 上的区间直觉模糊集, 则:

1) $\overline{A} \cap \tilde{B} =$
$\{\langle x, [\underline{\mu}_A(x) \wedge \underline{\mu}_B(x), \overline{\mu}_A(x) \wedge \overline{\mu}_B(x)],$
$[\underline{\nu}_A(x) \vee \underline{\nu}_B(x), \overline{\nu}_A(x) \vee \overline{\nu}_A(x)]\rangle \mid x \in X\}$;

2) $\overline{A} \cap \tilde{B} =$
$\{\langle x, [\underline{\mu}_A(x) \vee \underline{\mu}_B(x), \overline{\mu}_A(x) \vee \overline{\mu}_B(x)],$
$[\underline{\nu}_A(x) \wedge \underline{\nu}_B(x), \overline{\nu}_A(x) \wedge \overline{\nu}_A(x)]\rangle \mid x \in X\}$;

3) $\overline{A}^c = \{\langle x, \tilde{\nu}_A(x), \tilde{\mu}_A(x)\rangle \mid x \in X\}$;

4) $\overline{A} \subseteq \tilde{B}$ 当且仅当 $\forall x \in X$, $\underline{\mu}_A(x) \le \underline{\mu}_B(x)$, $\overline{\mu}_A(x) \le \overline{\mu}_B(x)$, 且 $\underline{\nu}_A(x) \ge \underline{\nu}_B(x)$, $\overline{\nu}_A(x) \ge \overline{\nu}_B(x)$; $\overline{A} = \tilde{B}$ 当且仅当 $\overline{A} \subseteq \tilde{B}$ 且 $\tilde{B} \subseteq \overline{A}$.

区间直觉模糊集 $\overline{A}$ 的基本组成是由 X 中元素 x 属于 $\overline{A}$ 的隶属度区间和非隶属度区间所组成的有序区间对(称之为区间直觉模糊数[9]). 设有定义在论域 X 上的区间直觉模糊集

$$\overline{A} = \{\langle x, \tilde{\mu}_A(x), \tilde{\nu}_A(x)\rangle \mid x \in X\},$$

简记为

$$\overline{A} = ([\underline{\mu}_A, \overline{\mu}_A], [\underline{\nu}_A, \overline{\nu}_A]). \qquad (3)$$

其中

$$\tilde{\mu}_A(x) = [\underline{\mu}_A(x), \overline{\mu}_A(x)] \subseteq [0,1],$$
$$\tilde{\nu}_A(x) = [\underline{\nu}_A(x), \overline{\nu}_A(x)] \subseteq [0,1],$$
$$\overline{\mu}_A(x) + \overline{\nu}_A(x) \le 1.$$

记

$$\underline{\mu}_A^L = \underline{\mu}_A,\ \underline{\mu}_A^U = 1 - \underline{\nu}_A,$$
$$\overline{\mu}_A^L = \overline{\mu}_A,\ \overline{\mu}_A^U = 1 - \overline{\nu}_A,$$
$$\underline{\pi}_A = \underline{\mu}_A^U - \underline{\mu}_A^L = 1 - \underline{\mu}_A - \underline{\nu}_A,$$
$$\tilde{\pi}_A = \overline{\mu}_A^U - \overline{\mu}_A^L = 1 - \overline{\mu}_A - \overline{\nu}_A,$$

则区间直觉模糊集 $\overline{A}$ 可简记为

$$\overline{A} = ([\underline{\mu}_A^L, \underline{\mu}_A^U], [\overline{\mu}_A^L, \overline{\mu}_A^U]). \qquad (4)$$

称式(4) 为区间直觉模糊集 $\overline{A}$ 的规范化形式.

2.2　区间直觉模糊集的比较

定义 5[10]　对 $\forall a, b \in R$, 称函数

$$p(a > b) = \begin{cases} 1, & a > b; \\ 1/2, & a = b; \\ 0, & a < b \end{cases} \qquad (5)$$

为 $a > b$ 的可能度.

