

文章编号: 1001-0920(2011)11-1690-05

基于四叉树的自适应栅格地图创建算法

郭利进^a, 师五喜^a, 李颖^b, 李福祥^a

(天津工业大学 a. 电气工程与自动化学院, b 信息化与现代教育技术中心, 天津 300160)

摘要: 针对传统的尺度均一概率栅格地图表达法在大尺度未知环境下地图创建过程中海量数据存储和相关量计算问题, 提出一类基于四叉树的栅格大小自适应地图创建算法. 利用四叉树理论, 根据地图不同区域环境障碍物密度的变化, 自适应调整各区域栅格尺度大小. 仿真结果表明, 所提出的算法不仅降低了数据存储量, 而且栅格量的减少使得相关量计算大大降低, 提高了移动机器人地图创建的实时性和地图表达的精度.

关键词: 大尺度环境; 四叉树; 自适应栅格; 栅格被占用概率

中图分类号: TP24

文献标识码: A

Mapping algorithm using adaptive size of occupancy grids based on quadtree

GUO Li-jin^a, SHI Wu-xi^a, LI Ying^b, LI Fu-xiang^a

(a. School of Electric Engineering and Automation, b. Center of Information and Modern Education Technology, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China. Correspondent: GUO Li-jin, E-mail: doctor_guo@163.com)

Abstract: The normal probabilistic occupancy grids approach requires huge memory and complex computation of data association to map in unknown large-scale environments. Therefore, this paper proposes an adaptive size of occupancy grids method based on quadtree for mapping. By utilizing the theory of quadtree, the size of occupancy grids is automatically adjusted by the obstacle density of different zones in maps. Simulation experiment results show that, the mapping algorithm reduces the memory of map data and the computation of data association because of the reduced number of grids, which improves mobile robot's performance of mapping in unknown large-scale environments.

Key words: large-scale environments; quadtree; adaptive size of occupancy grids; probability of occupancy grids

1 引言

环境地图是移动机器人在未知环境下实现导航、完成复杂任务的关键. 未知环境下移动机器人自主地创建地图是移动机器人研究中的一个基本且重要的问题, 也是近 20 年来研究的热门领域^[1].

机器人地图创建问题, 在结构化、静态、小尺度环境下已经取得很多研究成果^[2], 但对于非结构化、动态、大尺度环境下的研究还不够成熟^[3]. 如文献 [4] 提出的 DenseSLAM 地图创建方法, 每次迭代都利用全部的测量信息, 无法避免大尺度环境下海量数据存储和计算问题; [5] 提出的一种新型拓扑地图表达方法, 只能用于拓扑结构可在线提取的室内环境; [6] 提出的多移动机器人协作创建地图方法, 多个机器人的协作、信息共享和地图融合等问题还不完善. 为此, 本

文在现有研究成果的基础上, 提出了基于四叉树的栅格大小自适应地图创建算法.

2 均匀栅格地图创建方法

概率栅格地图是由 Elfes 等人提出的^[7]. 二维概率栅格地图是将整个环境分割为均匀的单元栅格, 每个栅格赋一个 0-1 区间的一个值来表示栅格的状态: 占用或为空. 0 意味着完全为空, 1 意味着完全占用. 这样, 整个环境空间分为占用空间和空置空间. 用栅格表示的环境地图, 环境空间的分辨率与栅格尺寸的大小有关, 增加分辨率便意味着增加运算的时间和计算机内存消耗. 随着人类探测环境的不断扩大和非结构化, 环境实体的高维性, 不仅导致环境信息的海量增加而带来信息存储的难题, 而且海量数据的融合问题更成为栅格法应用的障碍^[8].

收稿日期: 2010-07-08; 修回日期: 2010-09-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974054); 天津市自然科学基金项目(10JCYBJC07400).

作者简介: 郭利进(1970-), 男, 副教授, 从事机器人信息获取与处理等研究; 师五喜(1964-), 男, 教授, 从事智能控制等研究.

传统的尺度均一栅格地图表达方法,由人为经验确定栅格的尺寸且所有栅格的尺度均一.这种主观划分栅格尺度大小的方法,使得地图存储容量海量增加,难以满足大尺度环境地图表达的需要.

