

文章编号: 1001-0920(2011)11-1706-05

## 非完整移动机器人的连续时变鲁棒 $K$ 指数镇定

李明军, 马保离

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 针对带有参数不确定性动态非完整移动机器人的镇定问题, 提出一个全局连续的时变鲁棒控制律. 首先, 使用全局可逆变换将系统的动力学模型转换成一个不确定性线性子系统和一个不确定性非线性子系统; 然后, 引入一个与初值有关的指数衰减项, 将非线性子系统转换成带扰动项的线性系统; 最后, 设计鲁棒控制律将整个系统镇定到原点. 与已有的控制器相比, 所提出的控制器能同时获得连续性、渐近性和指数收敛速度, 仿真结果也验证了这一点.

**关键词:**  $K$  指数镇定; 鲁棒控制; 非完整系统; 移动机器人

**中图分类号:** TP24

**文献标识码:** A

## Continuous time-varying robust $K$ -exponential stabilization of nonholonomic wheeled mobile robots

LI Ming-jun, MA Bao-li

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China. Correspondent: LI Ming-jun, E-mail: limingjun\_8888@163.com)

**Abstract:** A global continuous time-varying robust control law is proposed to stabilize the dynamic nonholonomic wheeled mobile robot(WMR) with parameter uncertainty. The dynamic model of the WMR is transformed into an uncertain linear subsystem and an uncertain nonlinear subsystem by a global invertible transformation. Then, the nonlinear subsystem is transformed into a linear subsystem with disturbance by introducing an exponential decay term related to the initial state values. Finally, a robust control law is designed to stabilize the whole system. Compared with the existed control laws, the one proposed in this paper achieves continuity, asymptotic property and exponential rates at the same time, which is verified by the simulation result.

**Key words:**  $K$ -exponential stabilization; robust control; nonholonomic systems; mobile robots

### 1 引言

非完整系统的控制问题是近年来的研究热点, 其原因有二: 一是很多实际机械系统都带有非完整约束; 二是不存在连续时不变反馈控制律对非完整系统进行控制<sup>[1]</sup>. 为解决这个问题, 人们提出了多种控制方案, 如光滑时变控制<sup>[2-4]</sup>、不连续控制或分段光滑控制<sup>[5-8]</sup>和混杂控制律<sup>[9-10]</sup>.

以往的大多数文献仅考虑了非完整系统的运动学控制问题, 将速度当作控制输入<sup>[11]</sup>进行研究. 然而, 在实际应用中应该考虑动力学模型, 将力和力矩当作控制输入. 如果可以获得精确的动力学模型, 则动态非完整系统可以轻易地转换成扩展非完整系统, 所获得的运动学控制律只需略加修改便可应用<sup>[12-13]</sup>. 但是, 由于参数不确定性、未建模动力学因素以及外来

干扰的存在, 难以获得精确的动力学模型. 因此, 有必要单独讨论带动力学不确定性的非完整系统的镇定问题. 关于这类问题的已有控制器可以分为 3 类: 1) 将状态调节到目标点的邻域内<sup>[14-16]</sup>, 对收敛速度未作要求; 2) 将状态渐近调节到目标点<sup>[17-20]</sup>, 但不是指数收敛的; 3) 以指数速度将状态调节至目标点<sup>[21-23]</sup>, 但没有获得渐近性. 另外, 本文所研究的不确定性动态 WMR 无法转换成文献 [23] 中的系统类型. 据作者了解, 目前尚未见到以指数速度将不确定性动力学系统渐近地镇定到目标点的控制方案的相关报道.

WMR 是典型的非完整机械系统. 本文为不确定性动态 WMR 提出了一个镇定律, 将动力学误差转换成一个不确定线性子系统和一个不确定非线性子系统, 先用线性控制律镇定前者, 然后用非线性控制律

收稿日期: 2010-07-13; 修回日期: 2010-09-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874012).

