文章编号: 1001-0920 (2011) 11-1716-05

转移概率部分未知的随机 Markov 跳跃系统的镇定控制

盛 立[1], 高 明[2]

(1. 中国石油大学 (华东) 信息与控制工程学院, 山东 青岛 266555;
2. 山东科技大学 信息与电气工程学院, 山东 青岛 266510)

摘 要: 研究一类随机 Markov 跳跃系统的稳定性与镇定控制问题. 此类系统跳跃过程的转移概率部分未知, 包括转移概率完全已知和完全未知两种情形, 因而更具一般性. 首先, 给出保证随机 Markov 跳跃系统均方渐近稳定的充分性判据, 并设计了相应的状态反馈镇定控制器; 然后, 基于矩阵的奇异值分解给出了系统静态输出反馈镇定控制器的设计方法, 并将其归结为求解一组线性矩阵不等式 (LMIs) 的可行性问题; 最后, 通过数值仿真验证了所得结论的正确性.

关键词: Markov 跳跃系统; 随机系统; 稳定性与镇定; 部分未知转移概率

中图分类号: TP273　　　**文献标识码:** A

Stabilization control of stochastic Markov jump systems with partly unknown transition probabilities

SHENG Li[1], *GAO Ming*[2]

(1. College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum(East China), Qingdao 266555, China; 2. College of Information and Electrical Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China. Correspondent: SHENG Li, E-mail: victory8209@yahoo.com.cn)

Abstract: The stability and stabilization problems for a class of stochastic Markov jump systems are investigated. The systems under consideration are more general, since transition probabilities of the mode jumps can be partly unknown, which includes the systems with completely known and completely unknown transition probabilities as two special cases. Firstly, the sufficient condition for the stochastic Markov jump systems to be asymptotically mean square stable is derived, and the state feedback stabilization controller is designed. Then, the design of the static output feedback controller is presented based on singular value decomposition of matrices, and the design problem can be reduced to a set of linear matrix inequalities(LMIs) feasibility problem. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the obtained results.

Key words: Markov jump systems; stochastic systems; stability and stabilization; partly unknown transition probabilities

1 引 言

Markov 跳跃系统 (MJSs) 最早由 Krasovskii 等人于 20 世纪 60 年代提出[1], 是按照一定的随机切换规则在一组子系统之间进行切换的混杂系统, 已广泛应用于交通系统、制造系统和电力系统等领域. 目前, 关于 MJSs 控制问题的研究大多假设转移概率完全已知[2-4], 然而, 实际上 MJSs 中转移概率的全部信息可能难以得到或者获取代价很高[5]. Zhang 等人[5-6]便研究了转移概率部分未知的离散和连续Markov 线性系统的稳定性、镇定控制以及 H_∞ 控制等问题.

在实际应用中, 系统常常受到各种随机因素的干扰, 从而随机系统的研究得到了广泛关注, 确定性系统中的许多重要结果已推广应用于随机系统[7]. 但是, 目前研究的 MJSs 子系统大多为确定性系统, 有关子系统为随机系统的 MJSs 的研究尚不多见. Mao[8]基于 M-矩阵理论研究了具有 Markov 跳跃参数的一般的非线性微分方程的指数稳定性; Huang 等人[9]则研究了一类随机 Markov跳跃系统无限时间的H_2/H_∞控制问题. 但上述文献均要求系统转移概率全部已知, 迄今为止, 尚未见到关于转移概率部分未知的随机 Markov 跳跃系统控制问题的相关讨论.

本文针对一类随机 Markov 跳跃系统, 在转移概

收稿日期: 2010-07-14; **修回日期:** 2010-11-17.

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(210268); 山东省自然科学基金项目(ZR2010FQ013).

作者简介: 盛立(1982−), 男, 讲师, 博士, 从事随机系统、非线性系统控制等研究; 高明(1981−), 女, 讲师, 博士, 从事混杂系统、随机系统控制等研究.