3 自适应栅格地图创建算法

3.1 四叉树方法基本原理

四叉树^[9]是为解决二进制映射的表达而出现的一种处理变量问题的方法.在标准四叉树方法中,每棵树由 4 个节点树组成,每个节点树用黑、白、灰 3 种颜色表示.如某一节点树由单一黑色或白色组成,则该节点树用该颜色标记;如某一节点树由灰色组成,则将该节点树重新分成 4 个子节点树,并同前面的方法一样进行颜色标记.这样一直继续下去,直到节点树由单一黑色或白色组成为止.

3.2 四叉树方法在栅格地图表达中的改进

四叉树方法采用二进制的“0”和“1”表达它的“叶”存在与否;而在栅格地图中,则须采用概率值表达它的“叶”存在的几率大小.

四叉树方法的节点仅包含该节点是否可以继续下分的信息;而栅格地图中,占用概率应包含该栅格的各种有用信息.

四叉树方法存储在节点和“叶”上的信息不会随着节点的继续下分而变化;而栅格地图中,存储在节点和“叶”上的信息应随着探索的不断继续和环境的变化而不断变化.经改进,四叉树方法可以满足栅格地图表达的需要.

3.3 栅格地图的剖分方法

基于四叉树原理的栅格地图剖分如图 1 所示,这里“Level n ”是指栅格剖分的层次.

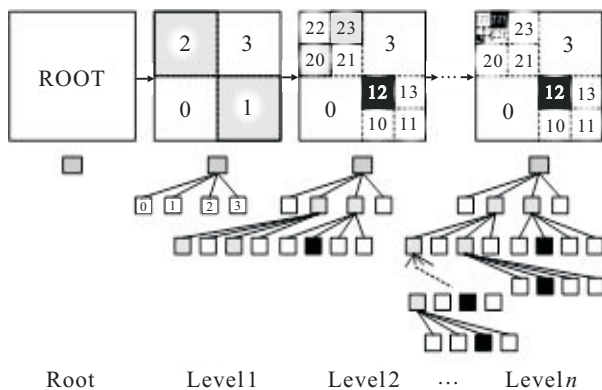


图 1 栅格剖分及编号

每个被剖分的“父”栅格被剖分后,4个“子”栅格在该层的位置编号如图 1 所示,则经 n 次剖分后得到栅格的编号为 $\overbrace{(X_1 X_2 \cdots X_n)}^{n \text{位}}$,其中 X_i 根据栅格在第 i 层所处位置,从 0,1,2,3 中选取.对于不断往下剖分的栅格,采取从左至右的顺序将剖分得到的“子”

栅格的位置编号添加到紧跟其“父”栅格编号位的后面.如经过 4 次剖分的某栅格编号为 1 103,若继续进行一次剖分,则得到 4 个“子”栅格编号为 11 030, 11 031, 11 032, 11 033.通过栅格编号,可得到该栅格在地图中的位置.

3.4 栅格地图的创建过程

基于四叉树方法的栅格大小自适应的地图创建过程如图 2 所示.



图 2 自适应栅格大小的地图创建过程

- 1) 由传感器获得新的环境信息和栅格地图的历史信息,计算出“父”栅格为灰色的 4 个“子”栅格被占用的概率值;
- 2) 根据每个“子”栅格灰度值的大小确定该“子”栅格是否继续剖分;
- 3) 将剖分后的新栅格重新编号,并定义其灰度值的大小为 0.5;
- 4) 更新环境地图.

如此循环进行下去,直到环境探索完毕并满足精度要求为止.

由 3.3 节可知,地图栅格含有该栅格的各种有用信息:矩阵编号 $\overbrace{(X_1 X_2 \cdots X_n)}^{n \text{位}}$,栅格中心坐标 (x, y) ,栅格大小尺寸 (r_l, r_w) ,栅格被占用概率 P .通常,环境地图尺寸 $a \times b$ 由经验事先确定,栅格编号由剖分情况直接得到,栅格中心坐标 (x, y) 由下式得到:

$$\begin{cases} x = (-1)^{\lambda_1} \frac{a}{2^2} + (-1)^{\lambda_2} \frac{a}{2^3} + \cdots + (-1)^{\lambda_n} \frac{a}{2^{n+1}}, \\ y = (-1)^{\gamma_1} \frac{b}{2^2} + (-1)^{\gamma_2} \frac{b}{2^3} + \cdots + (-1)^{\gamma_m} \frac{b}{2^{n+1}}. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 分别根据 X_1, X_2, \cdots, X_n 的值为 1 和 3, 还是 0 和 2 选 2 或 1; $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 分别根据 X_1, X_2, \cdots, X_n 的值为 2 和 3, 还是 0 和 1 选 2 或 1. 长宽尺寸 $r_l = a/2^n, r_w = b/2^n$.

