

文章编号: 1001-0920(2011)10-1591-05

## 非线性控制系统状态方程直接积分解法

曹少中<sup>1</sup>, 涂序彦<sup>2</sup>

(1. 北京印刷学院 信息与机电工程学院, 北京 102600; 2. 北京科技大学 计算机与通信工程学院, 北京 100083)

**摘要:** 鉴于非线性系统分析的核心归结为系统状态方程的求解, 针对一般非线性控制系统, 引入由状态量、控制量与自变量时间  $t$  为坐标构成的“广义时态空间”. 为了解非线性状态方程, 在广义时态空间  $(t_k, x(k), u(k))$  处将方程的右端展开为  $(t - t_k)$  的 Taylor 级数, 通过直接积分获得了非线性控制系统状态方程关于自变量时间  $(\tau = t - t_k)$  的级数解, 并证明了解的收敛性.

**关键词:** 非线性控制系统; 状态方程; 直接积分; Taylor 级数

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Direct-integrating approach for solving state equation of nonlinear control systems

CAO Shao-zhong<sup>1</sup>, TU Xu-yan<sup>2</sup>

(1. School of Information and Mechanical Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China; 2. School of Computer and Communication Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China. Correspondent: CAO Shao-zhong, E-mail: cszh6502@163.com)

**Abstract:** The kernel of nonlinear system analysis is the solving of system state equation. Therefore, for a general nonlinear control system, the concept of general time-state space comprising of state variables, control variable, and time  $t$  is introduced. In order to solve the state equation of nonlinear control systems, at the operation point  $(t_k, x(k), u(k))$  of general time-state space, the right side of the state equation can be expanded as Taylor series about  $(t - t_k)$ . Then the series solution of the nonlinear control state equation, for which the solution is expression in  $(t - t_k)$  series, can be obtained by using direct-integrating approach. Finally, the convergence of the solution is proved.

**Key words:** nonlinear control systems; state equation; direct-integrating; Taylor series

### 1 引言

系统分析是非线性系统理论研究的一个基本课题. 从数学角度看, 系统分析的实质是求解系统的状态方程. 对于连续时间非线性系统, 系统分析归结为相对于给定初始状态和输入向量求解非线性状态方程. 对于一般的非线性系统状态方程, 至今难以求得一般解析解. 鉴于非线性分析的复杂性, 人们绕过分析而直接研究非线性系统的综合问题. 近20年来, 人们应用微分几何理论对非线性系统的精确线性化和解耦等系统的综合问题取得了实质性的突破<sup>[1-2]</sup>. 然而, 对于一个实际的系统, 要具体找出所需的非线性变换是相当复杂的, 只对部分具有特殊结构的非线性系统(如具有三角结构的系统)才可以得到非线性变换. 因此, 研究非线性系统近似分析和综合方法仍具

有重要的理论意义和实际价值, 近年来也一直受到人们的高度重视. 近似线性化方法被证明在平衡点的某一邻域内是有效的, 误差可以接受, 因而已广泛地应用于实际系统中, 主要包括伪线性化方法<sup>[3]</sup>、线性化族<sup>[4]</sup>、近似输入/输出线性化<sup>[5]</sup>、奇摄动方法<sup>[6-7]</sup>、中心流形方法<sup>[8-10]</sup>等. 这些方法只针对某一类非线性系统比较有效, 缺乏适用于一般非线性系统的普遍近似分析方法, 因此, 研究一般非线性系统近似分析方法很有必要.

对于非线性系统状态方程, 由于非线性增加了一阶微分方程右端对于自变量的隐含性, 导致除少数特例外一般不可积, 给求解带来了巨大困难. 通过引入由状态量  $x_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ , 控制变量  $u_j(t) (j = 1, 2, \dots, m)$  及自变量(一般为时间  $t$ )为坐标构

收稿日期: 2010-07-06; 修回日期: 2011-01-25.

基金项目: 北京市自然科学基金项目(4092013, 4112019); 北京市教育委员会科技计划重点项目(KZ201110015017).

作者简介: 曹少中(1965-), 男, 教授, 博士后, 从事智能控制、非线性系统控制等研究; 涂序彦(1935-), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、人工生命等研究.