率部分未知的条件下, 研究其稳定性与镇定控制问题. 首先得到保证相应系统均方渐近稳定的充分性条件; 然后讨论系统的镇定控制问题, 给出状态反馈和静态输出反馈控制器的设计方法; 最后通过数值仿真说明了所得结论的有效性和可行性.

2 系统描述和准备工作

考虑如下随机 Markov 跳跃系统:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,x(t) = &[A(r_t)x(t) + B(r_t)u(t)]\mathrm{d}t+\\ &[C(r_t)x(t) + D(r_t)u(t)]\mathrm{d}\omega(t);\end{aligned}\tag{1}$$

$$y(t) = E(r_t)x(t).\tag{2}$$

其中: $x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n, r(0)=r_0$; $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统状态; (x_0,r_0) 为初始状态; $u(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 为控制输入; $\omega(t)$ 为定义在完备带流的概率空间 (Ω,F,F_t,P) 上的一维标准布朗运动, $F_t=\sigma\{\omega(s),0\leqslant s\leqslant t\}$; $y(t)\in\boldsymbol{R}^p$ 为输出. 设 $\{r_t,t\geqslant 0\}$ 是取值于有限状态空间 $\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,N\}$ 的连续 Markov 过程, 其模式变化概率为

$$\Pr(r_{t+\delta}=j|r_t=i)=\begin{cases}\pi_{ij}\delta+o(\delta),\ i\neq j;\\ 1+\pi_{ii}\delta+o(\delta),\ i=j.\end{cases}$$

式中: $\delta>0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}o(\delta)/\delta=0$, $\pi_{ij}\geqslant 0$, $i,j\in\boldsymbol{T}$, 表示从时刻 t 状态 i 转移到时刻 $t+\delta t$ 状态 $j(j\neq i)$ 的转移率, 且满足 $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}$. 定义转移概率矩阵 $\varPi$ 为

$$\varPi=\begin{bmatrix}\pi_{11}&\pi_{12}&\cdots&\pi_{1N}\\ \pi_{21}&\pi_{22}&\cdots&\pi_{2N}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \pi_{N1}&\pi_{N2}&\cdots&\pi_{NN}\end{bmatrix}.$$

文中假设 r_t 与 $\omega(t)$ 独立. 对于 $r_t=i\in\boldsymbol{T}$, $A(r_t)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B(r_t)\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$, $C(r_t)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $D(r_t)\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 和 $E(r_t)\in\boldsymbol{R}^{p\times n}$ 为已知常数矩阵. 为表示方便, 当 $r_t=i\in\boldsymbol{T}$ 时, 第 i 个模式下的系统参数 $A(r_t)$, $B(r_t)$, $C(r_t)$, $D(r_t)$ 和 $E(r_t)$ 分别记为 A_i, B_i, C_i, D_i 和 E_i.

假设 Markov 跳跃过程的转移概率部分未知, 如某个含 4 模式的 MJS 可能具有如下转移概率矩阵:

$$\varPi=\begin{bmatrix}\pi_{11}&\pi_{12}&?&?\\ ?&?&\pi_{23}&?\\ ?&?&\pi_{33}&\pi_{34}\\ \pi_{41}&?&?&\pi_{44}\end{bmatrix},$$

式中 "?" 表示不可获得的元素. 对于 $\forall i\in\boldsymbol{T}$, 定义 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{K}}+\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}}$, 其中

$$\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{K}}\triangleq\{j:\pi_{ij}\ \text{已知}\},\ \boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}}\triangleq\{j:\pi_{ij}\ \text{未知}\}.\tag{3}$$

若 $\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{K}}\neq\varnothing$, 则可描述如下:

$$\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{K}}=\{\mathcal{K}^i_1,\mathcal{K}^i_2,\cdots,\mathcal{K}^i_m\},\ 1\leqslant m\leqslant N,\tag{4}$$

其中 $\mathcal{K}^i_m\in\boldsymbol{Z}^+$ 代表矩阵 $\varPi$ 第 i 行中序号为 $\mathcal{K}^i_m$ 的第 m 个已知元素. 另外, 文中定义 $\pi^i_{\mathcal{K}}=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{K}}}\pi_{ij}$.