这样,剩下栅格被占用概率(栅格的灰度值) P_{OCC} 没有确定.栅格被占用概率 P_{OCC} 不仅是栅格剖分的依据,而且是决定栅格地图精度的直接因素.因此,栅格被占用概率 P_{OCC} 在基于四叉树的自适应栅格地图创建算法中占有极其重要的地位.

3.5 栅格被占用概率的求解

假设机器人传感器探测的距离范围为 $[d_{\min}, d_{\max}]$, 夹角范围为 $[-\phi_{\min}, \phi_{\max}]$.机器人的工作环境为边长 $(a \times b)$ 已知的矩形区域.

设每个栅格的状态为 x_G , 即 $\{EMP, OCC\}$, 分别表示其中存在和不存在障碍物.每个状态对应一个概

率值,由机器人根据传感信息进行更新.由 Bayesian 规则^[10],设初始时刻所有栅格的状态值为 $p\{x_{G_i}(0) = EMP\} = p\{x_{G_i}(0) = OCC\} = 0.5$,即所有栅格都未被机器人探测到.当机器人运动到第 k 步时,传感器观测到前方存在障碍物,且传感器读数为 $Z(k) = [d(k), \phi(k)]^T$,如图 3 所示.

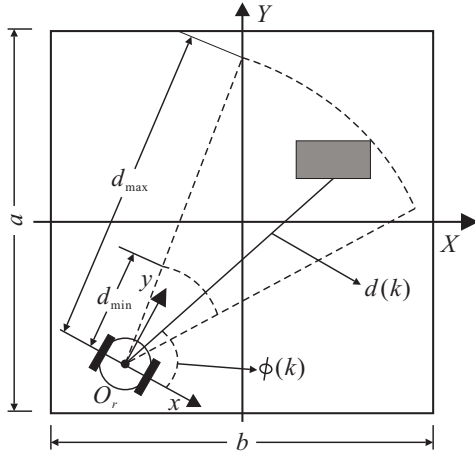


图 3 栅格状态的计算与更新

假设传感器距离观测值与角度观测值相互独立.下面根据 $Z(k)$ 计算传感器观测范围内栅格状态的概率值.首先,机器人根据自身位姿 $X_r(k)$ 估计哪些栅格被传感器覆盖,并对这些栅格被占用的概率值进行计算和更新,其他栅格的状态不变;然后,分别利用距离返回值 $d(k)$ 和角度返回值 $\phi(k)$ 计算栅格 i 中存在障碍物的概率

$$p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\} = \frac{(d_{G_i} - d_{min})^2}{(d(k) - d_{min})^2}, \quad (2)$$

$$p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\} = 1 - \frac{(\phi_{G_i} - \phi_{min})^2}{(\phi_{max})^2}. \quad (3)$$

其中: d_{G_i} 为栅格 i 的中心与机器人的距离, ϕ_{G_i} 为栅格 i 的中心与机器人坐标系 x 轴的夹角.

$d(k)$ 与 $\phi(k)$ 相互独立,则基于当前机器人位姿和观测值计算的栅格 i 中存在障碍物的概率为

$$\begin{aligned} p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\} &= \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k), \phi(k)\} &= \\ p\{d(k)|X_r(k), \phi(k), x_{G_i}(k) = OCC\} &\cdot \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\} &/ \\ p\{d(k)|X_r(k), \phi(k)\} &= \\ p\{d(k)|X_r(k), x_{G_i}(k) = OCC\} &\cdot \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\} &/ p\{d(k)|X_r(k)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

