第 26 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 2011 年 2 月
Vol. 26 No. 2 Control and Decision Feb. 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 02-0000-00

有限时间控制问题综述

丁世宏[1], 李世华[2]

(1. 江苏大学 电气信息工程学院，江苏 镇江 212013；2. 东南大学 自动化学院，南京 210096)

摘 要: 由于有限时间控制系统具有更好的鲁棒性能和抗扰动性能, 近年来引起了人们的广泛关注. 首先, 回顾了有限时间控制方法的起源; 其次, 列举了有限时间控制系统的几种常用判据; 然后, 总结了有限时间控制系统的研究现状; 最后, 讨论了未来可能的研究方向.

关键词: 有限时间控制；齐次系统；Lyapunov 方法；状态反馈；输出反馈

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

A survey for finite-time control problems

DING Shi-hong[1], *LI Shi-hua*[2]

(1. College of Electrical and Information Engineering，Jiangsu University，Zhenjiang 212013，China；2. School of Automation，Southeast University，Nanjing 210096，China．Correspondent：DING Shi-hong，E-mail: dsh@ujs.edu.cn)

Abstract: Finite-time control theory has attracted much attention in recent years, since finite-time stable systems usually possess better robustness and disturbance rejection properties. First of all, the origin for finite-time control method is discussed. Second, the frequently-used criteria for finite-time control systems is listed. Then the present research development for finite-time control systems is summarized. Finally, the future outlook on finite-time control is discussed.

Key words: finite-time control；homogeneous system；Lyapunov method；state feedback；output feedback

1 引 言

在控制系统的性能指标中, 收敛性能是很关键的一个指标. 然而, 在绝大多数的控制设计方法得到的研究结果中, 闭环系统最快的收敛速度为指数形式, 因此无法得到更好的收敛性能. 原因是: 它们讨论的均是闭环系统满足 Lipschitz 连续性质的情况. 因此, 这些控制分析和综合方法都属于无限时间稳定性和控制问题. 从控制系统时间优化的角度来看, 使闭环系统有限时间收敛的控制方法才是时间最优的控制方法. 除了收敛性能最优的优点, 研究表明, 由于有限时间控制器中带有分数幂项, 使得有限时间闭环控制系统与非有限时间闭环控制系统相比, 具有更好的鲁棒性能和抗扰动性能[1-3]. 由于有限时间控制技术的研究具有重要的实际与理论研究意义, 近年来引起了人们的广泛研究兴趣.

早期的有限时间控制都是集中于开环控制方法, 如最小能量控制[4]. 文献 [4] 针对双积分系统 $\ddot{x} = u$, $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$, 设计了一个最小能量控制器

$$u(x_0, y_0, t) = -\frac{2}{t_f^2}(3x_0 + 2y_0 t_f) + \frac{6}{t_f^3}(2x_0 + y_0 t_f)t,$$

使得系统状态能在有限时刻 t_f 内从初始状态到达原点, 同时可使性能指标 $J = \int_0^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t$ 最小. 但这类开环控制器往往需要依赖初始值信息, 且缺乏抗干扰能力和鲁棒性.

考虑到开环控制的局限性, 基于非连续状态反馈的有限时间控制方法引起了人们的关注[5-8]. 文献 [6] 指出, 在最优控制中, 当性能指标为非二次型时, 若控制器结构满足一定条件, 则可以得到有限时间优化控制器. 如: [6] 考虑了双积分系统的有限时间优化控制问题; [7] 将 [6] 中的结果推广到带不确定性的二阶系统中. 另外一个有效的非连续有限时间控制方法

收稿日期: 2010-07-11；**修回日期:** 2010-09-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61074013)；教育部博士点基金项目 (20090092110022)；江苏省自然科学基金项目 (BK2008295，BK2010200)；微惯性仪表与先进导航技术教育部重点实验室开放基金项目 (201004).

作者简介: 丁世宏(1983−), 男, 讲师, 博士, 从事非线性控制系统和姿态控制等研究；李世华(1975−), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制系统、伺服控制等研究.

为终端滑模控制方法[5, 8]. 终端滑模与传统的滑模不同之处在于引入了非线性切换面

$$s = \dot{x} + cx^{p/q} = 0. \tag{1}$$

其中: $0 < p/q < 1$, 且 p 和 q 为互质的奇数. 上述设计使得系统状态到达滑动面后, 可以在有限时间内滑动到原点. 但这类基于非连续状态反馈的有限时间控制器在控制实现时, 由于对状态的非连续性, 容易使系统产生抖动问题.

综上可以看出, 开环控制方法易导致系统缺乏鲁棒性; 非连续状态反馈会引起系统的抖动, 甚至导致不稳定等; 一般的光滑状态反馈控制方法尽管可以使得闭环系统响应平滑, 但在抗扰动性能和收敛性方面逊色于非连续状态反馈. 因此, 研究者们尝试考虑一种介于非连续状态反馈和光滑状态反馈之间的控制方法, 即基于连续状态反馈的有限时间控制方法. 该方法可兼顾非连续状态反馈控制和光滑状态反馈控制二者的优点。

由于连续有限时间控制的优点明显, 20 世纪 60 年代以来, 连续有限时间控制问题开始受到越来越多的关注. 连续有限时间控制系统设计最早出现在文献中. [9] 针对一类双积分系统, 构造了一类连续有限时间状态反馈控制器. 缺点是, 该类连续有限时间控制器的构造需要依靠系统的具体结构. 针对一类线性系统, [10] 利用最优控制理论设计了一种齐次控制器, 使得系统有限时间稳定, 但该系统需要控制器的数量与系统状态数量相等. 此后, [11] 假设系统状态满足一个微分等式假设, 在该假设的基础上给出了连续有限时间控制器设计, 但该微分等式一般不易得到.