定义 6　对 $\forall A, B \in \mathrm{IFS}(X)$, 有

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\},$$
$$B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle \mid x \in X\}.$$

记

$$\mu_A^L(X) = \mu_A(x),\ \mu_A^U(x) = 1 - \nu_A(x),$$
$$\mu_B^L(x) = \mu_B(x),\ \mu_B^U(x) = 1 - \nu_B(x),$$
$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x),$$
$$\pi_B(x) = 1 - \mu_B(x) - \nu_B(x),$$

则称函数

$$p(A \ge B) = \frac{\min\{\pi_A(x) + \pi_B(x), \max(\mu_A^U(x) - \mu_B^L(x), 0)\}}{\pi_A(x) + \pi_B(x)} \qquad (6)$$

为直觉模糊集 $A \ge B$ 的可能度.

由直觉模糊集的定义可知, 当 $\pi_A(x) = \pi_B(x) = 0$ 时, A 与 B 之间的大小比较转化为实数 $\mu_A(x)$ 与 $\mu_B(x)$ 之间的大小比较, 即此时 $A \ge B$ 的可能度(6) 化为式(5).

命题 1　对 $\forall A, B, C \in \mathrm{IFS}(X)$, 式(6) 定义的可能度满足以下条件:

1) $0 \le p(A \ge B) \le 1$;

2) $p(A \ge B) = 1$ 当且仅当 $1 - \nu_B(x) \le \mu_A(x)$;

3) $p(A \ge B) = 0$ 当且仅当 $1 - \mu_B(x) \le$

$v_A(x)$;

4) $p(A \geq B) + p(B \geq A) = 1, p(A \geq A) = 1/2$;

5) $p(A \geq B) \geq 1/2$ 当且仅当

$$\mu_A(x) - v_A(x) \geq \mu_B(x) - v_B(x);$$

$p(A \geq B) = 1/2$ 当且仅当

$$\mu_A(x) - v_A(x) = \mu_B(x) - v_B(x);$$

6) 若 $p(A \geq B) \geq 1/2, p(B \geq C) \geq 1/2$,则 $p(A \geq C) \geq 1/2$.

类似于文献[11]中的方法可证得命题成立.

定义 7　对 $\forall \overline{A}, \widetilde{B} \in \mathrm{IIFS}(X)$,其规范化形式为

$$\overline{A} = ([\mu_A^L, \mu_A^U], [\overline{\mu}_A^L, \overline{\mu}_A^U]),$$
$$\widetilde{B} = ([\mu_B^L, \mu_B^U], [\overline{\mu}_B^L, \overline{\mu}_B^U]),$$

则称函数

$$p(\overline{A} \geq \widetilde{B}) = \frac{1}{2}\Big\{\frac{\min\{\underset{\sim}{\pi}_A + \underset{\sim}{\pi}_B, \max(\mu_A^U - \mu_B^L, 0)\}}{\underset{\sim}{\pi}_A + \underset{\sim}{\pi}_B} + \frac{\min\{\widetilde{\pi}_A + \widetilde{\pi}_B, \max(\overline{\mu}_A^U - \overline{\mu}_B^L, 0)\}}{\widetilde{\pi}_A + \widetilde{\pi}_B}\Big\} \quad (7)$$

为区间直觉模糊集 $\overline{A} \geq \widetilde{B}$ 的可能度.

由定义 6 和定义 7 可知,当区间直觉模糊集退化为直觉模糊集时,可能度(7)转化为式(6). 同理,可能度(7)也满足式(6)具备的 6 个条件.

2.3　区间直觉模糊集之间的取大与取小运算

定义 8　对 $\forall \overline{A}, \widetilde{B} \in \mathrm{IIFS}(X)$,定义运算 $G(\overline{A}, \widetilde{B}) = \overline{A} \wedge \widetilde{B}$, $H(\overline{A}, \widetilde{B}) = \overline{A} \vee \widetilde{B}$ 分别满足

$$G(\overline{A}, \widetilde{B}) = \begin{cases} \widetilde{B}, & p(\overline{A} \geq \widetilde{B}) \geq 1/2; \\ \overline{A}, & p(\overline{A} \geq \widetilde{B}) < 1/2; \end{cases} \quad (8)$$

$$H(\overline{A}, \widetilde{B}) = \begin{cases} \overline{A}, & p(\overline{A} \geq \widetilde{B}) \geq 1/2; \\ \widetilde{B}, & p(\overline{A} \geq \widetilde{B}) < 1/2. \end{cases} \quad (9)$$

则称 $G(\overline{A}, \widetilde{B})$ 和 $H(\overline{A}, \widetilde{B})$ 分别为区间直觉模糊集 $\overline{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的取小运算和取大运算.