又

$$\begin{aligned} p\{d(k)|X_r(k), x_{G_i}(k) = OCC\} &= \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\} &\cdot p\{d(k)|X_r(k)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$p\{d(k)|X_r(k)\} =$$

$$p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k)\} \cdot p\{d(k)|X_r(k)\}. \quad (6)$$

所以,由式(4)得

$$\begin{aligned} p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\} &= \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\} &\cdot \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\} &/ \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

同理,基于当前机器人位姿和观测值计算的栅格 i 中不存在障碍物的概率为

$$\begin{aligned} p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), Z(k)\} &= \\ p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), d(k)\} &\cdot \\ p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), \phi(k)\} &/ \\ p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k)\}. \end{aligned} \quad (8)$$

又

$$p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), Z(k)\} = 1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\}, \quad (9)$$

$$p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), d(k)\} = 1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\}, \quad (10)$$

$$p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), \phi(k)\} = 1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\}, \quad (11)$$

且在没有观测 $Z(k)$ 的条件下

$$\begin{aligned} p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k)\} &= \\ p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k)\}, \end{aligned}$$

则由式(7)得

$$\begin{aligned} p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k)\} &= \\ 1 - [1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\}] &\cdot \\ [1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\}] &/ \\ [1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\}]. \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)代入(7),整理得

$$\begin{aligned} p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\} &= \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\} &\cdot \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\} &/ \\ [1 + 2 \cdot p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\} &- \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\} - & \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), d(k)\} - & \\ p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), \phi(k)\}], \end{aligned} \quad (13)$$

而栅格 i 中不存在障碍物的概率为

$$\begin{aligned} p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), Z(k)\} &= \\ 1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

基于当前机器人位姿和传感器观测值计算出第

k 步栅格状态的概率之后, 利用它更新第 $k-1$ 步的栅格状态概率值, 得到最终的第 k 步栅格状态. 下面给出更新方法.

因为

$$\begin{aligned}
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^k, Z^k\} = \\
 & p\{Z(k)|x_{G_i}(k) = OCC, X_r^k, Z^{k-1}\} \cdot \\
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^k, Z^{k-1}\} / \\
 & p\{Z(k)|X_r^k, Z^{k-1}\} \stackrel{\text{Markov}}{=} \\
 & p\{Z(k)|x_{G_i}(k) = OCC, X_r(k)\} \cdot \\
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^k, Z^{k-1}\} / \\
 & p\{Z(k)|X_r^k, Z^{k-1}\} = \\
 & [p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\} \cdot \\
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^{k-1}, Z^{k-1}\} / \\
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k)\} \cdot \\
 & [p\{Z|X_r(k)\} / p\{Z(k)|X_r^k, Z^{k-1}\}]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中: $X_r^k = \{X_r(1), X_r(2), \dots, X_r(k)\}$, $Z^k = \{Z(1), Z(2), \dots, Z(k)\}$. 又因为

$$\begin{aligned}
 & p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r^k, Z^k\} = \\
 & [p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r(k), Z(k)\} \cdot \\
 & p\{Z(k)|X_r(k)\} / [p\{Z(k)|X_r^k, Z^{k-1}\} \cdot \\
 & P\{x_{G_i}(k) = EMP|\hat{X}_r(k)\}]] \cdot \\
 & p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r^{k-1}, Z^{k-1}\} = \\
 & [[1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\}] \cdot \\
 & [1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^{k-1}, Z^{k-1}\}] / \\
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^{k-1}, Z^{k-1}\}] \cdot \\
 & [p\{Z(k)|X_r(k)\} / p\{Z(k)|X_r^k, Z^{k-1}\}], \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & p\{x_{G_i}(k) = EMP|X_r^k, Z^k\} = \\
 & 1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^k, Z^k\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

所以, 由式 (15)~(17) 得栅格 i 被占用概率更新值为

$$\begin{aligned}
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^k, Z^k\} = \\
 & [1 + \{1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\}\} / \\
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r(k), Z(k)\}] \cdot \\
 & [\{1 - p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^{k-1}, Z^{k-1}\}\} / \\
 & p\{x_{G_i}(k) = OCC|X_r^{k-1}, Z^{k-1}\}]^{-1}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

当栅格被占用概率大于 p_{\max} 时, 则认为它被障碍物覆盖; 当栅格被占用概率小于 p_{\min} 时, 则认为它属于自由区. 其中 p_{\max} 和 p_{\min} 为给定阈值.