成的广义状态空间概念, 在广义状态空间的  $(x(k), u(k), t_k)$  处将一阶微分方程的右端  $f(x(t), u(t), t)$  展开为  $t-t_k$  的 Taylor 级数, 使之变为  $t-t_k$  的显函数, 从而通过直接积分获得了非线性控制系统关于  $\tau = t - t_k$  的无穷级数解析解. 应当指出, 非线性控制系统状态方程关于  $\tau$  的级数解中, 具有不同精度的各级近似公式可以表示为  $\tau$  的分段解析函数, 便于研究非线性控制系统的动力学行为与其物理参数的依赖关系. 同时, 相邻两级近似式之间只相差一个增量, 其余部分不变, 通过按精度要求选取不同近似式的途径, 容易编制出相应的定步长自适应算法. 本文在上述公式的基础上, 令  $t_k = 0$ , 简化出非线性控制系统状态方程关于  $t$  的无穷级数解, 并证明了级数解的收敛性. 为了表明上述级数解的有效性, 通过算例演示了各级近似解的数值变化趋势, 并与精确解析解作了比较.

## 2 非线性控制系统状态方程的级数解析解

一般非线性控制系统状态方程描述为

$$\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_k) = x(k). \quad (1)$$

其中:  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$  为  $N$  维状态向量;  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$  为控制向量;  $m \leq N$ ;  $t$  为自变量时间;  $f(x(t), u(t), t) = (f_1(x(t), u(t), t), f_2(x(t), u(t), t), \dots, f_N(x(t), u(t), t))^T$  为  $N$  维实值函数向量. 为了研究问题的方便, 引入广义状态空间的概念.

**定义 1** 对于非线性控制系统, 由系统的状态量  $x_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$  和控制变量  $u_j(t) (j = 1, 2, \dots, m)$  及自变量时间  $t$  为坐标组成的空间称为广义时态空间.

根据广义时态空间概念, 显然, 系统状态方程 (1) 的求解是一个初值问题.

**引理 1** 设初值问题为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t &= f_i(x(t), u(t), t), \\ x_i(t_k) &= x_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

$f_i(x(t), u(t), t)$  在区域  $R$  中连续, 且在区间  $I$  中具有任意多次导数,  $u(t)$  在该区间也存在任意多次导数, 并存在正数  $H$  和自然数  $N$ , 使得

$$|f_i^{(n)}(x(t), u(t), t)| \leq H, \quad \forall t \in I, \quad n > N.$$

其中

$$\begin{aligned} R: |t - t_k| &\leq a, \quad |x_i(t) - x_i(k)| \leq b_i, \\ |u_j(t) - u_j(k)| &\leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, m; \\ I &= [t_k - h, t_k + h], \quad h = \min\{a, d/M\}, \\ M &> |f_i(x(t), u(t), t)|, \quad d = \min\{b_i, c_j\}. \end{aligned}$$

则  $f_i(x(t), u(t), t)$  在区间  $I$  上可以展开成如下收敛的自变量的 Taylor 级数:

$$\begin{aligned} f_i(x(t), u(t), t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

**证明** 因假设  $f_i(x(t), u(t), t)$  在区间  $I$  上可求导任意多次,  $t_k \in I$ , 故函数  $f_i(x(t), u(t), t)$  可展开为

$$f_i(x(t), u(t), t) = \sum_{l=0}^n \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l + R_{i, n+1}(t).$$

现求解余项的极限, 将余项表示为拉格朗日形式, 可得

$$\begin{aligned} |R_{i, n+1}(t)| &= \left| \frac{f_i^{(n+1)}(t_k + \theta(t - t_k))}{(n+1)!} (t - t_k)^{n+1} \right| \leq \\ &H \frac{(|t - t_k|)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall t \in I, \quad n > N. \end{aligned}$$