对于给定的一组区间直觉模糊集 $\overline{A_i} \in \mathrm{IIFS}(X), i = 1,2,\cdots,n, n \geq 2$,利用式(3)和(7)计算可能度 $p_{ij} = p(\overline{A_i} \geq \overline{A_j}), i,j = 1,2,\cdots,n$,建立可能度矩阵 $p = (p_{ij})_{n\times n}$. 由于矩阵 p 是一模糊互补判断矩阵,则通过求解矩阵的最大特征值及其对应的特征向量(或利用近似公式 $w_i = \frac{1}{n(n-1)}\Big[\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \frac{n}{2} - 1\Big], i = 1,2,\cdots,n$)可得到矩阵 p 的排序向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$. 从 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 的大小顺序关系,可给出对应区间直觉模糊集的大小顺序.

定义 9　对 $\forall \overline{A_i} \in \mathrm{IIFS}(x), i = 1,2,\cdots,n, n \geq 2$,若其可能度矩阵 $p = (p_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 的最小分量与最大分量分别为 w_{k_1} 和 w_{k_2},即 $w_{k_1} = \min\limits_{1\leq i\leq n} w_i, w_{k_2} = \max\limits_{1\leq i\leq n} w_i$,则定义

$$\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \cdots \wedge \overline{A_n} = \overline{A_{k_1}},$$
$$\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \cdots \vee \overline{A_n} = \overline{A_{k_2}},$$

称 $\overline{A_{k_1}}$ 和 $\overline{A_{k_2}}$ 分别为区间直觉模糊集 $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots, \overline{A_n}$ 的取小运算与取大运算. 同理,可类似定义直觉模糊集之间的取小与取大运算.

由可能度矩阵的定义知,定义 8 与定义 9 是一致的. 由定义 8 和定义 9 可知,任意区间直觉模糊集的取大、取小运算结果仍是区间直觉模糊集.

3　模型及算法

3.1　区间直觉模糊动态规划

为了讨论方便,先作以下假定:

1) 在整个动态规划过程中,系统可处于 l 种不同的状态,即状态集 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_l\}$;并且系统需要接受外界输入,以改变现有状态,达到预定的目标,即输入集 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$.

2) 整个动态规划过程在 $[0, T]$ 时间内完成. 将 $[0, T]$ 分为 n 个时段 $(t_{k-1}, t_k], k = 1,2,\cdots,n$,其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$,并记第 k 时段 $(t_{k-1}, t_k]$ 系统输入为 $u(t_k) \in U$.

3) 系统在第 $k-1$ 时段 $(t_{k-2}, t_{k-1}]$ 末处于状态 $e(t_{k-1})$,在第 k 时段 $(t_{k-1}, t_k]$ 内接受输入为 $u(t_k)$,则第 k 时段末,系统所处的状态 $e(t_k)$ 仅与 $e(t_{k-1})$ 和 $u(t_k)$ 有关,即

$$e(t_k) = f(e(t_{k-1}), u(t_k)),\ k = 1,2,\cdots,n. \quad (10)$$

并且,这样的状态转移还与系统所处的时段无关,仅受一个转移矩阵 $S(U) = (s_{ij})_{l\times m}$ 支配,其中 $s_{ij} \in E$,表示若系统处于状态 $e_i \in E$,输入 $u_j \in U$,则系统将转移至 s_{ij},即

$$s_{ij} = f(e_i, u_j),\ i = 1,2,\cdots,l,\ j = 1,2,\cdots,m. \quad (11)$$

4) 系统的初始状态为 $e(t_0)$,要求达到的目标(即系统在 $t_n = T$ 时刻所处的状态)是 E 上的区间直觉模糊集

$$\widetilde{b}_n(e_i) = \widetilde{b}_{ni} = \{\langle e_i, \widetilde{\mu}_{bn}(e_i), \widetilde{v}_{bn}(e_i)\rangle \mid e_i \in E\} \in \mathrm{IIFS}(E),\ i = 1,2,\cdots,l.$$