作者简介: 李明军(1981—), 男, 博士生, 从事非完整系统控制的研究; 马保离(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统控制、机器人控制等研究.

镇定后者. 与前人成果相比, 本文提出的控制律具有如下优点: 1) 同时获得连续性、指数收敛速度和渐近性; 2) 离线计算控制器参数, 效率高.

## 2 问题描述

考虑 3 轮移动机器人, 2 个后轮是驱动轮, 前轮是被动轮. 设  $(x, y, \theta)$  表示惯性坐标系中的位置和方向, 则移动机器人的运动学方程和动力学方程分别为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \\ m\dot{v} &= (\tau_1 + \tau_2)/R, \quad J\dot{\omega} = L(\tau_1 - \tau_2)/R. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $R$  是 2 个后轮的半径,  $2L$  是 2 个后轮的轴心距离,  $(m, J)$  分别是移动机器人的质量和惯量,  $(\tau_1, \tau_2)$  是作用在右后轮和左后轮上的力矩. 易知, 系统 (1) 的平衡点是  $\{(x, y, \theta, v, \omega) : v = \omega = 0\}$ . 通过坐标变换, 镇定到任意平衡点的问题可转化为镇定到原点的问题. 因此, 不失一般性, 下文假设目标状态为原点.

在已有的文献中, 大多数文献均假设参数  $(R, L, m, J)$  为已知常数. 这种假设简化了控制律的设计难度, 但不符合实际情况. 本文假设参数  $(R, L, m, J)$  是未知常数, 且满足

$$0 < R_m \leq R \leq R_M, \quad 0 < L_m \leq L \leq L_M,$$

$$0 < m_m \leq m \leq m_M, \quad 0 < J_m \leq J \leq J_M,$$

其中  $(R_m, L_m, m_m, J_m)$  和  $(R_M, L_M, m_M, J_M)$  是已知常数.

引入坐标变换和控制变换

$$\begin{cases} x_1 = \theta, \quad x_4 = \omega, \quad x_5 = v, \\ x_2 = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ x_3 = x \sin \theta - y \cos \theta; \end{cases} \quad (2)$$

$$u_1 = \tau_1 + \tau_2, \quad u_2 = \tau_1 - \tau_2. \quad (3)$$

则系统 (1) 变换为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4, \\ \dot{x}_4 = c_1 u_1; \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_5 - x_3 x_4, \\ \dot{x}_3 = x_2 x_4, \\ \dot{x}_5 = c_2 u_2. \end{cases} \quad (4b)$$

其中  $c_1 = L/(RJ)$  和  $c_2 = 1/(Rm)$  是新的未知参数, 满足

$$L_m/(R_M J_M) \leq c_1 \leq L_M/(R_m J_m),$$

$$1/(R_M m_M) \leq c_2 \leq 1/(R_m m_m). \quad (5)$$

因为变换 (2) 和 (3) 是全局可逆的, 所以系统 (1) 的镇定问题等价于系统 (4) 的镇定问题.

**定义 1** 考虑系统  $\dot{\xi} = f(\xi, t)$ ,  $f(0, t) = 0$ ,  $\xi \in R^n$ , 其中  $f(\xi, t)$  关于  $t$  是连续的, 关于  $\xi$  是 Lipschitz 的. 若存在  $K$  类函数  $h(\cdot)$  和正数  $k$ , 使得对于任意初始状

态  $\xi(0) \in R^n$ , 都有  $\|\xi(t)\| \leq h(\|\xi(0)\|) e^{-kt}$ , 则称系统为全局  $K$  指数稳定的.

与指数调节不同,  $K$  指数稳定具有优良特性——初始状态离原点越近, 则整个轨迹也离原点越近<sup>[5]</sup>.

**引理 1** 如果  $A$  是  $n$  阶 Hurwitz 矩阵, 则系统  $\dot{\xi} = A\xi + \tilde{A}(t)\xi$  是全局  $K$  指数稳定的, 其中  $\xi \in R^n$ ,  $\int_0^\infty \|\tilde{A}(t)\| dt \leq h(\|\xi(0)\|) < \infty$ ,  $h(\cdot)$  为某个  $K$  类函数.