由此易得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{i, n+1}(t) = 0$ , 故有

$$\begin{aligned} f_i(x(t), u(t), t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_i^{(0)}(t_k) &= f_i(x(k), u(k), t_k), \\ f_i^{(1)}(t_k) &= \left. \frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}t} \right|_{t_k, x(k), u(k)} = \\ &\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_{t_k, x(k), u(k)} + \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} f_j \right|_{t_k, x(k), u(k)} + \\ &\sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} \right|_{t_k, x(k), u(k)} = \\ &f_{it}^{(1)}(x(k), u(k), t_k) + \\ &\sum_{j=1}^N f_{ix_j}^{(1)}(x(k), u(k), t_k) f_j(x(k), u(k), t_k) + \\ &\sum_{j=1}^m f_{iu_j}^{(1)}(x(k), u(k), t_k) u_j^{(1)}(k), \\ &\vdots \\ f_i^{(l)}(t_k) &= \left. \frac{\mathrm{d}f_i^{(l-1)}}{\mathrm{d}t} \right|_{t_k, x(k), u(k)} = \\ &\left. \frac{\partial f_i^{(l-1)}}{\partial t} \right|_{t_k, x(k), u(k)} + \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f_i^{(l-1)}}{\partial x_j} f_j \right|_{t_k, x(k), u(k)} + \\ &\sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_j^{(l-1)}}{\partial u_j} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} \right|_{t_k, x(k), u(k)} = \\ &f_{it}^{(l)}(x(k), u(k), t_k) + \\ &\sum_{j=1}^N f_{ix_j}^{(l)}(x(k), u(k), t_k) f_j(x(k), u(k), t_k) + \\ &\sum_{j=1}^m f_{iu_j}^{(l)}(x(k), u(k), t_k) u_j^{(l)}(k). \end{aligned}$$

以下证明收敛性. 由假设可知

$$|f_i(x(t), u(t), t)| \leq \sum_{l=0}^{+\infty} \left| \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l \right| \leq H \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{a^l}{l!} \leq He^a,$$

即  $f(x(t), u(t), t)$  关于自变量  $t$  的 Taylor 展开级数是收敛的.  $\square$

**定理 1** 初值问题 (2) 的  $f_i(x(t), u(t), t)$  在区域  $R$  中的区间  $I$  上可以展为自变量  $t$  收敛的 Taylor 级数, 则初值问题 (2) 在  $t_k$  点的邻域  $|t - t_k| < \rho$  ( $\rho = a(1 - e^{-d/2aM})$ ) 内有一个且仅有一个级数解为

$$x_i(t) = x_i(k) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{(l+1)!} (t - t_k)^{l+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

**证明** 将式 (3) 代入微分方程, 则式 (2) 可改写为

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l, \quad x_i(t_k) = x_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

显然, 初值问题 (2) 的解满足式 (4). 现证初值问题 (2) 关于  $(t - t_k)$  的级数解的唯一性, 为此, 将式 (4) 改写为如下形式:

$$x_i(t) = x_i(k) + \sum_{l=1}^{+\infty} g_l (t - t_k)^l, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} g_1 &= f_i^{(0)}(t_k) = f_i(x(k), u(k), t), \\ g_2 &= \frac{1}{2!} f_i^{(1)}(t_k) = \frac{1}{2!} \left[ f_{it}^{(1)}(x(k), u(k), t_k) + \sum_{j=1}^N f_{ix_j}^{(1)}(x(k), u(k), t_k) f_j(x(k), u(k), t_k) + \sum_{j=1}^m f_{iu_j}^{(1)}(x(k), u(k), t_k) u_j^{(1)}(k) \right], \\ &\vdots \\ g_l &= \frac{1}{l!} f_i^{(l-1)}(t_k) = \frac{1}{l!} \left[ f_{it}^{(l-1)}(x(k), u(k), t_k) + \sum_{j=1}^N f_{ix_j}^{(l-1)}(x(k), u(k), t_k) f_j(x(k), u(k), t_k) + \sum_{j=1}^m f_{iu_j}^{(l-1)}(x(k), u(k), t_k) u_j^{(1)}(k) \right]. \end{aligned}$$

上述结果表明, 系数只与标号和  $f_i$  的任意阶导数  $f_i^{(l)}(t_k)$  有关, 与  $f(x(t), u(t), t)$  无关, 由假设可知, 一旦给定初值  $t_k, x(k)$  和  $u(k), f^{(l)}(t_k)$  就唯一确定, 因

此, 初值问题 (2) 关于  $(t - t_k)$  的级数解是唯一的.  $\square$

引入相对于该段起始时刻  $t_k$  的时间坐标  $\tau$ , 有

$$\tau = t - t_k. \quad (7)$$

式 (4) 可改写为

$$x_i(t) = x_i(k) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{(l+1)!} \tau^{l+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