称

$$\widetilde{b}_n = (\widetilde{b}_{n1}, \widetilde{b}_{n2}, \cdots, \widetilde{b}_{nl}) \quad (12)$$

为第 n 时段区间直觉模糊目标约束向量.

5) 在第 k 时段 $(t_{k-1}, t_k], k = 1,2,\cdots,n$,系统采用输入 u_j 时受到 U 上的区间直觉模糊集约束

$$\widetilde{c}_k(u_j) = \widetilde{c}_{kj} =$$

$$\{\langle u_j, \widetilde{\mu}_{ck}(u_j), \widetilde{\nu}_{ck}(u_j)\rangle \mid u_j \in U\} \in \mathrm{IIFS}(U),$$
$$j = 1,2,\cdots,m.$$

并称

$$\widetilde{c}_k = (\widetilde{c}_{k1}, \widetilde{c}_{k2}, \cdots, \widetilde{c}_{km}) \tag{13}$$

为第 k 时段区间直觉模糊输入约束向量.

命题 2　由普通动态规划可知,在以上假设下,若给定 $e(t_0)$ 和 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_n)$,则必可找到唯一的 $e(t_n) \in E$ 作为系统的最终状态.

当给定 $e(t_0)$ 和 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_n)$ 时,有唯一的 $e(t_n) = e(T)$ 作为系统的最终状态. 对于给定的 $e(t_0)$ 及区间直觉模糊目标约束向量 $\widetilde{b}_n$,各时段区间直觉模糊输入向量约束 $\widetilde{c}_k, k = 1,2,\cdots,n$,希望找到输入序列 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_n)$,使系统以最大可能度选择每个输入 $u(t_k), k = 1,2,\cdots,n$,且使系统以最大可能度最终达到状态 $e(T)$,这样的多阶段决策过程称为区间直觉模糊动态规划.

3.2　模型及算法

区间直觉模糊动态规划的数学模型如下:

在 3.1 节条件 1) ～ 条件 5) 的假定下,给定 $e(t_0)$,记

$$U^* = \{u \mid u = (u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_n), e(t_n))\},$$

满足

$$e(t_1) = f(e(t_0), u(t_1)),$$
$$e(t_2) = f(e(t_1), u(t_2)),$$
$$\cdots$$
$$e(t_n) = f(e(t_{n-1}), u(t_n)).$$

定义 U^* 上的区间直觉模糊取小算子 $\widetilde{F}$ 为:对 $\forall u = (u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_n), e(t_n)) \in U^*$,满足

$$\widetilde{F}(u) = \widetilde{c}_1(u(t_1)) \wedge \widetilde{c}_2(u(t_2)) \wedge \cdots \wedge \widetilde{c}_n(u(t_n)) \wedge \widetilde{b}_n(e(t_n)), \tag{14}$$

寻找 $u^\Delta \in U^*$,使得

$$\widetilde{F}(u^\Delta) = \bigvee_{u \in U^*} \widetilde{F}(u), \tag{15}$$

称 $u^\Delta = (u^\Delta(t_1), u^\Delta(t_2), \cdots, u^\Delta(t_n), e^\Delta(t_n))$ 为该区间直觉模糊动态规划的最优解.