上述连续有限时间控制设计方法都是针对低阶系统, 且缺乏系统化的设计思路, 很难推广到高阶情形. 除此之外, 由于有限时间控制系统为非 Lipschitz 连续系统, 系统的非 Lipschitz 连续性导致一些判别系统稳定性的理论无法直接应用, 如 Lyapunov 逆定理、不变集原理等. 一些通用理论工具的缺乏也限制了有限时间控制理论的发展. 20 世纪 90 年代以来, 随着有限时间齐次理论[12-13]和有限时间 Lyapunov 稳定性理论[1,14]的提出和完善, 连续有限时间控制得到了迅速的发展.

2 连续有限时间稳定性的定义和常用判据

2.1 有限时间稳定性的定义

关于自治控制系统稳定性分析, 一般都考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0. \tag{2}$$

其中: $x \in \mathcal{R}^n, f : \mathcal{U} \to \mathcal{R}^n$ 是定义域 $\mathcal{U}$ 到 n 维空间 $\mathcal{R}^n$ 中的一个连续函数.

若系统满足局部 Lipschitz 连续性, 则系统的稳定性是指传统意义上的稳定性[15]; 若系统连续但不满足局部 Lipschitz 连续性, 则系统的稳定性是指强稳定性[16]. 然而, 在这两种常用的稳定性定义中, 一般只给出了系统的渐近收敛性定义, 并没有给出有限时间收敛性定义. 因此有学者结合有限时间收敛性, 考虑了系统的有限时间稳定性定义.

定义 1[14] 针对系统 (2), 如果系统的平衡点 $x = 0$ 为连续有限时间稳定的, 当且仅当系统是稳定的且为有限时间收敛的. 有限时间收敛表示存在一个连续函数 $T(x) : \mathcal{U}_0\backslash\{0\} \to (0, +\infty)$ 使得对 $\forall x_0 \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, 系统 (2) 的解可记为 $x(t, x_0)$; 当 $t \in [0, T(x_0))$ 时, 有 $x(t, x_0) \in U_0\backslash\{0\}$ 和 $\lim\limits_{t\to T(x_0)} x(t, x_0) = 0$; 当 $t > T(x_0)$ 时, 有 $x(t, x_0) = 0$. 若 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 = \mathcal{R}^n$, 则可以得到全局连续有限时间稳定的概念.

总之, 所谓有限时间稳定系统是指, 系统的状态总能在有限时间内稳定到原点.

2.2 常用判据

如何判别一个系统的连续有限时间稳定性是研究有限时间控制系统的基础. 文献 [1,12-14] 指出, 连续有限时间控制系统的验证方法主要包括两种: 齐次性方法和有限时间 Lyapunov 稳定性定理. 这两种方法为后来的有限时间控制系统设计和综合问题提供了理论依据. 为了详细阐述上述两种有限时间稳定性验证方法, 首先给出向量函数、标量函数和系统的齐次性定义.

定义 2[17] 令 $f(x) : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ 为一向量函数. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $(r_1, r_2, \cdots, r_n) \in \mathcal{R}^n$, 其中 $r_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得 $f(x)$ 满足

$$f_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{k+r_i}f_i(x), i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $k \geqslant -\max\{r_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$. 则称 $f(x)$ 关于 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 具有齐次度 k.

定义 3 令 $V(x) : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ 为一连续标量函数. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma > 0$ 和 $(r_1, r_2, \cdots, r_n) \in \mathcal{R}^n$, 其中 $r_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$V(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{\sigma}V(x), \forall x \in \mathcal{R}^n.$$

则称 $V(x)$ 关于 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 具有齐次度 σ.

定义 4 若向量函数 $f(x)$ 是齐次的, 则系统 $\dot{x} = f(x) (x \in \mathcal{D})$ 为齐次系统.

关于更多的齐次系统知识请见文献 [13,18-19]. 文献 [12-13] 建立了齐次系统和有限时间控制系统之间的直接关系.

定理 1 若系统 (2) 具有齐次度 $k<0$, 且为全局渐近稳定的, 则该系统全局有限时间稳定.

此外, 文献 [1,14] 给出了有限时间控制系统的 Lyapunov 稳定性判据.

定理 2 假设存在连续可微函数 $V:\mathcal{U}\to\mathcal{R}$, 使得其满足下列条件:

1) V 为正定函数.

2) 存在正实数 $c>0$ 和 $\alpha\in(0,1)$, 以及一个包含原点的开邻域 $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, 使得下列条件成立:

$$\dot V(x)+cV^{\alpha}(x)\leqslant 0, x\in\mathcal{U}_0\backslash\{0\}.$$

则系统 (2) 为有限时间稳定的. 若 $\mathcal{U}=\mathcal{U}_0=\mathcal{R}^n$, 则系统 (2) 为全局有限时间稳定的.

3 连续有限时间状态反馈控制

3.1 低阶系统的有限时间状态反馈镇定

随着有限时间齐次性理论和 Lyapunov 稳定性理论的提出, 这些经典方法被应用到一般的线性和非线性系统的控制设计中, 得到了很多研究结果.

针对下列双积分系统:

$$\dot x_1=x_2, \dot x_2=u+d(t). \tag{3}$$

其中: $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ 为状态, u 为控制输入, $d(t)$ 为有界扰动. 当系统 (3) 中扰动 $d(t)=0$ 时, 文献 [12] 利用齐次性理论给出了如下全局有限时间控制器:

$$u=-k_1\mathrm{sign}(x_1)|x_1|^{\alpha_1}-k_2\mathrm{sign}(x_2)|x_2|^{\alpha_2}. \tag{4}$$

其中: $k_1>0, k_2>0, 0<\alpha<1, \alpha_2=\dfrac{2\alpha_1}{1+\alpha_2}$. 利用有限时间 Lyapunov 稳定性定理, 文献 [1] 针对不带扰动的双积分系统 (3) 考虑了饱和连续有限时间控制器设计.