定义 1　当 $u(t)=0$ 时, 称随机 Markov 跳跃系统 (1) 是均方渐近稳定的, 如果对任意初始状态 $(x_0\in\boldsymbol{R}^n, r_0\in\boldsymbol{T})$, 均有 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{E}\{\|x(t,x_0,r_0)\|^2\}=0$. 其中 E 表示数学期望.

对于系统 (1), 考虑如下模式依赖的线性状态反馈控制器和线性静态输出反馈控制器:

$$u(t)=K(r_t)x(t),\tag{5}$$

$$u(t)=F(r_t)y(t),\tag{6}$$

其中 $K_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 和 $F_i\in\boldsymbol{R}^{m\times q}(r_t=i\in\boldsymbol{T})$ 是要确定的控制增益矩阵, 则相应的闭环系统分别为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x(t)=\\ &(A_i+B_iK_i)x(t)\mathrm{d}t+(C_i+D_iK_i)x(t)\mathrm{d}\omega(t),\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x(t)=\\ &(A_i+B_iF_iE_i)x(t)\mathrm{d}t+(C_i+D_iF_iE_i)x(t)\mathrm{d}\omega(t).\end{aligned}\tag{8}$$

假设 $\forall i\in\boldsymbol{T}$, 矩阵 E_i 均为行满秩 (即 $\mathrm{rank}(E_i)=p$), 将 E_i 进行奇异值分解, 有

$$E_i=U_i[\,S_i\quad 0\,]V_i^{\mathrm{T}}.\tag{9}$$

其中: $S_i\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$ 为对角矩阵, 其对角元素为降序排列的正数; $0\in\boldsymbol{R}^{p\times(n-p)}$ 为零矩阵; $U_i\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$ 和 $V_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为酉矩阵.

引理 1[10]　给定矩阵 $E_i\in\boldsymbol{R}^{p\times n}$ 满足 $\mathrm{rank}(E_i)=p$, 可进行如式 (9) 所示的奇异值分解. 设 $X\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵, 则存在矩阵 $W\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$ 使 $E_iX=WE_i$ 成立, 当且仅当 X 可表示为如下形式:

$$X=V_i\begin{bmatrix}X_{11}&0\\0&X_{22}\end{bmatrix}V_i^{\mathrm{T}}.$$

其中: $X_{11}\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$, $X_{22}\in\boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$. 此外, 可计算矩阵 $W=U_iS_iX_{11}S_i^{-1}U_i^{\mathrm{T}}$.

若转移概率全部已知, 则如下引理给出了保证非强迫系统 (1) $(u(t)\equiv 0)$ 均方渐近稳定的充分性条件:

引理 2　非强迫系统 (1) 均方渐近稳定, 当存在对称正定矩阵 $P_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 使 $\forall i\in\boldsymbol{T}$ 如下 LMI 成立:

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}P_j<0.\tag{10}$$

证明　选取 Lyapunov 函数

$$V(t,r_t=i)=x^{\mathrm{T}}(t)P_ix(t),$$

令 L 表示 Markov 过程 $\{(x(t),r_t),t\geqslant 0\}$ 作用在 V 上的无穷小算子. 利用广义 Itô 公式[8]得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\{LV(t,i)\}=\\ &\mathrm{E}\Big\{x^{\mathrm{T}}(t)\Big[A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}P_j\Big]x(t)\Big\}.\end{aligned}$$

由式 (10) 可知, 当 $x(t)\neq 0$ 时, $\mathrm{E}\{LV(t,i)\}<0$. 根据文

献 [11], 当 $u(t)=0$ 时, 系统 (1) 是均方渐近稳定的. □

3 主要结果

若转移概率部分未知, 则如下定理给出了保证非强迫系统 (1)($u(t)\equiv 0$) 均方渐近稳定的充分条件:

定理 1 设转移概率 (3) 部分未知, 当 $u(t)=0$ 时, 系统 (1) 均方渐近稳定, 当存在对称正定矩阵 $P_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 使 $\forall i\in\boldsymbol{T}$ 如下 LMIs 成立:

$$(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i)+\mathcal{P}_{\mathcal{K}}^i<0; \tag{11}$$

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+P_j\leqslant 0,\ j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i, j\neq i; \tag{12}$$

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+P_j\geqslant 0,\ \forall j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i, j=i. \tag{13}$$

其中: $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}^i=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i}\pi_{ij}P_j$, $\pi_{\mathcal{K}}^i=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i}\pi_{ij}$.