**证明** 为方便叙述, 不妨设  $A$  的所有特征值的实部都小于  $-a$  ( $a > 0$ ). 容易验证  $A + aI$  的所有特征值都拥有负实部, 故方程  $(A + aI)^T P + P(A + aI) = -I$  有唯一正定对称解阵  $P$ . 定义函数  $V = \xi^T P \xi$ , 则有

$$\mu_1 \|\xi\|^2 \leq V \leq \mu_2 \|\xi\|^2,$$

其中  $\mu_1$  和  $\mu_2$  分别是  $P$  的最小、最大特征值.  $V$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \xi^T (A^T P + PA + \tilde{A}^T(t)P + P\tilde{A}(t))\xi \leq \\ &- (2a + 1/\mu_2 - \|\tilde{A}^T(t)P + P\tilde{A}(t)\|/\mu_1)V \leq \\ &- (2a - 2\|P\|\|\tilde{A}(t)\|/\mu_1)V = \\ &- (2a - c(t))V, \end{aligned}$$

其中  $c(t) = 2\|P\|\|\tilde{A}(t)\|/\mu_1$ . 由比较原理可知

$$V(t) \leq V(0) e^{-2at + \int_0^t c(t) dt}.$$

因为

$$\int_0^\infty \|\tilde{A}(t)\| dt \leq h(\|\xi(0)\|) < \infty,$$

故  $\int_0^t c(t) dt \leq 2h(\|\xi(0)\|)\|P\|/\mu_1$ , 所以

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\| &\leq \sqrt{V(t)/\mu_1} \leq \\ &\sqrt{V(0) e^{2h(\|\xi(0)\|)\|P\|/\mu_1} / \mu_1} e^{-at} \leq \kappa(\|\xi(0)\|) e^{-at}. \end{aligned}$$

其中  $\kappa(\|\xi(0)\|) = \|\xi(0)\| e^{h(\|\xi(0)\|)\|P\|/\mu_1} \sqrt{\mu_2/\mu_1}$  是  $K$  类函数.  $\square$

## 3 连续时变反馈控制律

设  $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_5]^T$ , 则本文的控制问题可叙述为: 对于系统 (4), 在未知参数  $(c_1, c_2)$  满足式 (5) 的条件下, 设计连续时变反馈控制律  $(u_1(t), u_2(t))$ , 使得对于任意初始状态  $\mathbf{x}(0)$  都满足  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \kappa(\|\mathbf{x}(0)\|) e^{-kt}$ , 其中  $\kappa(\cdot)$  为  $K$  类函数,  $k$  为正数.

### 3.1 子系统 $(x_1, x_4)$ 的控制

令  $\alpha(t) = \alpha_0(\|\mathbf{x}(0)\|) e^{-\lambda_0 t}$ ,  $\lambda_0 > 0$ , 其中  $\alpha_0 = (x_1^2(0) + x_4^2(0) + \|\mathbf{x}_2(0)\|^{2\varepsilon})^{1/2}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\mathbf{x}_2 = [x_2, x_3, x_5]^T$ , 则在如下控制律作用下:

$$u_1 = -k_1 x_1 - k_4 x_4 + \alpha(t), \quad (6)$$

子系统  $(x_1, x_4)$  的闭环形式为

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \alpha(t). \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 k_1 & -c_1 k_4 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

**注 1** 与文献[21]的控制律  $u_1$  相比, 本文的控制律  $u_1$  除包含  $(x_1, x_4)$  的反馈外, 还包含指数衰减项  $\alpha(t)$ . 该项的引入保证了下文的控制律  $u_2$  的连续性, 同时其系数  $\alpha_0$  选为状态初值的  $K$  类函数而不是常数, 保证了状态轨迹的渐近性.