上述控制器设计都没有考虑扰动的存在. 在扰动存在的情况下, 有限时间控制系统是否还能保证良好的性能仍然是一个值得研究的问题. 目前, 关于有限时间控制系统的扰动性分析, 除了文献 [2,14,20] 之外, 很少有相关结果报导. [14] 基于有限时间 Lyapunov 函数假设, 给出了扰动情况下有限时间控制系统的分析结果. 遗憾的是, 该文没有分析控制器参数对抑制扰动的影响. [20] 针对二阶系统, 基于仿真计算验证了一类非光滑方法 (包括有限时间控制方法) 具有更好的抗扰动性能. 事实上, [14,20] 都没能从理论上严格证明有限时间控制系统具有更好的抗扰动性能的原因. 针对这个问题, [2] 考虑了系统 (3) 的有限时间扰动性分析结果, 给出了有限时间控制系统的控制参数与稳态误差收敛区域之间的联系: 系统稳态误差的最终收敛区域 Ω 与系统控制增益 k 成非线性反比例关系, 与扰动的界 d 成非线性正比例关系, 即有 $\Omega\propto(d/k)^{1/\alpha}(0<\alpha<1)$. 因此, 只要调整参数 k 保证 $k>d$, 就可以通过调整 α 的大小来满足所要求的抗扰动性能指标. 除此之外, [21] 针对下列拓广的二阶系统:

$$\dot x_1=x_2^m, \dot x_2=u,$$

利用齐次性理论、加幂积分方法[22]和终端滑模控制方法, 分别设计了 3 种连续有限时间控制器. [23] 利用加幂积分方法, 针对三阶积分系统, 设计了一个全局连续有限时间控制器, 给出了参数选取的方法.

由上述控制设计可知, 低阶系统的有限时间控制设计问题已得到了较好的解决. 由二阶有限时间控制系统的扰动性分析结果可以看出, 正是由于有限时间控制器中分数幂的存在, 改善了系统的收敛性能和抗扰动性能. 此外, 上述二阶有限时间控制系统的扰动性分析方法也可以推广到高阶系统. 但由于高阶有限时间控制系统在控制设计方面存在复杂性, 将会导致系统的扰动性分析较为复杂.

3.2 高阶系统的有限时间镇定

上述结果主要针对包含二阶、三阶的低阶系统. 关于高阶非线性系统情况, 也有一些很有意义的结果. [13] 针对下列高阶积分系统:

$$\dot x_1=x_2,\cdots,\dot x_{n-1}=x_n,\dot x_n=u$$

设计了如下控制器:

$$u=-k_1\mathrm{sig}^{\alpha_1}(x_1)-k_2\mathrm{sig}^{\alpha_2}(x_2)-\cdots-k_n\mathrm{sig}^{\alpha_n}(x_n).$$

其中: $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 可使多项式

$$s_n+k_ns_{n-1}+\cdots+k_2s+k_1=0$$

Hurwitz 稳定; $\alpha_i=\dfrac{\alpha_i\alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1}-\alpha_i}(i=1,2,\cdots,n)$, $\alpha_{n+1}=1, \alpha_n=\alpha, \alpha\in(1-\epsilon,1), \epsilon\in(0,1)$. 上述控制器具有结构简单易于实现的优点, 缺点是控制器中的参数 ϵ 很难确定.

此后, 对高阶系统的有限时间控制方案, 主要基于反步设计思想的构造性设计方法. 在传统的反步设计法中, 往往会涉及到对新坐标变换变量 (系统状态与虚拟控制律之间的误差) 的求导. 然而, 对于高阶系统进行有限时间控制设计的时候, 由于小于1的分数幂的存在, 对上述新坐标变换变量的求导会出现奇异. 因此, 在针对高阶系统的有限时间控制方法中, 为了避免奇异现象的发生, 在应用反步设计法时往往会引入一个积分项来避免直接对虚拟控制律的求导. 这类典型的控制方法主要包括文献 [24] 中的推广反步设计法和文献 [22] 中的加幂积分法.

基于推广反步设计法和有限时间齐次系统理论,

文献 [24] 针对如下一类带整数幂的高阶积分系统:

$$\dot{x}_1 = x_2^{m_1}, \dot{x}_2 = x_3^{m_2}, \cdots, \dot{x}_n = u,$$

其中 $m_i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 为正奇数, 设计了全局有限时间控制器, 并将得到的结果推广到一般的非线性系统. 由于 [24] 中使用的是齐次线性化方法, 只能得到一般非线性系统的局部有限时间控制结果. 针对这一问题, 基于线性增长条件假设, [25] 利用加幂积分方法[22], 考虑了如下局部可控下三角系统:

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x_1, x_2, \cdots, x_i, u, t), i = 1, 2, \cdots, n$$

的全局有限时间控制问题. [26] 综合考虑了比 [24-25] 中更广泛的一类系统, 即 P- 规范型系统, 构造了不同于 [24-25] 中的 Lyapunov 函数, 得到了形式更一般的控制器表达式. [27] 首次考虑了时滞系统的有限时间稳定性问题. 首先, 利用坐标变换将时滞系统变为非时滞系统; 然后, 再设计有限时间控制器, 从而实现了时滞情况下的有限时间控制.

上述控制器的设计都是假设系统中参数已知. 在参数未知情况下, 基于反步设计法, [28] 给出了一种自适应控制器设计方法. [29] 考虑了一类具有参数不确定和未建模动态的下三角系统, 在输入到状态稳定 (ISS) 的前提假设下, 将齐次系统方法和有限时间 Lyapunov 定理相结合, 设计了一种只需要系统部分状态信息的自适应状态反馈控制器.