证明 由引理 2 知, 若式 (10) 成立, 则系统 (1) 均方渐近稳定. 根据 $\sum\limits_{j\in\boldsymbol{T}}\pi_{ij}=0$ 和式 (3), 式 (10) 左边可写为

$$\begin{aligned}\Psi_i=&A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+\sum_{j\in\boldsymbol{T}}\pi_{ij}P_j+\\&\sum_{j\in\boldsymbol{T}}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i)=\\&(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i)+\mathcal{P}_{\mathcal{K}}^i+\\&\sum_{j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+P_j).\end{aligned}$$

若 $\forall j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i$ 且 $i\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i$, 则由式 (11), (12) 和 $\pi_{ij}>0$ ($\forall i,j\in\boldsymbol{T}, j\neq i$) 可知上式中 $\Psi_i<0$. 另一方面, 若 $\forall j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i$ 且 $i\notin\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i$, 则 Ψ_i 可写为如下形式:

$$\begin{aligned}\Psi_i=&(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i)+\mathcal{P}_{\mathcal{K}}^i+\\&\pi_{ii}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+P_i)+\\&\sum_{j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i, j\neq i}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i+P_j).\end{aligned}$$

依据式 (11) ∼ (13) 和 $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}<0$, 可得上式中 $\Psi_i<0$. 因此, 在转移概率 (3) 部分未知的情况下, 如果条件 (11) ∼ (13) 成立, 则当 $u(t)=0$ 时, 系统 (1) 是均方渐近稳定的. □

注 1 若系统 (1) 中 $\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i=\varnothing$, $\forall i\in\boldsymbol{T}$ (即转移概率完全未知), 则条件 (11) 变为 $A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i<0$, 条件 (12) 变为 $A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i\leqslant -P_j$, $\forall j\neq i\in\boldsymbol{T}$, 条件 (13) 变为 $A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i\geqslant -P_i$, $\forall i\in\boldsymbol{T}$. 因此有 $-P_i\leqslant -P_j$, $\forall i\neq j\in\boldsymbol{T}$ 成立, 进而可得 $P_i=P_j$, 即 $P_i=P$. 此时, 条件 (11) ∼ (13) 将退化为 $A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+C_i^{\mathrm{T}}PC_i=-P<0$.

下面在定理 1 的基础上, 分别设计状态反馈控制器 (5) 和静态输出反馈控制器(6), 给出保证系统 (1) 的闭环系统 (7) 和 (8) 均方渐近稳定的充分性条件.

定理 2 设转移概率 (3) 部分未知, 闭环系统 (7) 均方渐近稳定, 当存在对称正定矩阵 $X_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 矩阵 $Y_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$, 使 $\forall i\in\boldsymbol{T}$ 如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix}(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)\Sigma_{1i}+\pi_{ii}X_i & (1+\pi_{\mathcal{K}}^i)\Sigma_{2i}^{\mathrm{T}} & (\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^i)^{\mathrm{T}}\\ * & -(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)X_i & 0\\ * & * & -\mathcal{N}_{\mathcal{K}}^i\end{bmatrix}<0,\quad i\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i; \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix}(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)\Sigma_{1i} & (1+\pi_{\mathcal{K}}^i)\Sigma_{2i}^{\mathrm{T}} & (\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^i)^{\mathrm{T}}\\ * & -(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)X_i & 0\\ * & * & -\mathcal{N}_{\mathcal{K}}^i\end{bmatrix}<0,\ i\notin\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i; \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_{1i} & \Sigma_{2i}^{\mathrm{T}} & X_i\\ * & -X_i & 0\\ * & * & -X_j\end{bmatrix}\leqslant 0,\ j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i, j\neq i; \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_{1i}+X_j & \Sigma_{2i}^{\mathrm{T}}\\ * & -X_i\end{bmatrix}\geqslant 0,\ j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i, j=i. \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Sigma_{1i}=X_iA_i^{\mathrm{T}}+A_iX_i+Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iY_i,\\&\Sigma_{2i}=C_iX_i+D_iY_i,\\&\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^i=[\sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_1^i}}X_i,\sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_2^i}}X_i,\cdots,\sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_m^i}}X_i]^{\mathrm{T}},\\&\mathcal{N}_{\mathcal{K}}^i=\mathrm{diag}\{X_{\mathcal{K}_1^i},X_{\mathcal{K}_2^i},\cdots,X_{\mathcal{K}_m^i}\},\end{aligned}$$