**引理 2** 如果将  $\mathbf{A}_1$  的特征值配置为  $-\lambda_1, -\lambda_4$ ,  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_4$ , 则:

1) 存在某个  $K$  类函数  $\kappa_1(\|\mathbf{x}(0)\|)$ , 使得  $\|\mathbf{x}_1(t)\| \leq \kappa_1(\|\mathbf{x}(0)\|) e^{-\lambda_0 t}$ ;

2) 控制输入  $u_1(t)$  是有界的和指数收敛的;

3) 当  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$  时,  $x_4(t)/\alpha(t) = \delta_0 + \delta_1(t)$ , 其中  $\delta_0$  为常数,  $\delta_1(t)$  满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0, \int_0^t |\delta_1(t)| dt \leq \bar{\delta}_1 < \infty,$$

$\bar{\delta}_1$  为正常数.

**证明** 1) 存在正数  $M_1$  使得  $\|e^{\mathbf{A}_1 t}\| \leq M_1 e^{-\lambda_1 t}$ . 系统(7)的解为

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_1(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)} \mathbf{B}_1 \alpha(\tau) d\tau,$$

因此有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(t)\| &\leq \\ M_1 e^{-\lambda_1 t} \|\mathbf{x}_1(0)\| &+ \int_0^t M_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)} c_1 \alpha(\tau) d\tau \\ M_1 (\|\mathbf{x}_1(0)\| - \bar{\alpha}_0) e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)t} &+ \bar{\alpha}_0 e^{-\lambda_0 t} \leq \\ \kappa_1(\|\mathbf{x}(0)\|) e^{-\lambda_0 t}. \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $\bar{\alpha}_0 = \frac{c_1 \alpha_0}{\lambda_1 - \lambda_0}$ ,  $\kappa_1(r) = M_1(r + \bar{\alpha}_0)$  是  $K$  类函数.

2) 结合式(8)和  $\alpha(t)$  的定义可知, 控制输入  $u_1(t)$  是有界的和指数收敛的.

3) 存在一个变换阵  $\mathbf{Q}$  使得  $e^{\mathbf{A}_1 t} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{Q}^{-1}$ , 其中  $\mathbf{\Lambda}(t) = \text{diag}(e^{-\lambda_1 t}, e^{-\lambda_4 t})$ , 则系统(7)的解  $\mathbf{x}_1(t)$  可重写为

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}(t) (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}_1(0) - \alpha_0 \mathbf{D}) + \alpha_0 \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_0(t) \mathbf{D}.$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A}_c \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}_1, \mathbf{\Lambda}_0(t) = \text{diag}(e^{-\lambda_0 t}, e^{-\lambda_0 t}), \\ \mathbf{A}_c &= \text{diag}((\lambda_1 - \lambda_0)^{-1}, (\lambda_4 - \lambda_0)^{-1}). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\mathbf{x}_1(t)}{\alpha(t)} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{\Lambda}_0^{-1}(t) \left( \frac{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}_1(0)}{\alpha_0} - \mathbf{D} \right) + \mathbf{Q} \mathbf{D}.$$

显然,  $\mathbf{Q} \mathbf{D}$  是常数向量,  $\mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{\Lambda}_0^{-1}(t)$  是指数衰减对角阵. 由此, 存在常数  $\delta_0$  和指数衰减函数  $\delta_1(t)$ , 使得

$$x_4(t)/\alpha(t) = \delta_0 + \delta_1(t), \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0.$$

根据  $\alpha_0$  的定义可知

$$\|\mathbf{x}_1(0)/\alpha_0\| \leq (\|\mathbf{x}_1(0)\| + |x_4(0)|)/\alpha_0 \leq 2,$$

所以存在正常数  $\bar{\delta}_1$  使得  $\int_0^t |\delta_1(t)| dt \leq \bar{\delta}_1 < \infty$ .  $\square$