上述针对高阶系统的有限时间控制方法大多数基于类似于反步设计构造的设计方法, 因此只能解决具有下三角结构的控制系统的有限时间控制设计问题. 与下三角结构系统相对应, 上三角结构系统也代表了一大类非线性系统. 很多实际系统可以通过坐标变换变为上三角结构系统, 如: 垂直起降 (PVTOL) 飞行器飞行控制系统、球杆系统等. 上三角结构系统一般具有如下形式:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x_{i+1}, \cdots, x_n, u, t), i = 1, 2, \cdots, n-1;\\&\dot{x}_n = u + f_n(u, t).\end{aligned} \tag{5}$$

关于上三角结构系统的控制设计, 主要包括嵌套饱和方法和 Lyapunov 方法. 文献 [30] 将饱和控制方法和加幂积分方法相结合针对系统 (5) 设计了全局渐近稳定性控制器. [31] 将 [30] 中的设计方法推广到了一类 $P-$ 规范型上三角结构系统的控制中, 并且当控制参数满足一定条件时, 可以得到系统的全局有限时间镇定结果. 除此之外, 已有文献中未见关于上三角结构系统有限时间镇定的相关结果.

另外, 关于级联系统的有限时间稳定性分析也有一些结果. 对于高阶非线性系统而言, 控制器设计和分析的复杂性随系统阶数的增高而迅速增长. 若对高阶系统采用级联控制设计方法, 将闭环系统转换成两个或多个低阶子系统的级联方式, 通过对子系统稳定性分析和互联项的分析来得到原系统的稳定性结果, 是处理高阶系统分析和综合问题的一种非常有效的控制方法. 文献 [32] 指出, 子系统的全局有限时间稳定性加上前向一致有界性保证了时变级联系统的全局一致稳定性, 并将得到的结果应用到移动机器人的控制中. 但稳定性条件较难验证. 针对这个问题, [33] 利用系统的齐次性质, 考虑了一类级联系统的稳定性分析问题, 给出了易于验证的稳定性条件.

4 有限时间观测器及输出反馈控制器设计

在实际工程中, 有时状态无法直接测量或者测量成本太高. 此时, 设计观测器显得尤为重要. 已有的观测器设计方法都是针对 Lipschitz 连续系统的, 因此, 这些设计方法都将不再适用于有限时间控制系统. 有限时间输出反馈的难点在于有限时间观测器的设计. 一个最初的工作为, 针对如下双积分系统:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, y = x_1.$$

文献 [3] 利用齐次性质设计了下列有限时间观测器:

$$\begin{cases}\dot{\zeta}_1 = \zeta_2 - k_1|\zeta_1 - y|^{\sigma_1}\mathrm{sign}(\zeta_1 - y),\\ \dot{\zeta}_2 = u - k_2|\zeta_1 - y|^{\sigma_2}\mathrm{sign}(\zeta_1 - y).\end{cases} \tag{6}$$

其中: $0 < \sigma_2 < 1, \sigma_2 = (1 + \sigma_2)/2, k_1 > 0, k_2 > 0.$ 结合设计的有限时间状态反馈控制器, 可得系统的有限时间输出反馈镇定. 该方法的优点是构造简单且易于实现, 但难以推广到带复杂非线性的二阶系统和高阶系统. 文献 [34] 考虑了一类范围更广的二阶非线性系统的有限时间输出反馈镇定问题, 即

$$\dot{x}_1 = x_2^{p_1} + \phi_1(x_1), \dot{x}_2 = u + \phi_2(x_1, x_2), y = x_1.$$

其中: p_1 为正奇数; $\phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2)$ 为满足一定假设条件的非线性项. 显然, 该二阶系统具有局部线性化不可控且不可观测的特点. 基于对 $\phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2)$ 的非线性增长假设条件, 利用加幂积分方法构造了下列有限时间输出反馈控制器:

$$\begin{aligned}&\dot{z} = \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1}((z + L(x_1)^{p/(p+1-h)}) + \phi_1(x_1)),\\&u = u(x_1, (z + L(x_1))^{p/(p+1-h)}).\end{aligned}$$

其中: h 为适当的常数, $u(x_1, (z + L(x_1))^{p/(p+1-h)})$ 为待设计的控制器. 该方法中的观测器和输出控制器设计较为复杂, 且控制器增益较大, 优点是能够被推广到高阶非线性系统的观测器设计和输出反馈控制器设计.

此后, 基于文献 [34-35] 考虑了一类局部线性化可控可观测高阶非线性系统的有限时间输出反馈镇定问题. 首先, 针对高阶积分系统设计观测器和控制

器; 然后, 利用齐次压制方法, 通过调节控制器增益, 得到了整个系统的输出反馈控制器设计. [36] 将 [35] 中的方法推广到一类 P- 规范型系统的全局有限时间输出反馈控制器设计中. [37] 考虑了一类连续但是不可导的非线性系统, 与 [35-36] 中方法不同, 此处利用推广的加幂积分方法, 直接构造了整个系统的有限时间观测器. 此外, [35] 针对一类带整数幂的高阶系统, 在假设存在有限时间观测器的前提下, 构造了一类有限时间输出反馈控制器, 但没有给出高阶有限时间观测器的构造方法.

然而, 上述针对高阶系统的有限时间观测器的控制设计存在一个问题, 即构造的观测器比较复杂, 且控制增益比较大. 针对这个问题, 文献 [39] 考虑了下列能观规范型的观测器设计问题:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + f(y, u, \dot{u}, \cdots, u^{(r)}), \\ &y = Cx. \end{aligned} \tag{7}$$

其中: x, y 分别为系统状态和输出; u 为输入; (A, C) 为能观测对. 利用 Tube 引理[40], [39] 构造了一种有限时间观测器, 有

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} + f(y, u, \dot{u}, \cdots, u^{(r)}) - \begin{pmatrix} k_1 \mathrm{sig}^{\alpha_1}(y_1 - \hat{x}_1) \\ \vdots \\ k_n \mathrm{sig}^{\alpha_n}(y_1 - \hat{x}_1) \end{pmatrix}.$$

其中: $k_i > 0, \alpha_i > 0$ 为待定的参数. 与已有针对高阶系统的有限时间观测器[35-38]相比, 上述观测器具有增益小、结构简单的优点, 缺点是难以确定参数 α_i 的取值. 值得指出的是, 系统 (7) 中非线性项 $f(\cdot)$ 只包含输出和控制输入信息, 没有包含其它状态信息, 因此该系统具有较大的保守性. 此后, [41-42] 弱化了系统 (7) 的保守性, 在系统非线性项中考虑了其他状态的影响, 推广了 [39] 中考虑的系统, 并得到了相应的有限时间观测器设计.