“$*$”表示对称位置上的转置矩阵 (下文同). 若 LMIs (14) ∼ (17) 有解, 则状态反馈控制增益矩阵为 $K_i=Y_iX_i^{-1}$.

证明 针对闭环系统 (7), 利用 $A_i+B_iK_i$ 和 $C_i+D_iK_i$ 替换定理 1 中的式 (11) ∼ (13) 的 A_i 和 C_i, 可得

$$\begin{aligned}&(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)((A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}P_i+P_i(A_i+B_iK_i)+\\&(C_i+D_iK_i)^{\mathrm{T}}P_i(C_i+D_iK_i))+\mathcal{P}_{\mathcal{K}}^i<0;\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&(A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}P_i+P_i(A_i+B_iK_i)+(C_i+D_iK_i)^{\mathrm{T}}\times\\&P_i(C_i+D_iK_i)+P_j\leqslant 0,\ \forall j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i, j\neq i;\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&(A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}P_i+P_i(A_i+B_iK_i)+(C_i+D_iK_i)^{\mathrm{T}}\times\\&P_i(C_i+D_iK_i)+P_j\geqslant 0,\ \forall j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{UK}}^i, j=i.\end{aligned} \tag{20}$$

令 $X_i=P_i^{-1}$, 在式 (18) ∼ (20) 两边同乘 X_i, 并令 $Y_i=K_iX_i$, 得

$$\begin{aligned}&(1+\pi_{\mathcal{K}}^i)(X_iA_i^{\mathrm{T}}+A_iX_i+Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iY_i+\\&(C_iX_i+D_iY_i)^{\mathrm{T}}X_i^{-1}(C_iX_i+D_iY_i))+\\&\sum_{j\in\boldsymbol{T}_{\mathcal{K}}^i}\pi_{ij}X_iX_j^{-1}X_i<0;\end{aligned} \tag{21}$$

$$X_iA_i^{\mathrm{T}}+A_iX_i+Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iY_i+$$

$$(C_iX_i+D_iY_i)^{\mathrm T}X_i^{-1}(C_iX_i+D_iY_i)+$$
$$X_iX_j^{-1}X_i\leqslant 0,\ \forall j\in \boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}},j\neq i;\tag{22}$$
$$X_iA_i^{\mathrm T}+A_iX_i+Y_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+B_iY_i+X_j+$$
$$(C_iX_i+D_iY_i)^{\mathrm T}X_i^{-1}(C_iX_i+D_iY_i)\geqslant 0,$$
$$\forall j\in \boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}},j=i.\tag{23}$$

根据 Schur 补引理, 式 (21) 在 $i\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K}$ 时等价于式 (14), 在 $i\notin\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K}$ 时等价于式 (15). 此外, 由 Schur 补引理知式 (15) 和 (17) 分别与式 (22) 和 (23) 等价. 因此, 若式 (14) ～(17) 成立, 则式 (18)～(20) 成立. 根据定理 1 可知, 闭环系统 (7) 是均方渐近稳定的. □