4 仿真及结果分析

假设机器人工作环境为 $100\text{ m} \times 100\text{ m}$ 的室内静态环境 (即环境中物体是静止的), 如图 4 所示.

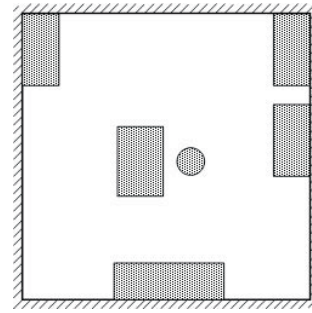


图 4 仿真实验的环境地图

系统中运动模型的数据利用里程计采集, 测量模型的数据采集利用旋转激光测距仪 (测距扫描间隔为 0.5°). 机器人起始位姿为 $X_r(0) = [0, 0, 0^\circ]^T$, 控制周期为 $T_c = 0.025\text{ s}$, 传感器的观测周期为 $T_0 = 0.25\text{ s}$. 考虑环境规模较大, 为提高运算效率, T 取 $10T_c$, 相当于每次计算出的控制输入执行 10 个控制周期. 激光测距仪探测距离的范围为 $(0, 30)\text{ m}$, 夹角范围为 $(0, \pi)$, 运动噪声的协方差 $Q(k) = \text{diag}\{0.1^2, 0.1^2, 0.02^2, (1.0 \times \pi/180)^2, \dots, (1.0 \times \pi/180)^2\}$, 观测噪声的协方差 $R(k) = \text{diag}\{0.02^2, (0.2 \times \pi/180)^2\}$, 机器人运动速度 $u(k) = 1\text{ m/s}$. 考虑到系统的测量误差和环境表达的需要, 取 $p_{\max} = 0.95$ 和 $p_{\min} = 0.05$, 且当 $r_l < 0.1\text{ m}$ 或 $r_w < 0.1\text{ m}$ 时停止栅格的剖分.

由图 5 和表 1 的仿真结果可以看出, 采用基于四叉树的栅格大小自适应的地图, 不仅大大节省了信息存储量, 而且在满足相同精度的条件下, 由于栅格数量的减少, 降低了数据间相关量计算, 节省了地图更新的时间, 使得机器人的实时性提高.

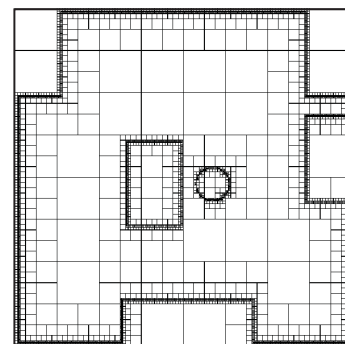


图 5 自适应栅格创建的环境地图

表 1 栅格地图仿真结果数据统计

	存储量 / MB	地图误差 / m	
		最大值	均方差
自适应栅格地图	5.4	0.11	0.05
尺度均一栅格地图	61	0.26	0.13

将基于四叉树的栅格大小自适应的地图应用于障碍物密度差异大的环境, 效果明显, 而将其应用于障碍物密度差异小且障碍物较多的环境, 其优势则不突出. 这主要是在该环境中, 由于环境表达的需要, 大

量栅格不断被剖分, 栅格数量的减少有限; 同时, 被剖分的“子”栅格还包含其“父”栅格信息, 从而占用了存储量; 栅格剖分过程也占用一定的时间。

5 结 论

针对大尺度环境下概率栅格地图创建中出现的难题, 提出了基于四叉树原理的栅格大小自适应地图创建算法, 不仅根据环境不同区域障碍物密度的变化自适应采用不同大小的栅格表达地图, 同时在地图信息量减少的前提下提高了地图创建的实时性和精度。

参考文献(References)