### 3.2 子系统 $(x_2, x_3, x_5)$ 的控制

定义向量

$$\mathbf{z}_2 = [z_2, z_3, z_5]^T. \quad (9)$$

当  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$  时, 引入坐标变换

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{T}(\alpha) \mathbf{x}_2, \mathbf{T} = \text{diag}(1, 1/\alpha, 1), \quad (10)$$

和控制律

$$u_2 = -\mathbf{K}_2 \mathbf{z}_2, \quad (11)$$

则有闭环子系统

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2) \mathbf{z}_2 + \tilde{\mathbf{A}}_2(t) \mathbf{z}_2. \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= [k_2, k_3, k_5], \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \delta_0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha(t)x_4(t) & 0 \\ \delta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

**引理 3** 选择参数  $\mathbf{K}_2$  使得  $\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2$  的所有特征值的实部小于  $-k$ ,  $k > \lambda_0$ , 则当  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$  时, 在坐标变换(10)和控制律(6), (11)的作用下, 闭环轨迹  $\mathbf{x}_2(t)$  和控制输入  $u_2(t)$  是有界的和指数收敛的.

**证明** 1) 根据  $\alpha(t)$  和  $\delta_1(t)$  的定义以及引理 2 可知, 存在  $K$  类函数  $\kappa_2(\|\mathbf{x}(0)\|)$ , 使得

$$\int_0^\infty \|\tilde{\mathbf{A}}_2(t)\| dt \leq \kappa_2(\|\mathbf{x}(0)\|) < \infty.$$

由引理 1 可知, 存在  $K$  类函数  $\kappa_3(\|\mathbf{z}_2(0)\|)$ , 使得

$$\|\mathbf{z}_2(t)\| \leq \kappa_3(\|\mathbf{z}_2(0)\|) e^{-kt}. \quad (14)$$

由式(10)可知

$$\|\mathbf{T}(\alpha(0))\| \leq \begin{cases} 3^{1/2}, & \alpha_0 \geq 1; \\ 3^{1/2} \alpha_0^{-1}, & 0 < \alpha_0 < 1; \end{cases} \quad (15a)$$

$$\|\mathbf{T}^{-1}(\alpha(t))\| \leq \begin{cases} 3^{1/2} \alpha(t), & \alpha(t) \geq 1; \\ 3^{1/2}, & \alpha(t) < 1; \end{cases} \quad (15b)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{T}^{-1}(\alpha(t)) \mathbf{z}_2(t); \quad (15c)$$

$$\mathbf{z}_2(0) = \mathbf{T}(\alpha(0)) \mathbf{x}_2(0). \quad (15d)$$

结合式(14)和(15), 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_2(t)\| &\leq \\ \|\mathbf{T}^{-1}(\alpha(t))\| \kappa_3(\|\mathbf{T}(\alpha(0))\|) \|\mathbf{x}_2(0)\| e^{-kt} &\leq \\ \begin{cases} 3^{1/2} \alpha_0 \kappa_3(3^{1/2} \|\mathbf{x}_2(0)\|) e^{-(k+\lambda_0)t}, & \alpha(t) \geq 1; \\ 3^{1/2} \kappa_3(3^{1/2} \|\mathbf{x}_2(0)\|) e^{-kt}, & 0 < \alpha(t) < 1, \alpha_0 \geq 1; \\ 3^{1/2} \kappa_3(3^{1/2} \alpha_0^{-1} \|\mathbf{x}_2(0)\|) e^{-kt}, & 0 < \alpha_0 < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

由  $\alpha_0$  的定义式可知

$$\alpha_0^{-1} \|\mathbf{x}_2(0)\| = \frac{\|\mathbf{x}_2(0)\|}{\sqrt{x_1^2(0) + x_4^2(0) + \|\mathbf{x}_2(0)\|^{2\varepsilon}}} \leq \|\mathbf{x}_2(0)\|^{1-\varepsilon} \leq \|\mathbf{x}(0)\|^{1-\varepsilon}. \quad (17)$$