定理 3　设转移概率 (3) 部分未知, 闭环系统 (8) 是均方渐近稳定的, 当存在对称正定矩阵 $X_{11i}\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$, $X_{22i}\in\boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, 矩阵 $Z_i\in\boldsymbol{R}^{m\times p}$, 使 $\forall i\in\boldsymbol{T}$ 如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix}(1+\pi^i_{\mathcal K})\varOmega_{1i}+\pi_{ii}X_i & (1+\pi^i_{\mathcal K})\varOmega_{2i}^{\mathrm T} & (\mathcal{M}^i_{\mathcal K})^{\mathrm T}\\ * & -(1+\pi^i_{\mathcal K})X_i & 0\\ * & * & -\mathcal{N}^i_{\mathcal K}\end{bmatrix}<0,$$
$$i\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K};\tag{24}$$

$$\begin{bmatrix}(1+\pi^i_{\mathcal K})\varOmega_{1i} & (1+\pi^i_{\mathcal K})\varOmega_{2i}^{\mathrm T} & (\mathcal{M}^i_{\mathcal K})^{\mathrm T}\\ * & -(1+\pi^i_{\mathcal K})X_i & 0\\ * & * & -\mathcal{N}^i_{\mathcal K}\end{bmatrix}<0,$$
$$i\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K};\tag{25}$$

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{1i} & \varOmega_{2i}^{\mathrm T} & X_i\\ * & -X_i & 0\\ * & * & -X_j\end{bmatrix}\leqslant 0,\ j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}},j\neq i;\tag{26}$$

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{1i}+X_j & \varOmega_{2i}^{\mathrm T}\\ * & -X_i\end{bmatrix}\geqslant 0,\ j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}},j=i.\tag{27}$$

其中: $\mathcal{M}^i_{\mathcal K}$ 和 $\mathcal{N}^i_{\mathcal K}$ 如定理 2 中所定义, 而

$$\varOmega_{1i}=X_iA_i^{\mathrm T}+A_iX_i+E_i^{\mathrm T}Z_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+B_iZ_iE_i,$$
$$\varOmega_{2i}=C_iX_i+D_iZ_iE_i,\ X_i=V_i\begin{bmatrix}X_{11i} & 0\\ 0 & X_{22i}\end{bmatrix}V_i^{\mathrm T},$$

V_i 如式 (9) 所定义. 若 LMIs (24)～(27) 有解, 则静态输出反馈控制增益矩阵为 $F_i=Z_iU_iS_iX_{11i}S_i^{-1}U_i^{\mathrm T}$, 其中 U_i 和 S_i 如式 (9) 所定义.

证明　针对闭环系统 (8), 利用 $A_i+B_iF_iE_i$ 和 $C_i+D_iF_iE_i$ 替换定理 1 中 LMIs (11)～(13) 中的 A_i 和 C_i, 得

$$(1+\pi^i_{\mathcal K})((A_i+B_iF_iE_i)^{\mathrm T}P_i+P_i(A_i+B_iF_iE_i)+$$
$$(C_i+D_iF_iE_i)^{\mathrm T}P_i(C_i+D_iF_iE_i))+\mathcal{P}^i_{\mathcal K}<0;\tag{28}$$
$$(A_i+B_iF_iE_i)^{\mathrm T}P_i+P_i(A_i+B_iF_iE_i)+$$
$$(C_i+D_iF_iE_i)^{\mathrm T}P_i(C_i+D_iF_iE_i)+P_j\leqslant 0,$$
$$\forall j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}},j\neq i;\tag{29}$$
$$(A_i+B_iF_iE_i)^{\mathrm T}P_i+P_i(A_i+B_iF_iE_i)+$$
$$(C_i+D_iF_iE_i)^{\mathrm T}P_i(C_i+D_iF_iE_i)+P_j\geqslant 0,$$
$$\forall j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal{UK}},j=i.\tag{30}$$