区间直觉模糊动态规划的算法:

对于已知区间直觉模糊动态规划问题,其最优解的计算步骤如下:

1) 对于固定的 $e_i \in E$,根据给定的区间直觉模糊约束向量 $\widetilde{c}_n, \widetilde{b}_n$ 以及状态转移矩阵 $S(U)$,对任取 $u_j \in U$,由区间直觉模糊集比较可能度公式(7) 与取小运算公式(8) 计算

$$\widetilde{G}_n(e_i, u_j) = \widetilde{c}_n(u_j) \wedge \widetilde{b}_n(f(e_i, u_j)),$$
$$j = 1,2,\cdots,m;$$

再对 m 个区间直觉模糊集 $\widetilde{G}_n(e_i, u_1), \widetilde{G}_n(e_i, u_2), \cdots, \widetilde{G}_n(e_i, u_m)$ 计算其比较可能度矩阵 p^{ni},进而计算矩阵 p^{ni} 的排序向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$. 设其分量最大者为 w_{j_0},即 $w_{j_0} = \max_{1 \le i \le m} w_i$,记 $(\widetilde{b}_{n-1\,i}) = \widetilde{G}_n(e_i, u_{j_0})$,则 u_{j_0} 为最优化问题

$$\max \widetilde{c}_n(u_j) \wedge \widetilde{b}_n(f(e_i, u_j)),$$
$$\text{s.t.}\ u_j \in U$$

的解. 记 $u_n(i) = u_{j_0}$,即第 $n-1$ 时段末系统处于状态 e_i 时, $u_n(i)$ 是最优输入.

2) 对每一个 $e_i \in E$,施行步骤 1) 得第 $n-1$ 时段末区间直觉模糊目标约束向量 $\widetilde{b}_{n-1} = (\widetilde{b}_{(n-1)1}, \widetilde{b}_{(n-1)2}, \cdots, \widetilde{b}_{(n-1)l})$,以及对应的最优输入,如表 1 所示.

表 1　第 n - 1 时段末系统区间直觉模糊目标约束及对应的最优输入

$e(t_{n-1})$	e_1	e_2	$\cdots$	e_l
$\widetilde{b}_{(n-1)}(e_i)$	$\widetilde{b}_{(n-1)1}$	$\widetilde{b}_{(n-1)2}$	$\cdots$	$\widetilde{b}_{(n-1)l}$
$u_n(i)$	$u_n(1)$	$u_n(2)$	$\cdots$	$u_n(l)$

3) 已知 $\widetilde{b}_k = (\widetilde{b}_{k1}, \widetilde{b}_{k2}, \cdots, \widetilde{b}_{kl}), 1 \le k \le n$,对固定的 e_i,任取 $u_j \in U$,计算区间直觉模糊集

$$\widetilde{G}_k(e_i, u_j) = \widetilde{c}_k(u_j) \wedge \widetilde{b}_k(f(e_i, u_j)),$$
$$j = 1,2,\cdots,m,$$

进而求解最优化问题

$$\max \widetilde{c}_k(u_j) \wedge \widetilde{b}_k(f(e_i, u_j)),$$
$$\text{s.t.}\ u_j \in U. \tag{16}$$

即求区间直觉模糊集 $\widetilde{G}_k(e_i, u_1), \widetilde{G}_k(e_i, u_2), \cdots, \widetilde{G}_k(e_i, u_m)$ 的比较可能度矩阵 p^{ki} 的排序向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$,设其分量最大者为 w_{j^*},即 $w_{j^*} = \max_{1 \le i \le m} w_i$,记 $u_k(i) = u_{j^*}$,则 $u_k(i)$ 为最优化问题(16) 的解,记 $\widetilde{b}_{(k-1)i} = \widetilde{G}_k(e_i, u_{j^*})$.

4) 对每一个 $e_i \in E$,施行步骤 3),则得到第 $k-1$ 时段末区间直觉模糊目标约束向量 $\widetilde{b}_{k-1} = (\widetilde{b}_{(k-1)1}, \widetilde{b}_{(k-1)2}, \cdots, \widetilde{b}_{(k-1)l})$,以及对应的最优输入,如表 2 所示.