定义函数

$$\kappa_4(r) = 3^{1/2} \max[\alpha_0 \kappa_3(3^{1/2}r), \kappa_3(3^{1/2}r), \kappa_3(3^{1/2}r^{1-\varepsilon})],$$

因  $0 < \varepsilon < 1$ , 故  $\kappa_4(\cdot)$  是  $K$  类函数. 将  $\kappa_4(\cdot)$  和式 (17) 代入 (16), 则有

$$\|\mathbf{x}_2(t)\| \leq \kappa_4(\|\mathbf{x}(0)\|)e^{-kt}. \quad (18)$$

2) 由式 (11) 和 (14) 可知, 控制输入  $u_2(t)$  是有界的、指数收敛的.  $\square$

### 3.3 整个系统的控制

**定理 1** 按照引理 2 和引理 3 的方式选择参数  $k_1, k_4$  和  $K_2$ , 则在连续控制律 (6) 和下式的作用下:

$$u_2 = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}; \\ -\mathbf{K}_2 \mathbf{T}(\alpha) \mathbf{x}_2, & \text{else.} \end{cases} \quad (19)$$

系统 (4) 是全局  $K$  指数稳定的.

**证明** 1) 显然,  $u_1(t)$  是连续控制律. 根据  $\alpha_0$  的定义可知

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|x_3(0)|}{\alpha_0} &= \lim_{\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|x_3(0)|}{\sqrt{x_1^2(0) + x_4^2(0) + \|\mathbf{x}_2(0)\|^{2\varepsilon}}} \leq \\ \lim_{\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|x_3(0)|}{\|\mathbf{x}_2(0)\|^\varepsilon} &\leq \\ \lim_{\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{0}} |x_3(0)|^{1-\varepsilon} &= 0. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{0}} u_2 &= \lim_{\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{0}} (-k_2 x_2(0) - k_3 x_3(0)/\alpha_0 - k_5 x_5(0)) = 0. \end{aligned}$$

因此  $u_2(t)$  是连续控制律.

2) 由式 (6) 和 (19) 可知, 当  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  时, 有  $u_1(t) \equiv u_2(t) \equiv 0$ . 结合式 (4) 可知  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ .

3) 假设  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ , 则由引理 2 和引理 3 可知

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_1(t)\| + \|\mathbf{x}_2(t)\| \leq \kappa_5(\|\mathbf{x}(0)\|)e^{-\lambda_0 t},$$

其中  $\kappa_5(\cdot) = \kappa_1(\cdot) + \kappa_4(\cdot)$  是  $K$  类函数.  $\square$

**注 2** 控制律 (19) 仅在原点处有切换, 但这种切换是连续的, 不会引起抖动. 相比之下, 文献 [21] 的控制律  $u_2$  在一个流形处发生了不连续切换, 导致控制轨迹和状态轨迹都有较大的抖动.

### 4 仿真验证

假设 WMR 的参数如下:  $R = 0.2 \text{ m}$ ,  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $m = 1.0 \text{ kg}$ ,  $J = 0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 它们的上下界为

$$R_m = 0.8R, L_m = 0.8L, m_m = 0.8m, J_m = 0.8J,$$

$$R_M = 1.2R, L_M = 1.2L, m_M = 1.2m, I_M = 1.2J.$$

初始状态选为  $\mathbf{x}_0 = (x, y, \theta, \omega, v) = (1, 1, 0, 0, 0)$ , 采用控制律 (6) 和 (19), 获得的仿真结果如图 1 所示.