5 有限时间控制方法在滑模控制中的应用

滑模控制方法对系统的不确定和扰动具有不变性, 因此, 该控制方法在很多系统的控制设计中被广泛应用. 滑模控制器设计主要包括两个阶段: 第 1 个阶段是, 设计滑动面并保证其稳定性, 使得当系统状态到达滑动面时, 状态能够沿着滑动面滑动到原点; 第 2 个阶段是, 设计控制器使得系统状态在有限时间内到达并保持在滑动面. 滑模控制系统的动态性能主要取决于滑动面的选择. 一般情况下, 滑动面具有如下线性形式: $s = \dot{x} + cx = 0 (c > 0)$. 因此, 传统的滑模控制器设计只能保证系统状态在滑动面上的渐近收敛性. 为了改善闭环系统的收敛性能和抗扰动性能, 文献 [43] 设计了式 (1) 形式的终端滑动面. 由此易知, 若滑动面取为式 (1), 则当系统状态到达滑动面后可在有限时间内滑动到原点, 从而实现系统状态的有限时间收敛性. 此后, 终端滑模控制方法被广泛地应用到各种非线性系统的控制中, 如: SISO 系统[8], MIMO 系统[44], 滑模观测器[45]等. 然而, 由于 $\dot{s}$ 中包含奇异项 $x^{(q/p-1)}$, 因此所设计的终端滑模控制器中也包含奇异项 $x^{(q/p-1)}$. 故基于标准的终端滑动面设计的控制器中存在奇异问题.

为了解决终端滑模的奇异性问题, 文献 [46] 给出了一个切换控制设计方案. 首先, 使得系统状态进入一个小区域, 在该区域内系统可以避免奇异问题; 然后在该区域内, 设计控制律使得系统状态在有限时间内收敛到原点. 但该方法并不能从本质上解决终端滑模的奇异性问题. 此后, [5] 设计了一个非奇异终端滑动面

$$s = x + c\dot{x}^{p/q}. \tag{8}$$

其中: $c > 0, 1 < p/q < 2, p$ 和 q 为互质奇数. 显然, 当系统状态到达上述滑动面后将会在有限时间内收敛到原点, 而且对式 (8) 求导后不存在奇异项. 因此, 该设计从本质上解决了一阶终端滑模的奇异性问题. 由式 (8) 可以看出, 参数 p, q 为满足 $1 < p/q < 2$ 的正奇数, 即分数幂 p/q 的取值必须是有理数. 这种情形限制了终端滑动面参数的取值范围. 因此, [47] 将终端滑模参数的取值范围由有理数集推广到实数集, 并设计了如下形式的非奇异终端滑动面:

$$s = x + c\,\mathrm{sign}(\dot{x})|\dot{x}|^{\alpha}, \tag{9}$$

其中 $1 < \alpha < 2$.

由于上述设计的终端滑动面为一阶情形, 大部分非奇异终端滑模控制器设计都是针对二阶系统, 如文献 [5,47] 等. 关于高阶系统的非奇异终端滑模设计, 目前仍是一个公开的问题.

6 几类典型系统的有限时间控制

由于有限时间控制方法的优点明显, 近年来关于有限时间控制的应用研究也越来越多. 有限时间控制的应用主要包括以下几个方面: 混沌系统的有限时间镇定和同步、空间飞行器姿态的有限时间镇定与跟踪、多智能体一致性的有限时间控制和永磁同步电机的有限时间控制等.

1) 混沌系统的有限时间镇定和同步

混沌控制由于在保密通信中的潜在应用价值, 近

年来, 受到了很多关注. 与此同时, 有限时间控制方法在混沌系统的镇定与同步控制方面也得到了一些结果. 文献 [48] 基于 [12] 中的齐次有限时间控制器设计方法, 给出了 Duffing 系统和 Lorenz 系统的有限时间同步控制器. 上述结果都假设系统参数已知, [49] 考虑了系统部分参数未知情况下的有限时间控制. 此外, [50] 还考虑了永磁同步电机中的混沌有限时间控制问题.

尽管目前还有很多其他的关于混沌系统的有限时间控制结果, 但大部分控制设计都是基于反馈线性化技术, 且都只能得到仿真结果.

2) 空间飞行器姿态的有限时间镇定与跟踪

空间飞行器姿态控制系统是具有强耦合的非线性控制系统. 在空间飞行器执行任务的过程中, 由于燃料消耗导致飞行器质量的变化, 或姿态的快速机动等性质, 往往会引起姿态控制系统中参数的变化. 此外, 在高空环境中各种干扰力矩的存在, 对姿态控制系统的性能也有着重要的影响. 因此, 设计具有良好鲁棒性和抗扰动性能的姿态控制律十分必要. 有限时间控制可使得闭环系统具有良好的鲁棒性和抗扰动性能, 因此空间飞行器姿态的有限时间控制问题也引起了人们的关注. [51-52] 利用终端滑模控制方法, 考虑了刚体飞行器姿态的有限时间控制问题. 但基于终端滑模控制技术得到的控制器是不连续的, 会引起系统颤动现象.