表 2　第 k - 1 时段末系统区间直觉模糊目标约束及对应的最优输入

$e(t_{k-1})$	e_1	e_2	$\cdots$	e_l
$\widetilde{b}_{(k-1)}(e_i)$	$\widetilde{b}_{(k-1)1}$	$\widetilde{b}_{(k-1)2}$	$\cdots$	$\widetilde{b}_{(k-1)l}$
$u_k(i)$	$u_k(1)$	$u_k(2)$	$\cdots$	$u_k(l)$

5) 依次取 $k = n, n-1, \cdots, 2, 1$. 重复计算步骤 3) 和 4),即可得到每个时段对应的表 2.

6) 对给定的初始状态 $e(t_0) = e_{i_0} \in E$,由 $k = 1$ 时对应的表 2 可得到在第 1 时段末达到区间直觉模糊目标 $\widetilde{b}_1$ 的最优输入 $u_1(i_0)$,由式(10) 得 $e(t_1) = f(e_{i_0}, u_1(i_0))$,继续上述计算直至 $k = n$,且设 $e(t_{n-1}) = e_{i_{n-1}}$,由 $k = n$ 时的表 2(即表 1) 可得

$u_n(i_{n-1})$，再利用式(10)得 $e(t_n) = f(e_{i_{n-1}}, u_n(i_{n-1}))$，进而得到

$$u^{\Delta} = (u_1(i_0), u_2(i_1), \cdots, u_n(i_{n-1}), e(t_n)) \in U^*,$$

则 u^{Δ} 满足式(15)，即为所求区间直觉模糊动态规划的最优解.

由直觉模糊集与区间直觉模糊集之间的联系，以及直觉模糊集比较可能度公式(6)，可类似地给出直觉模糊动态规划的有关概念、数学模型及其最优解的算法.

4　算例分析

设有某多阶段决策系统，共计可处于 4 种状态和 5 种输入形式，即 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，共有 4 个时段，各种时段输入所受区间直觉模糊集约束如表 3 所示，系统最终达到的区间直觉模糊目标约束如表 4 所示，状态转移矩阵

$$S(U) = \begin{bmatrix} e_2 & e_3 & e_1 & e_4 & e_1 \\ e_4 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_3 \\ e_3 & e_2 & e_3 & e_4 & e_1 \end{bmatrix},$$

计算该区间直觉模糊动态规划的最优解. 首先，利用式(3)将表 3 和表 4 中的区间直觉模糊集转化为规范化形式，得表 5 和表 6.

根据区间直觉模糊动态规划最优解的算法，在本例中，$l = n = 4$，$m = 5$，依据算法中的步骤 1)和 2)，先计算第 3 时段末的区间直觉模糊目标约束向量 $\tilde{b}_3$ 及第 4 时段的最优输入. 由已知 $\tilde{c}_4$(见表 5)，$\tilde{b}_4$(见表 6)以及状态转移矩阵 $S = (U)$，利用式(7)和(8)可得

$$\tilde{G}_4(e_1, u_1) = ([0.3, 0.7], [0.5, 0.6]),$$
$$\tilde{G}_4(e_1, u_2) = ([0.6, 1], [0.8, 0.9]),$$
$$\tilde{G}_4(e_1, u_3) = ([0.1, 0.4], [0.2, 0.3]),$$
$$\tilde{G}_4(e_1, u_4) = ([0.1, 0.5], [0.3, 0.4]),$$
$$\tilde{G}_4(e_1, u_5) = ([0, 0.2], [0.1, 0.1]).$$

计算其比较可能度矩阵 p^{41}，得其排序向量 $w = (0.2358, 0.2969, 0.1593, 0.1914, 0.1167)$. 因排序向量 w 的最大分量为 $w = 0.2969$，所以 $u_4(1) = u_2$，并且 $\tilde{b}_{31} = \tilde{G}_4(e_1, u_2) = ([0.6, 1], [0.8, 0.9])$.

同理可得 $u_4(2) = u_2$，且 $\tilde{b}_{32} = \tilde{G}_4(e_2, u_2) = ([0.9, 1], [1, 1])$；$u_4(3) = u_2$，且 $\tilde{b}_{33} = \tilde{G}_4(e_3, u_2) = ([0.4, 0.7], [0.5, 0.6])$；$u_4(4) = u_2$，且 $\tilde{b}_{34} = \tilde{G}_4(e_4, u_2) = ([0.4, 0.7], [0.5, 0.6])$. 故得 $\tilde{b}_3 = (\tilde{b}_{31}, \tilde{b}_{32}, \tilde{b}_{33}, \tilde{b}_{34})$，及其对应的最优输入 $(u_4(1), u_4(2), u_4(3), u_4(4)) = (u_2, u_2, u_2, u_2)$.