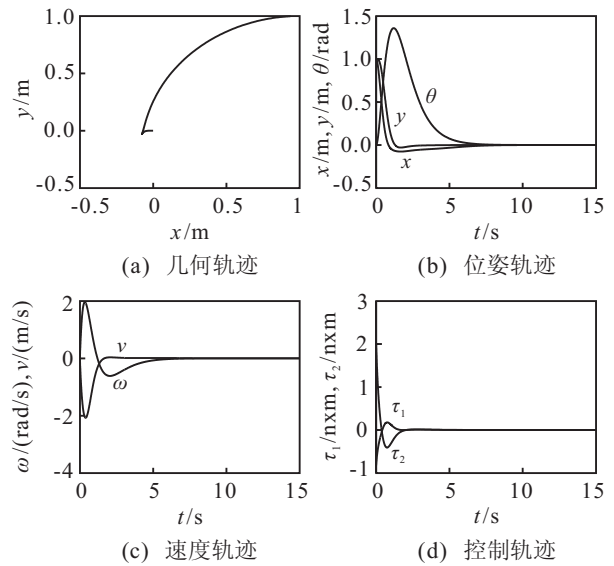


图 1 初始状态  $\mathbf{x}_0$  的仿真结果

从图 1 可以看出, 控制轨迹是连续的, 且状态轨迹指数收敛到零. 为验证控制律的渐近性, 将初始状态  $\mathbf{x}_0$  各分量的绝对值缩为  $1/100$  倍, 然后进行仿真, 结果如图 2 所示.

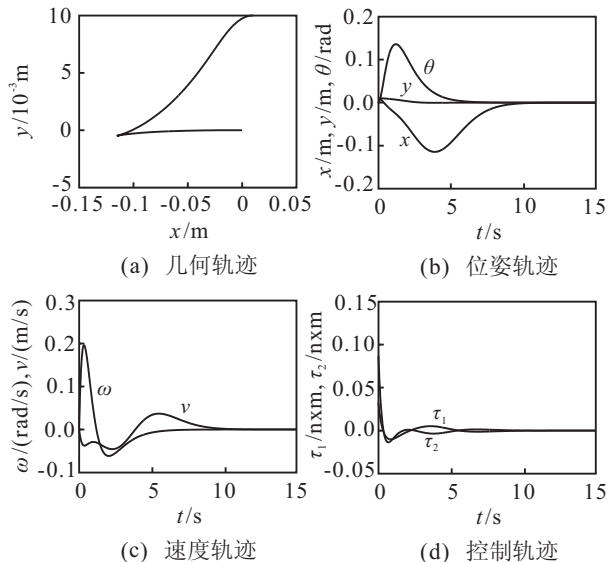


图 2 初始状态  $\mathbf{x}_0/100$  的仿真结果

从图 2 和图 1 的对比可以看出, 当初始状态各个分量的绝对值缩为  $1/100$  倍时, 各分量的振幅随之缩为  $1/10$  倍左右. 这说明本文控制律的确具有  $K$  指数稳定的优良特性, 即初始状态越靠近原点, 镇定到原点所需要的调整和控制能量越少.

**注 3** 使用文献 [21-22] 的控制律分别对初始状态  $\mathbf{x}_0$  和  $\mathbf{x}_0/100$  进行仿真的结果表明, 当初始状态各个分量的绝对值缩为  $1/100$  倍时, 仍然有些分量的振

幅几乎没有改变,这说明文献[21-22]的控制律的局部特性明显劣于本文的控制律,即对于非常靠近原点的初始状态,所需要的控制能量仍然比较大。

## 5 结 论

针对带不确定性参数的动态非完整WMR的鲁棒 $K$ 指数镇定问题,本文构建了一个简单的鲁棒控制器,将WMR的位姿全局镇定到原点.与已有的控制器相比,本文的控制器有如下优点:同时获得了连续性、渐近性和指数收敛速度;控制器参数是离线计算的.本文的控制思想可以推广到高阶非完整系统,这将是未来的研究工作。