在实际计算时, 级数只取有限项. 当 Taylor 多项式的次数为  $0, 1, 2, \dots$  时, 相应近似公式分别称为一级近似式、二级近似式和三级近似式等, 具体如下: 一级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k)\tau, \quad (9)$$

二级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k)\tau + \frac{1}{2!} f_i^{(1)}(t_k)\tau^2, \quad (10)$$

三级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k)\tau + \frac{1}{2!} f_i^{(1)}(t_k)\tau^2 + \frac{1}{3!} f_i^{(2)}(t_k)\tau^3, \quad (11)$$

$\vdots$

当  $\tau$  取步长  $\Delta t$  时, 由初值  $x(0)$  可根据需要选用相应的  $j+1$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) 次近似式

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{l=0}^j \frac{1}{(l+1)!} f_i^{(l)}(k) \Delta t^{l+1}, \quad (12)$$

逐步计算出  $x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(k), x_i(k+1)$ . 若令起始时刻  $t_k = 0$ , 则式 (8) 变为

$$x_i(t) = x_i(0) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(0)}{(l+1)!} t^{l+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

其中:  $x_i(0)$  为初始状态向量,  $f_i^{(l)}(0)$  为在  $t = 0$  时刻的  $f(x(t), u(t), t)$  及各阶导数.

由上述结果可见, 只要知道非线性控制系统的状态方程, 且  $f(x(t), u(t), t)$  的各阶导数均存在, 就可以根据上述公式求出状态向量的逐次近似解, 并且无穷级数解的极限函数即为非线性控制系统状态方程的精确解.

### 3 非线性控制系统状态方程级数解收敛性

由假设 1 和引理 1 有

$$|x_i(t) - x_i(k)| \leq \sum_{l=0}^{+\infty} \left| \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{(l+1)!} (t - t_k)^{l+1} \right| \leq H \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{a^{l+1}}{(l+1)!} \leq H \left( \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{a^l}{l!} - 1 \right) = H(e^a - 1). \quad (14)$$

式 (14) 表明, 初值问题 (2) 关于  $(t - t_k)$  的级数解 (4) 是收敛的.

### 4 算例分析

对于由式(1)描述的非线性控制系统,若  $u(t) = 0$ , 则系统简化为非线性动力学系统, 由非线性动力学方程来描述. 同样, 可得到与式(8)~(13)形式一样的非线性动力学方程的级数解. 下面以单摆为例, 说明如何应用直接积分法求解非线性系统方程的级数解.

为了便于与解析解进行比较, 考虑单摆的非线性振动, 幅角  $x$  应满足方程  $\ddot{x} = -\omega^2 \sin x, \omega^2 = g/l$ . 设  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1$ , 则原方程变为一阶微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega^2 \sin x_1. \quad (15)$$

改写成矢量形式为

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t). \quad (16)$$

其中

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right)^T, \\ f(x(t), t) = (x_2, -\omega^2 \sin x_1)^T.$$

选取步长为  $\Delta t$ , 由初值  $x(0)$  和式(12)可以得到不同时刻单摆所处的角度  $x(k)$ , 式(12)改写为

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{n=0}^j \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(k) \Delta t^{n+1}, \\ j = 0, 1, \dots \quad (17)$$

由式(15)和(17)可以得到单摆系统级数解一级近似~六级近似公式如下: 一级近似为

$$x(k+1) = x(k) + f(k) \Delta t, \quad (18)$$

二级近似为

$$x(k+1) = x(k) + f(k) \Delta t + \frac{1}{2!} f^{(1)}(k) \Delta t^2, \quad (19)$$

三级近似为

$$x(k+1) = x(k) + f(k) \Delta t + \frac{1}{2!} f^{(1)}(k) \Delta t^2 + \frac{1}{3!} f^{(2)}(k) \Delta t^3, \quad (20)$$

四级近似为

$$x(k+1) = x(k) + f(k) \Delta t + \frac{1}{2!} f^{(1)}(k) \Delta t^2 + \frac{1}{3!} f^{(2)}(k) \Delta t^3 + \frac{1}{4!} f^{(3)}(k) \Delta t^4, \quad (21)$$

五级近似为

$$x(k+1) = x(k) + f(k) \Delta t + \frac{1}{2!} f^{(1)}(k) \Delta t^2 + \frac{1}{3!} f^{(2)}(k) \Delta t^3 + \frac{1}{4!} f^{(3)}(k) \Delta t^4 + \frac{1}{5!} f^{(4)}(k) \Delta t^5, \quad (22)$$