利用算法中的步骤 3)和 4)，依次取 $k = 3, 2, 1$，可分别算得 $\tilde{b}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_0$ 及其对应的最优输入. 综合所有结果，得表 7(需要时，利用式(3)将表中信息还原为区间直觉模糊集的一般表示形式).

若取定 $e(t_0)$，不妨设 $e(t_0) = e_3$，则由表 7 及状态转移矩阵 $S(U)$ 可得最优解 $u^{\Delta} \in U^*$，且

表 3　各时段输入所受区间直觉模糊集约束

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$\tilde{c}_1(u_j)$	([0, 0.1], [0.8, 0.9])	([0.1, 0.2], [0.5, 0.6])	([0.1, 0.3], [0.4, 0.6])	([0.5, 0.6], [0.2, 0.3])	([0.8, 1], [0, 0])
$\tilde{c}_2(u_j)$	([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.9, 1], [0, 0])	([0.3, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.2, 0.3], [0.4, 0.5])	([0, 0.2], [0.5, 0.7])
$\tilde{c}_3(u_j)$	([0.1, 0.2], [0.5, 0.7])	([0.1, 0.3], [0.5, 0.6])	([0.8, 0.9], [0, 0])	([0.8, 1], [0, 0])	([0.1, 0.3], [0.5, 0.7])
$\tilde{c}_4(u_j)$	([0.3, 0.5], [0.3, 0.4])	([0.9, 1], [0, 0])	([0.3, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.1, 0.3], [0.5, 0.6])	([0, 0.1], [0.8, 0.9])

表 4　系统最终达到的区间直觉模糊集目标约束

	e_1	e_2	e_3	e_4
$\tilde{b}_4(e_i)$	([0.1, 0.2], [0.6, 0.7])	([0.4, 0.5], [0.3, 0.4])	([0.6, 0.8], [0, 0.1])	([0.9, 1], [0, 0])

表 5　各时段输入所受区间直觉模糊集约束的规范化形式

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$\tilde{c}_1(u_j)$	([0, 0.2], [0.1, 0.1])	([0.1, 0.5], [0.2, 0.4])	([0.1, 0.6], [0.3, 0.4])	([0.5, 0.8], [0.6, 0.7])	([0.8, 1], [1, 1])
$\tilde{c}_2(u_j)$	([0.2, 0.6], [0.4, 0.5])	([0.9, 1], [1, 1])	([0.3, 0.6], [0.4, 0.5])	([0.2, 0.6], [0.3, 0.5])	([0, 0.5], [0.2, 0.3])
$\tilde{c}_3(u_j)$	([0.1, 0.5], [0.2, 0.3])	([0.1, 0.5], [0.3, 0.4])	([0.8, 1], [0.9, 1])	([0.8, 1], [1, 1])	([0.1, 0.5], [0.3, 0.3])
$\tilde{c}_4(u_j)$	([0.3, 0.7], [0.5, 0.6])	([0.9, 1], [1, 1])	([0.3, 0.6], [0.4, 0.5])	([0.1, 0.5], [0.3, 0.4])	([0, 0.2], [0.1, 0.1])

表 6　系统最终达到的区间直觉模糊集目标约束的规范化形式

	e_1	e_2	e_3	e_4
$\tilde{b}_4(e_i)$	([0.1, 0.4], [0.2, 0.3])	([0.4, 0.7], [0.5, 0.6])	([0.6, 1], [0.8, 0.9])	([0.9, 1], [1, 1])