令 $X_i=P_i^{-1}$, 在式 (28) 两边同乘 X_i, 得

$$(1+\pi^i_{\mathcal K})(X_iA_i^{\mathrm T}+A_iX_i+X_i^{\mathrm T}E_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+$$
$$B_iF_iE_iX_i+(C_iX_i+D_iF_iE_iX_i)^{\mathrm T}X_i^{-1}(C_iX_i+$$
$$D_iF_iE_iX_i))+\sum_{j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K}}\pi_{ij}X_iX_j^{-1}X_i<0.\tag{31}$$

假设

$$X_i=V_i\begin{bmatrix}X_{11i} & 0\\ 0 & X_{22i}\end{bmatrix}V_i^{\mathrm T},$$

则根据引理 1, 存在 $W_i\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$ 满足 $E_iX_i=W_iE_i$, 故式 (31) 可写为

$$(1+\pi^i_{\mathcal K})(X_iA_i^{\mathrm T}+A_iX_i+E_i^{\mathrm T}W_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+B_iF_iW_iE_i+$$
$$(C_iX_i+D_iF_iW_iE_i)^{\mathrm T}X_i^{-1}(C_iX_i+D_iF_iW_iE_i))+$$
$$\sum_{j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K}}\pi_{ij}X_iX_j^{-1}X_i<0.\tag{32}$$

定义 $Z_i=F_iW_i$, 则式 (32) 转化为

$$(1+\pi^i_{\mathcal K})(X_iA_i^{\mathrm T}+A_iX_i+E_i^{\mathrm T}Z_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+B_iZ_iE_i+$$
$$(C_iX_i+D_iZ_iE_i)^{\mathrm T}X_i^{-1}(C_iX_i+D_iZ_iE_i))+$$
$$\sum_{j\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K}}\pi_{ij}X_iX_j^{-1}X_i<0.\tag{33}$$

根据 Schur 补引理, 式 (33) 在 $i\in\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K}$ 时等价于式 (24), 在 $i\notin\boldsymbol{T}^i_{\mathcal K}$ 时等价于式 (25). 同理, 可以证明若式 (26) 和 (27) 成立, 则式 (29) 和 (30) 成立. 由定理 1 知, 闭环系统 (8) 是均方渐近稳定的. 进一步, 根据引理 1, 静态输出反馈控制增益矩阵为

$$F_i=Z_iW_i^{-1}=Z_iU_iS_iX_{11i}S_i^{-1}U_i^{\mathrm T}.$$ □

4　数值仿真

考虑三维四模态的随机 Markov 跳跃系统 (1), 系统参数如下:

$$A_1=\begin{bmatrix}0.3 & 0.4 & 0.6\\ -0.4 & 0.8 & 0\\ 0.3 & -0.6 & 0.9\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0.6 & 0.9 & 1.4\\ 0.4 & 1 & 0.9\\ 0.5 & 0.9 & 0.3\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.5\\ 0.3 & 0.5 & 0\\ 0.4 & 0.6 & 0.8\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.4\\ 0.1 & 0.6 & 0.9\\ 0.8 & 0.1 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}-0.3 & 0\\ 0.4 & -0.5\\ 0.4 & 0.9\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0 & -0.8\\ 0.3 & 0.6\\ 0 & 0.4\end{bmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.6 & 0.5\\ 0.3 & 1\end{bmatrix},\ B_4=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\\ 0.9 & 0.8\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0.5&0.3&0.4\\0.2&-0.5&0.2\\-0.8&0.4&0.3\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}0.2&0.4&0.3\\0.5&0.4&-0.1\\0.3&0.4&1.5\end{bmatrix},$$

$$C_3=\begin{bmatrix}0.3&0.4&0.5\\0.3&0.5&0.5\\1&0.1&0.6\end{bmatrix},\ C_4=\begin{bmatrix}0.3&0.3&0.1\\0.1&0.4&0.7\\0.4&0.2&-0.4\end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix}0.4&0.2\\0.2&0.3\\0.2&0.5\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}-0.2&0.8\\0.7&0.1\\0.5&0\end{bmatrix},$$

$$D_3=\begin{bmatrix}0.5&0.4\\0.4&0.4\\0.3&0.2\end{bmatrix},\ D_4=\begin{bmatrix}0.3&0.1\\1.1&0.4\\0&0.1\end{bmatrix}.$$

系统 (1) 的转移概率矩阵如表 1 所示, 表 1 括号内的数值表示在控制器设计过程中未知的转移概率.