六级近似为

$$x(k+1) = x(k) + f(k) \Delta t + \frac{1}{2!} f^{(1)}(k) \Delta t^2 + \frac{1}{3!} f^{(2)}(k) \Delta t^3 + \frac{1}{4!} f^{(3)}(k) \Delta t^4 + \frac{1}{5!} f^{(4)}(k) \Delta t^5 + \frac{1}{6!} f^{(5)}(k) \Delta t^6. \quad (23)$$

其中

$$x(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]^T; \\ f(k) = f(x(t), t)|_{t=t_k} = \begin{bmatrix} x_2(t_k) \\ -\omega^2 \sin x_1(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(k) \\ -\omega^2 \sin x_1(k) \end{bmatrix}; \\ f^{(1)}(k) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2(t)}{dt} \right]_{t=t_k, x_1(t)=x_1(k), x_2(t)=x_2(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ -\omega^2 \sin x_1(k) \\ -\omega^2 \cos x_1(k) x_2(k) \end{bmatrix}; \\ f^{(2)}(k) = \left( \frac{df^{(1)}}{dt} \right)_{t=t_k, x_1(t)=x_1(k), x_2(t)=x_2(k)} = [A \ B]^T, \\ A = -\omega^2 \cos x_1(k) x_2(k), \\ B = -\omega^2 [-\sin x_1(k) x_2^2(k) + (-\omega^2 \sin x_1(k) \cos x_1(k))]; \\ f^{(3)}(k) = \left( \frac{df^{(2)}}{dt} \right)_{t=t_k, x_1(t)=x_1(k), x_2(t)=x_2(k)} = [C \ D]^T, \\ C = \omega^2 x_2(k) \sin x_1(k) + \omega^4 \sin(2x_1(k))/2, \\ D = \omega^2 x_2^3(k) \cos x_1(k) - 2\omega^4 x_2(k) \sin^2 x_1(k) + \omega^4 \cos(2x_1(k)) x_2(k); \\ f^{(4)}(k) = \left( \frac{df^{(3)}}{dt} \right)_{t=t_k, x_1(t)=x_1(k), x_2(t)=x_2(k)} = [E \ F]^T, \\ E = -2\omega^4 x_2(k) \sin^2 x_1(k) + \omega^2 x_2^3(k) \cos x_1(k) + \omega^4 \cos(2x_1(k)) x_2(k), \\ F = 2\omega^6 \sin^3 x_1(k) - 5.5 \omega^4 x_2^2(k) \sin(2x_1(k)) - \omega^2 x_2^4(k) \sin x_1(k) - \omega^6 \sin x_1(k) \cos(2x_1(k)); \\ f^{(5)}(k) = \left( \frac{df^{(4)}}{dt} \right)_{t=t_k, x_1(t)=x_1(k), x_2(t)=x_2(k)} = [G \ H]^T, \\ G = 2\omega^6 \sin^3 x_1(k) - 5.5 \omega^4 \sin(2x_1(k)) x_2^2(k) - \omega^2 x_2^4(k) \sin x_1(k) - \omega^6 \sin x_1(k) \cos(2x_1(k)), \\ H = 6\omega^6 x_2(k) \sin^2 x_1(k) \cos x_1(k) + 13\omega^6 x_2(k) \sin x_1(k) \sin(2x_1(k)) - 11\omega^4 x_2^3(k) \cos(2x_1(k)) + 4\omega^4 x_2^3(k) \sin^2 x_1(k) - \omega^2 x_2^5(k) \cos x_1(k) - \omega^6 x_2(k) \cos x_1(k) \cos(2x_1(k)).$$

设初值  $x_1(0) = 1.04720, x_2(0) = 0.0$ , 步长  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ , 摆长  $l = 1.0, g = 9.80665$ . 代入式(18)~(23), 分别计算  $x_1(x_1 = x)$ , 并与利用第1类椭圆积分计算出的解析解<sup>[11]</sup>进行比较, 结果如表1所示. 从表1中可以看出, 用四级近似公式计算出的  $x$  值几乎与解析解一致, 表明了本文提出公式的可靠性.