表 7　区间直觉模糊动态规划各时段最优输入规范化形式

时段		e_1	e_2	e_3	e_4
4	$\widetilde{b_3}(e_i)$	$([0.6,1],[0.8,0.9])$	$([0.9,1],[1,1])$	$([0.4,0.7],[0.5,0.6])$	$([0.4,0.7],[0.5,0.6])$
	$u_4(i)$	u_2	u_2	u_2	u_2
3	$\widetilde{b_2}(e_i)$	$([0.6,1],[0.8,0.9])$	$([0.8,1],[1,1])$	$([0.4,0.7],[0.5,0.6])$	$([0.4,0.7],[0.5,0.6])$
	$u_3(i)$	u_3	u_4	u_3, u_4	u_3, u_4
2	$\widetilde{b_1}(e_i)$	$([0.4,0.7],[0.5,0.6])$	$([0.4,0.7],[0.5,0.6])$	$([0.8,1],[1,1])$	$([0.8,1],[1,1])$
	$u_2(i)$	u_2	u_2	u_2	u_2
1	$\widetilde{b_0}(e_i)$	$([0.5,0.8],[0.6,0.7])$	$([0.4,0.7],[0.5,0.6])$	$([0.8,1],[1,1])$	$([0.5,0.8],[0.6,0.7])$
	$u_1(i)$	u_4	u_4, u_5	u_5	u_4

$u^{\Delta} = (u_5, u_2, u_4, u_2, e_4)$,

$F(u^{\Delta}) =$

$\widetilde{c_1}(u_5) \wedge \widetilde{c_2}(u_2) \wedge \widetilde{c_3}(u_4) \wedge \widetilde{c_4}(u_2) \wedge \widetilde{b_4}(e_4) =$

$([0.8,1],[1,1])$.

由式(3) 还原得

$$F(u^{\Delta}) = ([0.8,1],[0,0]).$$

此时,最优转移过程为

$$e(t_0) = e_3 \xrightarrow{u_5} e_3 \xrightarrow{u_2} e_2 \xrightarrow{u_4} e_2 \xrightarrow{u_2} e_4.$$

5　结　　论

本文基于直觉模糊集理论的思想研究了多阶段决策问题,提出区间直觉模糊动态规划的概念,构建了区间直觉模糊动态规划的数学模型,并给出了求最优解的算法. 依据区间直觉模糊集与直觉模糊集之间的内在联系,可类似定义直觉模糊动态规划的有关概念、对应的数学模型及算法. 由于直觉模糊集,尤其是区间直觉模糊集在刻画多阶段决策过程中主观和客观不确定性因素方面的独特优势,使得区间直觉模糊(或直觉模糊)动态规划与普通动态规划[2]、灰色动态规划[3]、模糊动态规划[5]相比,更具柔性,能更好地贴近不确定性多阶段决策问题的实际. 文中的算例说明了区间直觉模糊动态规划最优解的算法是可行的. 区间直觉模糊动态规划模型的提出,对直觉模糊集理论的应用研究具有一定的理论价值和实际意义.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004.)

[2] 罗党, 胡沛枫. 管理运筹学[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2007.
(Luo D, Hu P F. Managerial operations research[M]. Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics Press, 2007.)

[3] 罗党. 灰色决策问题分析方法[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 2005.
(Luo D. Analytic methods for grey decision-making [M]. Zhengzhou: Yellow River Conservancy Press, 2005.)

[4] 刘宝碇, 赵瑞清, 王纲. 不确定规划及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
(Liu B D, Zhao R Q, Wang G. Uncertain programming with applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[5] 彭祖赠, 孙温玉. 模糊(Fuzzy)数学及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
(Peng Z Z, Sun W Y. Fuzzy mathmaticas and its application [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2002.)

[6] 刘玉新. 直觉模糊规划理论研究及应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2006.
(Liu Y X. Intuitionistic fuzzy programming theory and applications [D]. Dalian: Dalian University of Technology Doctoral Dissertation, 2006.)

[7] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[8] Atanassov K T. Interval valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[9] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
(Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.)

[10] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making methods and applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[11] 林琳. 直觉模糊集在近似推理与决策中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2006.
(Lin L. Intuitionistic fuzzy sets applied in approximate reasoning and decision-making [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006.)