针对上述问题, 文献 [53-54] 考虑利用连续有限时间控制方法设计控制器. [53] 考虑了空间飞行器姿态控制系统的拟最优集合控制器设计. 首先, 将角速度看成运动学子系统的虚拟控制器, 设计优化控制器优化给定性能指标; 然后利用有限时间控制方法, 设计有限时间控制器使得角速度跟踪上虚拟控制器. 但该方法只能保证闭环系统的渐近稳定性. [54] 利用加幂积分方法和姿态控制系统模型的结构对称性, 设计了全局有限时间集合控制器. 当扰动为零时, 控制器可以使得系统稳态误差关于一个平衡点集合满足全局有限时间稳定性; 当扰动不为零时, 控制器可以使得系统稳态误差收敛到包含平衡点集合的一个邻域内, 而且在控制器不会明显增大的情况下, 通过调节参数可以使得上述稳态误差收敛域无限小.

3) 多智能体一致性的有限时间控制

多智能体的一致性问题是指, 空间分布的智能体在没有全局通信的条件下, 个体之间通过局部的相互耦合作用而达到系统状态一致. 目前, 在已有文献中, 大部分的结果都是关于渐近一致性的结果. 从时间优化的角度来看, 若能在有限时间内使得多智能体状态达到一致性, 则是时间最优的控制结果. 关于多智能体的有限时间一致性控制问题, 已经引起了一些学者的关注.

目前, 多智能体的研究主要集中在单个智能体动态为一阶和二阶线性情况. 一阶系统可以描述为

$$\dot{x}_i = u_i, i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $x_i \in R$ 和 $u_i \in R$ 为第 i 个体的状态和控制输入. 有限时间一致性是指存在有限时刻 T, 当 $t \geqslant T$ 时满足 $x_i = x_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 二阶系统可表述为

$$\dot{x}_i = y_i, \dot{y}_i = u_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

其中: $x_i \in R$, $y_i \in R$ 和 $u_i \in R$ 为第 i 个体的位置、速度和控制输入. 有限时间一致性是指存在有限时刻 T, 当 $t \geqslant T$ 时满足

$$x_i = x_j, y_i = y_j, i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

针对一阶多智能体的同步问题, 文献 [55] 利用有限时间 Lyapunov 稳定性判据, 设计了具有如下形式的有限时间控制器:

$$\begin{aligned} u_i = &\beta \mathrm{sig}\Big(\sum_{j\in\mathcal{N}_i} W_{ij}(x_j - x_i)\Big)^{\alpha} + \\ &\gamma \sum_{j\in\mathcal{N}_i} W_{ij}(x_j - x_i). \end{aligned}$$

其中: $0 < \alpha_1 < 1, \beta > 0, \gamma \geqslant 0, W_{ij} > 0, \mathcal{N}_i$ 为相应的指标集. [56] 考虑了带切换拓扑的多智能体一致性问题, 设计了如下有限时间控制器:

$$u_i = \frac{k}{dg/dx_i} \sum_{j\in\mathcal{N}_i} \mathrm{sig}\left(W_{ij}(\vartheta(x_j - x_i))\right)^{\alpha}.$$

其中: $0 < \alpha_1 < 1$; $W_{ij} > 0$; $\mathcal{N}_i$ 为相应的指标集; $g(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ 为根据需要所设计的函数. [57] 考虑了带通信时延的一阶多智能体有限时间控制问题, 利用坐标变换, 将时延控制问题转化为不含时延的控制问题, 然后设计有限时间控制器. 上述结果都是关于一阶多智能体的一致性有限时间控制问题. 关于二阶多智能体的有限时间控制问题, 目前结果较少. 值得提出的是, [58] 利用齐次性理论, 针对二阶多智能体的一致性问题, 给出了如下形式的有限时间控制器:

$$\begin{aligned} u_i = &\sum_{i=1}^{n} W_{ij}[\psi_1(\mathrm{sig}(x_j - x_i)^{\alpha_1}) + \\ &\psi_2(\mathrm{sig}(y_j - y_i)^{\alpha_2})]. \end{aligned}$$

其中: $W_{ij} > 0$; $0 < \alpha_1 < 1$; $\alpha_2 = \dfrac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}$; $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$ 为满足一定条件的奇函数.

4) 永磁同步电机的有限时间控制

永磁同步电机由于具有体积小、结构简单、伺服性能优良等特点, 在很多领域得到了广泛应用. 永磁

同步电机是一个非线性耦合、参数时变和带不确定性的系统, 其控制问题颇具挑战性. 传统控制方法: 如: PI 控制、自抗扰控制、智能控制等, 在永磁同步电机的控制方面已取得了很好的控制效果. 此外, 也有学者结合有限时间控制方法, 来考虑永磁同步电机的控制问题.

文献 [59] 针对采用矢量控制的永磁同步电机的速度环, 提出了一种基于扰动观测器的有限时间控制算法. 首先, 利用扰动观测器观测出系统中的扰动, 并将观测出值补偿到输入端; 然后, 利用有限时间控制技术设计反馈控制器. 与传统的 PI 控制器相比, 本文算法具有更好的抗扰动性能. 与 [59] 不同, [60] 考虑了位置环的有限时间控制问题. 利用有限时间控制理论和反步设计技术, 针对系统的位置环设计了有限时间控制器, 且给出了扰动性分析结果. [61] 结合高阶滑模和终端滑模控制技术的优点, 针对永磁同步电机速度环提出了一种滑模控制方法, 在消除抖颤的同时也可以实现电机转速的有限时间收敛.

上述方法只给出了仿真分析, 没有给出实验结果. 文献 [62] 针对永磁同步电机的速度环, 基于扩张状态观测器和有限时间控制方法, 得到了一个复合有限时间控制方案, 并给出了实验研究. 实验对比结果表明, 有限时间控制方案比传统的线性控制方案具有更好的性能. [63] 也考虑了永磁同步电机的实验研究. 首先, 利用非奇异终端滑模控制技术, 估计出同步电机的位置和速度信息; 然后, 针对速度环设计了一个混杂控制器, 并将控制算法在永磁同步电机实验平台上编程实现.