表 1 单摆非线性振动的幅角  $x$  的各级近似计算值与解析解的比较 rad

时刻	第 1 s	第 2 s	第 3 s	第 4 s	第 5 s
一级近似式	-1.062 442 65	0.985 082 06	-0.859 039 41	0.688 492 55	-0.480 514 34
二级近似式	-1.023 536 26	0.950 508 72	-0.831 019 76	0.669 339 96	-0.472 121 54
三级近似式	-1.022 084 40	0.948 161 55	-0.827 656 09	0.665 018 68	-0.467 153 67
四级近似式	-1.022 346 98	0.948 480 06	-0.827 990 85	0.665 294 41	-0.467 287 81
五级近似式	-1.022 330 76	0.948 468 83	-0.827 995 27	0.665 321 21	-0.467 333 28
六级近似式	-1.022 330 78	0.948 466 57	-0.827 990 86	0.665 316 29	-0.467 330 51
椭圆积分解	-1.022 33	0.948 46	-0.827 99	0.665 32	-0.467 31

### 5 结 论

通过引入广义时态空间的概念, 将非线性控制系统状态方程右边进行 Taylor 展开, 求得方程的关于  $\tau = t - t_k$  和  $\tau = t$  的无穷级数解. 求解过程中, 除了被积函数  $f(x(t), u(t), t)$  用 Taylor 级数展开这一近似手段外, 没作其他任何近似, 所得结果十分简洁. 本文结果适用于一般的非线性控制系统, 且当  $u(t) = 0$  时能够适用于不同的动力学系统. 由本文得到的级数形式的近似解, 可为分析非线性系统的基本特性如稳定性、能控性和能观测性等提供基础.

#### 参考文献(References)

[1] Isidori A. Nonlinear control systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1995: 132-156.

[2] 洪奕光, 程代展. 非线性系统的分析与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 167-185.  
(Hong Y G, Cheng D Z. Nonlinear systems analysis and control[M]. Beijing: Science Press, 2005: 167-185.)

[3] Douglas A Lawrence. Input-output pseudolinearization on controlled invariant submanifolds[J]. Automatica, 2005, 41(1): 163-166.

[4] Srivastava H M, Niukkanen A W. Some clebsch-gordan type linearization relations and associated families of Dirichlet integrals[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2003, 37(3-4): 245-250.

[5] Doyle F J, Allgower F, Morari M. Normal form approach to approximate input-output linearization for maximum phase nonlinear SISO systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(2): 305-309.

[6] Albeverio S, Bozhok R, Koshmanenko V. The rigged hilbert spaces approach in singular perturbation theory[J]. Mathematical Physics, 2006, 58(2): 227-246.

[7] Lin T C, David H Schultz, Zhang W Q. Numerical solutions of linear and nonlinear singular perturbation problems[J]. Computer and Mathematics Applications, 2008, 55(11): 2574-2592.

[8] Stephen Schecter. Traveling-wave solutions of convection-diffusion systems by center manifold reduction[J]. Nonlinear Analysis, 2002, 49(1): 35-59.

[9] Cheng D Z, Guo Y Q. Stabilization of nonlinear systems via the center manifold approach[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(6): 511-518.

[10] Anael Verdugo, Richard Rand. Center manifold analysis of a DDE model of gene expression[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(6): 1112-1120.

[11] Samons C F. Differential equations[M]. Beijing: People Education Press, 1981: 64-89.

(上接第 1590 页)

[8] Liu D R, Jin N. Finite horizon discrete-time approximate dynamic programming[C]. Proc of the 2006 IEEE Int Symposium on Intelligent Control. Munich, 2006: 446-451.

[9] Liu D R, Jin N.  $\epsilon$ -adaptive dynamic programming for discrete-time systems[C]. 2008 Int Joint Conf on Neural Networks. Hong Kong, 2008: 1417-1424.

[10] Liu D R, Jin N. Adaptive dynamic programming for discrete-time systems with infinite horizon and  $\epsilon$ -error bound in the performance cost[C]. Proc of Int Joint Conf on Neural Networks. Atlanta, 2009: 1849-1854.

[11] Wang F Y, Jin N, Liu D R, et al. Adaptive dynamic programming for finite-horizon optimal control of discrete-time nonlinear systems with  $\epsilon$ -error bound[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2010: 24-36.