## 参考文献(References)

- [1] Brockett R W, Millman R S, Sussmann H J. Differential geometric control theory[M]. Boston: Birkhauser, 1983: 181-191.
- [2] Ma B L, Huo Wei. Smooth time-varying exponential stabilization of nonholonomic chained systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(2): 301-305.
- [3] Tian Yuping, Li Shihua. Exponential stabilization of nonholonomic dynamic systems by smooth time-varying control[J]. Automatica, 2002, 38(7): 1139-1146.
- [4] Lee T C, Jiang Z P. On uniform global asymptotic stability of nonlinear discrete-time systems with applications[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(10): 1644-1660.
- [5] Nicolas Marchand, Mazen Alamir. Discontinuous exponential stabilization of chained form systems[J]. Automatica, 2003, 39(2): 343-348.
- [6] Ju G L, Wu Y Q, Sun W H. Adaptive output feedback asymptotic stabilization of nonholonomic systems with uncertainties[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(11): 5106-5117.
- [7] Zheng Xiuyun, Wu Yuqiang. Adaptive output feedback stabilization for nonholonomic systems with strong nonlinear drifts[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(2): 904-920.
- [8] Sun Zhengdong, Ge S S, Huo Wei, et al. Stabilization of nonholonomic chained systems via nonregular feedback linearization[J]. Systems & Control Letters, 2001, 44(4): 279-289.
- [9] Kolmanovsky I, McClamroch N H. Hybrid feedback laws for a class of cascaded nonlinear control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control 1996, 41(9): 1271-1282.
- [10] Matsune Isatada, Zhai Guisheng, Kobayashi Tomoaki, et al. Towards exponential stabilization of nonholonomic systems via a hybrid control Method[C]. Proc of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Piscataway: IEEE, 2006: 2344-2348.
- [11] 李胜, 马国梁, 胡维礼. 一类不确定非完整移动机器人的时变自适应镇定[J]. 机器人, 2005, 27(1): 10-13. (Li S, Ma G L, Hu W L. Time-varying adaptive stabilization of an uncertain nonholonomic mobile robot[J]. Robot, 2005, 27(1): 10-13.)
- [12] Kolmanovsky I, Reyhanoglu M, McClamroch N H. Discontinuous feedback stabilization of nonholonomic systems in extended power form[C]. Proc of 33rd IEEE Conf on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 1994: 1469-3474.
- [13] Bloch A, Reyhanoglu M, Clamroch N H M C. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control 1992, 37(11): 1746-1757.
- [14] Colbaugh R, Barany R, Class K. Adaptive stabilization of nonholonomic mechanical systems[C]. Proc of 36th IEEE Conf on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 1997: 3081-3088.
- [15] Fierro R, Lewis F L. Practical point stabilization of a nonholonomic mobile robot using neural networks[C]. Proc of 35th IEEE Conf on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 1996: 1722-1727.
- [16] Dixon W E, Dawson D M, Zergeroglu E, et al. Robust tracking and regulation control for mobile robots[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2000, 10(4):199-216.
- [17] Dong W J, Huo W. Adaptive stabilization of uncertain dynamic nonholonomic systems[J]. Int J of Control, 1999, 72(18): 1689-1700.
- [18] Dong W J, Xu Y S, Huo W. On stabilization of uncertain dynamic nonholonomic systems[J]. Int J of Control, 2000, 73(4): 349-359.
- [19] Ge S S, Wang J, Lee T H, et al. Adaptive robust stabilization of dynamic nonholonomic chained systems[J]. J of Robotic Systems, 2001, 18(3): 119-133.
- [20] Pourboghrat F, Karlsson M P. Adaptive control of dynamic mobile robots with nonholonomic constraints[J]. Computers and Electrical Engineering, 2002, 28(4): 241-253.
- [21] Ma B L, Tso S K. Robust discontinuous exponential regulation of dynamic nonholonomic wheeled mobile robots with parameter uncertainties[J]. Int J Robust Nonlinear Control, 2008, 18(8): 960-974.
- [22] Ma B L. Robust smooth time-varying exponential stabilization of dynamic nonholonomic mobile cart with parameter uncertainties[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(2): 314-319.
- [23] Jiang Z P. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties[J]. Automatica, 2000, 36(2): 168-209.