除此之外, 有限时间控制技术在其他领域也有一些应用, 如: 有限时间控制在生物反应器中的应用[64]、机械臂的有限时间跟踪[5,47]、轮式机器人的有限时间控制[65]等, 限于篇幅, 本文不再作详细介绍.

7 结 论

目前, 关于有限时间控制技术的研究正处在快速发展中. 但由于有限时间控制系统本身的非 Lipschitz 连续性, 导致有限时间控制系统的分析与综合问题比较困难. 因此, 相对于渐近稳定结果而言, 有限时间控制结果目前还较少, 还有很多关于有限时间控制方面的问题没能深入研究, 主要包括以下几方面:

1) 高阶系统的有限时间控制器设计问题

针对高阶系统的有限时间控制器设计, 一般都是基于类似于反步设计的方法. 在控制器推导过程中, 需要利用不等式进行放缩. 在这种情况下, 为了保证稳定性, 控制增益一般取值偏大, 从而使得控制量幅值偏大. 尽管文献 [13] 针对高阶积分系统, 给出了一个更简单的有限时间控制设计方法, 但控制器的具体参数不易获取. 因此, 如何降低有限时间控制设计的保守性, 是一个值得进一步研究的问题.

2) 上三角系统的有限时间镇定问题

尽管文献 [31] 中的方法可以处理带低阶项的上三角系统, 但在对非线性项 $f_i(x_{i+1},\cdots,x_n)$ 的假设中, 关于 x_{i+1} 的项仍需要满足高阶. 若 $f_i(x_{i+1},\cdots,x_n)$ 中关于 x_{i+1} 的项都为低阶项, 则本文方法也将失效. 怎样处理该问题也是将来关于上三角系统反馈镇定的工作. 此外, 如何针对带低阶非线性上三角系统设计输出反馈控制器也将是一个很有意义的工作.

3) 控制量受限的有限时间控制器设计

在已有关于有限时间控制的结果中, 特别是高阶系统, 控制器中的控制增益往往较大. 在这种情况下, 系统状态到达稳态前所要求的控制量会偏大. 但是, 实际系统均存在控制受限的要求. 因此, 如何在控制设计时将控制量受限考虑进去, 得到控制量受限情况下的有限时间控制器是一个颇具挑战性的问题.

综上所述, 有限时间控制方法可以提高系统的控制性能, 因此对有限时间控制的研究具有重要的意义. 尽管关于有限时间控制方面已经取得了一些成果, 但目前还处在发展阶段, 仍然有很多方面有待进一步的深入研究. 我们有理由相信, 通过研究人员的坚持不懈的努力, 这个课题将会得到更为迅速的发展.

参考文献(References)

[1] Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(5): 678-682.

[2] Ding S H, Li S H, Li Q. Stability analysis for a second-order continuous finite-time control system subject to a disturbance[J]. J of Control Theory and Applications, 2009, 7(3): 271-176.

[3] Hong Y, Huang J, Xu Y. On an output feedback finite-time stabilization problem[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(2): 305-309.

[4] Athans M, Falb P L. Optimal control: An introduction to the theory and its applications[M]. New YorK: McGraw-Hill, 1985.

[5] Feng Y, Yu X H, Man Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica, 2002, 38(9): 2159-2167.

[6] Ryan E P. Singular optimal controls for second-order saturating systems[J]. Int J of Control, 1979, 30(4): 549-

564.

[7] Ryan E P. Finite-time stabilization of uncertain nonlinear planar systems[J]. Dynamics and Control, 1991, 1(1): 83-89.

[8] Yu S, Yu X. Robust global terminal sliding mode control of SISO nonlinear uncertain systems[C]. IEEE Conf on Decision and Control. 2000: 2198-2203.

[9] Rang E R. Isochrone families for second-order systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1963, 8(1): 64-65.

[10] Salehi S V, Ryan E P. On optimal nonlinear feedback regulation of linear plants[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(6): 1260-1264.

[11] Haimo V T. Finite-time controllers[J]. SIMA J on Control and Optimization, 1986, 24(4): 760-770.

[12] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of homogeneous systems[C]. American Control Conf, 1997: 1073-1078.

[13] Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 2005, 17(2): 101-127.

[14] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.

[15] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.

[16] Kurzweil J. On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion[J]. American Mathematical Society Translations, 1956, 2(24): 19-77.

[17] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field[J]. Systems and Control Letters, 1992, 19(6): 467-473.

[18] Kawski M. Geometric homogeneity and applications to stabilization[C]. IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. 1995: 164-169.

[19] Qian C, Lin W. Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(9): 1457-1471.

[20] 韩京清. 一种新型控制器: NLPID[J]. 控制与决策, 1994, 9(6): 410-407.
(Hang J Q. A new type of controller: NLPID[J]. Control and Decision, 1994, 9(6): 410-407.)

[21] 李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法[J]. 自动化学报, 2007, 33(1): 101-104.
(Li S H, Ding S H, Tian Y P. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(1): 101-104.)

[22] Qian C, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(7): 1061-1079.

[23] Wang Z, Li S H, Fei S M. Finite-time tracking control of a nonholonomic mobile robot[J]. Asian J of Control, 2009, 11(3): 344-357.

[24] Hong Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems[J]. Systems and Control Letters, 2002, 46(2): 231-236.

[25] Huang X Q, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems[J]. Automatica, 2005, 41(5): 881-888.

[26] Hong Y, Wang J. Non-smooth finite-time stabilization for a class of nonlinear systems[J]. Science in China: Series F Information Sciences, 2006, 49(1): 80-89.

[27] Moulay E, Perruquetti W. Finite-time stability and stabilization of time-delay systems[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(7): 561-566.

[28] Hong Y, Wang J, Cheng D. Adaptive finite-time control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 858-862.