- [1] 苏丽颖, 谭民. 移动机器人构建地图的研究与发展[J]. 中国科学院研究生院学报, 2002, 19(1): 157-162.
(Su L Y, Tan M. Overview of research on environment exploration and map-building with mobile robots[J]. J of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, 2002, 19(2): 157-162.)
- [2] 王耀南, 余洪山. 未知环境下移动机器人同步地图创建与定位研究进展[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(1): 57-65.
(Wang Y N, Yu H S. A review of simultaneous localization and map building algorithms for mobile robots in unknown environment[J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(1): 57-65.)
- [3] Juan I, Nieto. Detailed environment representation for the SLAM problem[D]. Sydney: University of Sydney, Australian Centre for Field Robotics, 2005.
- [4] 张明状, 庄严, 王伟, 等. 移动机器人即时环境探索与地图库构建[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2009, 9(增1): 111-115.
(Zhang M Z, Zhuang Y, Wang W, et al. Mobile robot simultaneous environment exploration and map base building[J]. J of Southeast University: Natural Science Edition, 2009, 9(S1): 111-115.)
- [5] 石朝侠, 洪炳镕, 周彤, 等. 大规模环境下的拓扑地图创建与导航[J]. 机器人, 2007, 29(4): 433-438.
(Shi C X, Hong B R, Zhou T, et al. Topological map building and navigation in large-scale environments[J]. Robot, 2007, 29(4): 433-438.)
- [6] 潘薇, 蔡自兴, 陈白帆. 复杂环境下多机器人协作构建地图的方法[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2010, 42(1): 143-148.
(Pan W, Cai Z X, Chen B F. An approach to cooperative multi-robot map building in complex environments[J]. J of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2010, 42(1): 143-148.)
- [7] Moravec H, Elfes A. High resolution maps from wide angle sonar[C]. Proc of the IEEE Int Conf on Robotics and Automation(ICRA'85). Saint Louis, 1985: 116-121.
- [8] Lenser S, Veloso M. Sensor resetting localization for poorly modeled mobile robots[C]. Proc of the IEEE Int Conf on Robotics and Automation. San Francisco: IEEE Press, 2000: 1225-1232.
- [9] Samet H, Rosenfeld A, Shaffer C A, et al. A geographic information system using quadtrees[J]. Pattern Recognition, 1984, 17(6): 647-656.
- [10] Elfes A. Using occupancy grids for mobile robot perception and navigation[J]. Computer, 1989, 22(6): 46-57.
-
- (上接第1689页)
- [6] de Frutos M A, Hamoudi H, Jarque X. Equilibrium existence in the circle model with linear quadratic transport cost[J]. Regional Science and Urban Economics, 1999, 29(5): 605-615.
- [7] Hamoudi H, Moral M J. Equilibrium existence in the linear model: Concave versus convex transportation costs[J]. Papers in Regional Science, 2005, 84(2): 201-219.
- [8] de Frutos A, Hamoudi H, Xarque X. Spatial competition with concave transport costs[J]. Regional Science and Urban Economics, 2002, 32(4): 531-540.
- [9] 候光明, 艾凤义. 基于混合溢出的双寡头横向R&D合作[J]. 管理工程学报, 2006, 20(4): 94-97.
(Hou G M, Ai F Y. Duopoly horizontal R&D cooperation based on mix spillovers[J]. J of Management Engineering, 2006, 20(4): 94-97.)
- [10] Piga C, Poyago-Theotoky J. Endogenous R&D spillovers and locational choice with discriminatory pricing[J]. Managerial and Decision Economics, 2004, 25(3): 127-139
- [11] Piga C, Poyago-Theotoky J. Endogenous R&D spillovers and locational choice with discriminatory pricing[J]. Managerial and Decision Economics, 2004, 25(3): 157-161.
- [12] Cohen W, Levinthal D. Innovation and learning: The two faces of R&D[J]. Economic J, 1989, 99(397): 569-596.
- [13] Cohen W, Levinthal D. Absorptive capacity: A new perspective on learning and innovation[J]. Administrative Science Quarterly, 1990, 35(1): 128-152.
- [14] Lars Wiethaus. Cooperation or competition in R&D when innovation and absorption are costly[J]. Economics of Innovation and New Technology, 2006, 15(6): 569-589.
- [15] Kamien M, Zang I. Meet me halfway: Research joint ventures and absorptive capacity[J]. Int J of Industrial Organization, 2000, 18(4): 995-1012.