表 1 部分未知的转移概率矩阵 Π

	1	2	3	4
1	−0.5	0.2	0.1	0.2
2	(0.4)	−0.8	(0.2)	0.2
3	0.5	(0.2)	(−0.9)	0.2
4	0.4	0.1	0.1	−0.6

通过求解定理 2 中的 LMIs (14) ∼ (17), 可得状态反馈控制增益矩阵如下:

$$K_1=\begin{bmatrix}4.0997&-5.1321&4.3819\\-3.9704&3.0841&-5.9858\end{bmatrix},$$

$$K_2=\begin{bmatrix}-2.2054&-2.0112&-2.1405\\-2.9506&-5.9682&-5.8825\end{bmatrix},$$

$$K_3=\begin{bmatrix}-1.4178&-1.6952&-0.0913\\-0.3463&0.3110&-1.5836\end{bmatrix},$$

$$K_4=\begin{bmatrix}5.6241&1.4901&2.8825\\-13.7386&-7.4620&-10.1529\end{bmatrix}.$$

在转移概率矩阵 Π 下, 随机 Markov 跳跃系统 (1) 的模式变化折线如图 1 所示.

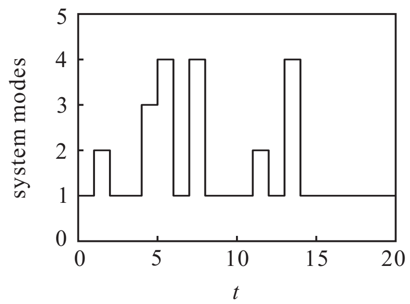

图 1 随机 Markov 跳跃系统 (1) 的模式变化折线

设初始条件为 $x(0)=[0.2\ \ 0.3\ \ -0.4]^{\mathrm{T}}$, $r(0)=1$, 则系统 (1) 的状态响应曲线如图 2 所示. 容易看出, 即使转移概率矩阵 Π 部分未知, 文中设计的状态反馈控制器依然可以使相应的闭环系统达到均方渐近稳定.

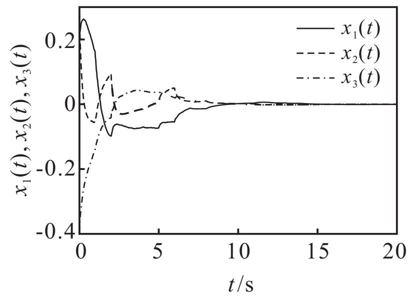

图 2 随机 Markov 跳跃系统 (1) 的状态响应曲线

5 结 论

本文针对一类随机 Markov 跳跃系统, 在转移概率部分未知的情况下, 研究了其稳定性和镇定控制问题, 给出了保证其均方渐近稳定的充分性条件, 并提供了模式依赖的状态反馈与静态输出反馈控制器的设计方法. 利用文中的方法, 可以对转移概率部分未知的随机 Markov 跳跃系统的 H_∞ 控制和滤波问题进行深入的研究.

参考文献(References)

[1] Krasovskii N N, Lidskii E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes, Parts I-III[J]. Automation and Remote Control, 1961, 22(1/2/3): 1021-1025, 1141-1146, 1289-1294.

[2] Boukas E K, Liu Z K, Liu G X. Delay-dependent robust stability and H_∞ control of jump linear systems with time-delay[J]. Int J of Control, 2001, 74(4): 329-340.

[3] Souza C. Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time Markovian jump linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 836-841.

[4] Goncalves A, Fioravanti A, Geromel J. H_∞ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 546: 1347-1351.

[5] Zhang L, Boukas E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(2): 463-468.

[6] Zhang L, Boukas E K. Mode-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1462-1467.

[7] Zhang W, Xie L. Interval stability and stabilization of linear stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(4): 810-815.

[8] Mao X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1999, 79(1): 45-67.

(下转第1725页)