[29] Hong Y, Jiang Z. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(12): 1950-1956.

[30] Ding S H, Qian C, Li S H. Global stabilization of a class of feedforward systems with lower-order nonlinearities[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(3): 691-696.

[31] Ding S H, Qian C, Li S H. Global stabilization of a class of upper-triangular systems with unbounded or uncontrollable linearizations[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010.

[32] Li S H, Tian Y P. Finite-time stability of cascaded time-varying systems[J]. Int J of Control, 2007, 80(4): 646-657.

[33] Ding S H, Li S H, Li Q. Global uniform asymptotical stability of a class of nonlinear cascaded systems with application to a nonholonomic wheeled mobile robot[J]. Int J of Systems Science, 2009.

[34] Qian C, Li J. Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(6): 885-890.

[35] Li J, Qian C. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems using output feedback[C]. IEEE Conf on Decision and Control. 2005: 2652-2657.

[36] Li J, Qian C. Global finite-Time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 879-884.

[37] Li J, Qian C. Global finite-time stabilization by output feedback for a class of linearly unobservable systems[C]. American Control Conference. 2006: 4987-4992.

[38] Hong Y, Yang G, Bushnell L, et al. Global finite-time stabilization: From state feedback to output feedback[C]. IEEE Conf on Decision and Control. 2000: 2908-2913.

[39] Perruquetti W, Floquet T, Moulay E. Finite-time observers: applications to secure communication[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(1): 356-360.

[40] Munkres J. Topology[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.

[41] Shen Y J, Xia X H. Semi-global finite-time observers for nonlinear systems[J]. Automatica, 2008, 44(12): 3152-3156.

[42] Shen Y J, Shen W M, Jiang M H, Huang Y H. Semi-global finite-time observers for multi-output nonlinear systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 20(7): 789-801.

[43] Man Z, Paplinski A P, Wu H. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(12): 2464-2469.

[44] Man Z, Yu X H. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems[J]. IEEE Trans on Circuits and System, 1997, 44(11): 1065-1070.

[45] Tan C P, Yu X H, Man Z. Terminal sliding mode observers for a class of nonlinear systems[J]. Automatica, 2010,.

[46] Wu Y, Man Z, Yu X. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamics[J]. Systems and Control Letters, 1998, 34(1): 281-287.

[47] Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(10): 1957-1964.

[48] Li S H, Tian Y P. Finite time synchronization of chaotic systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 15(2): 303-310.

[49] Wang H, Han Z, Xie Q, et al. Finite-time chaos control of unified chaotic systems with uncertain parameters[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 55(4): 323-328.

[50] Wei D Q, Zhang B. Controlling chaos in permanent magnet synchronous motor based on finite-time stability theory[J]. Chinese Physics, Part B, 2009, 18(4): 1399-1403.

[51] Ding S H, Li S H. Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques[J]. Aerospace Science and Technology, 2009, 13(4-5): 256-265.

[52] Jin E D, Sun Z W. Robust controllers design with finite time convergence for rigid spacecraft attitude tracking control[J]. Aerospace Science and Technology, 2008, 12(4): 324-330.

[53] Li S H, Ding S H, Li Q. Global set stabilization of the spacecraft attitude control problem based on quaternion[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(1): 84-105.

[54] Li S H, Ding S H, Li Q. Global set stabilization of the spacecraft attitude using finite-time control technique[J]. Int J of Control, 2009, 82(5): 822-836.

[55] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2605-2611.

[56] Jiang F, Wang L. Finite-time information consensus for multi-agent systems with fixed and switching topologies[J]. Physica D, 2009, 238(16): 1550-1560.

[57] Wang L, Chen Z, Liu Z, et al. Finite time agreement protocol design of multi-agent systems with communication delays[J]. Asian J of Control, 2009, 11(3): 281-286.

[58] Wang X L, Hong Y G. Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics[C]. IFAC. 2008: 15185-15190.

[59] 张小华, 刘慧贤, 丁世宏, 等. 基于扰动观测器和有限时间控制的永磁同步电机调速系统[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1028-1032.
(Zhang X H, Liu H X, Ding S H, et al. PMSM speeding-adjusting system based on disturbance observer and finite time control[J]. Control and Decision, 2009, 24(7): 1028-1032.)

[60] 刘慧贤, 丁世宏, 李世华, 等. 永磁同步电机位置伺服系统的有限时间控制[J]. 电机与控制学报, 2009, 13(3): 424-430.
(Liu H X, Ding S H, Li S H, et al. Finite-time Control of PMSM position servo system[J]. Electric Machines and Control, 2009, 13(3): 424-430.)

[61] 郑剑飞, 冯勇, 陆启良. 永磁同步电机的高阶终端滑模控制方法[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 697-700.
(Zheng J F, Feng Y, Lu Q L. High-order terminal sliding mode control for permanent magnet synchronous motor[J]. Control Theory and Applications, 2009, 26(6): 697-700.)

[62] Li S H, Liu H X, Ding S H. A speed control for a PMSM using finite-time feedback control and disturbance compensation[J]. Trans of the Institute of Measurement and Control, 2010, 32(2): 170-187.

[63] Feng Y, Zheng J, Yu X, et al. Hybrid terminal sliding mode observer design method for a permanent magnet synchronous motor control system[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2009, 56(9): 3424-3431.

[64] Li S H, Wang Z, Fei S. Finite-time control of a bioreactor system using terminal sliding mode[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2009, 5(10): 3495-3504.

[65] 祝晓才, 董国华, 胡德文. 轮式移动机器人有限时间镇定控制器设计[J]. 国防科技大学学报, 2006, 28(4): 121-127.
(Zhu X C, Dong G H, Hu D W. Finite-time stabilization controller for wheeled mobile robot[J]. J of National University of Defence Technology, 2006, 28(4): 121-127.)