

文章编号: 1001-0920(2011)11-1757-04

分数阶系统变阶次状态空间建模及稳定理论

秦昌茂, 齐乃明, 朱 凯

(哈尔滨工业大学 航天工程系, 哈尔滨 150001)

摘要: 结合分数阶微积分算子的叠加原理, 提出了变阶次状态空间建模方法. 将分数阶系统推广到状态空间领域, 实现了最小阶状态空间转换, 并可根椐实际需要通过增加状态变量来提取某一阶次的输出信号. 对于各阶次均小于 1 的变阶次状态空间实现的分数阶系统, 提出了变阶次分数阶系统的稳定性判定定理. 最后通过实例仿真验证了所提出方法的有效性.

关键词: 分数阶系统; 变阶次; 状态空间建模; 稳定理论

中图分类号: TP273

文献标识码: A

State space modeling and stability theory of variable fractional order system

QIN Chang-mao, QI Nai-ming, ZHU Kai

(Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: QIN Chang-mao, E-mail: 1011820111@163.com)

Abstract: A variable order of state space modeling method is proposed by combining the principle of superposition of fractional calculus operator. And the fractional order system is extended to the state space area and the minimum-order state-space conversion is achieved. An order of the output signal is extracted through increasing state variables based on actual needs. For the variable order of state space realization of fractional order systems where each order is less than 1, the stability theorem is given for the variable fractional order system. Finally, simulation results show the effectiveness of the method.

Key words: fractional order system; variable order; state space modeling; the stability theorem

1 引言

作为控制科学与工程中的一个新的研究领域, 分数阶控制理论的研究愈来愈受关注^[1]. 对于现实中的各种实际系统, 分数阶模型描述比整数阶模型更准确, 从而为一些动态过程的描述提供了很好的工具^[2]. 对于分数阶系统, 分数阶控制器能更好地体现其优点^[2]. 便于工程应用的分数阶 PID 控制器设计方法^[3-5]主要有 Z-N 法、极点配置法、频率法和 ITAE 指标最优法等, 均是基于分数阶系统的传递函数模型进行设计的, 而将分数阶系统理论推广到状态空间领域的研究尚比较少见. 文献 [6] 推导了分数阶系统的状态空间法建模, 需要提取分数阶导数项分母的最小公倍数, 从而使其在实际应用中受到限制. 文献 [7] 推导了基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定性理论, 但该理论仅适用于定常阶次的分数阶状态空间模型.

本文结合分数阶微积分算子的叠加原理^[8], 提出了变阶次状态空间建模方法. 该方法可实现分数阶系统最小阶状态空间建模, 解决了分数阶导数项分母最小公倍数较小必将导致状态变量显著增加的问题. 针对变阶次分数阶系统, 对定常阶次的分数阶系统稳定性理论加以推广, 提出了变阶次分数阶系统的稳定性判定定理. 分数阶系统变阶次状态空间建模及稳定理论, 有利于整数阶状态空间理论在分数阶系统中的推广应用.

2 分数阶系统变阶次状态空间实现

2.1 分数阶微积分

分数阶微积分有 3 种常见的定义, 包括 Grunwald-Letnikov 定义、Riemann-Liouville 定义和 Caputo 定义. 其中前两者定义是等效的, 且对常数求导是无界的, 而 Caputo 定义对常数求导为 0, 且更适用于分数阶微

收稿日期: 2010-07-15; 修回日期: 2010-12-28.

作者简介: 秦昌茂(1985-), 男, 博士, 从事高超声速飞行器制导与控制的研究; 齐乃明(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事航天器飞行动力学控制与仿真等研究.

分方程初值问题的描述.

Caputo 分数微积分定义如下:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 且 a 为初值. 伽马函数 $\Gamma(z)$ 定义如下:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

一般可以假设零初始条件, 即令 $a=0$, 这时可以将微积分算子简记为 D^α .

分数阶微积分算子满足交换律及叠加原理^[8]

$$D^\alpha(D^\beta f(t)) = D^\beta(D^\alpha f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2)$$

2.2 分数阶微分系统

分数阶线性定常微分方程一般形式如下:

$$a_n D^{p_n} y(t) + \dots + a_1 D^{p_1} y(t) + a_0 y(t) = u(t), \quad (3)$$

其中 $p_n > p_{n-1} > \dots > p_1 \geq 0$.

对方程进行拉氏变换, 并设 $y(t)$ 的各阶导数初始条件均为 0, 可得传递函数

$$G(s) = \frac{1}{a_n s^{p_n} + a_{n-1} s^{p_{n-1}} + \dots + a_1 s^{p_1} + a_0}. \quad (4)$$

2.3 变阶次状态空间建模

考虑分数阶微分方程

$$\begin{aligned} D^{p_n} x(t) + a_{n-1} D^{p_{n-1}} x(t) + \dots + \\ a_1 D^{p_1} x(t) + a_0 x(t) = u(t). \end{aligned} \quad (5)$$

对于上述分数阶系统, 结合分数阶微积分算子的叠加原理, 定义状态变量如下:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), \\ x_2(t) = D^{r_1} x_1(t) = D^{r_1} x(t), \\ x_3(t) = D^{r_2} x_2(t) = D^{r_2+r_1} x(t), \\ \vdots \\ x_{n+1}(t) = D^{r_n} x_n(t) = D^{r_n+\dots+r_1} x(t). \end{cases} \quad (6)$$

其中 $r_i (i=1, 2, \dots, n)$ 满足

$$\sum_{i=1}^n r_i = p_k, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

则系统的状态方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} D^{r_1} x_1(t) \\ D^{r_2} x_2(t) \\ \vdots \\ D^{r_n} x_n(t) \end{bmatrix} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (8)$$

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T,$$

$$x(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad \dots \quad x_n(0)]^T.$$

其中

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0],$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由推导过程可以看出, 该方法无需提取分数阶微积分项分母的最小公倍数, 便可以实现任意阶次的状态空间建模, 而且变阶次状态空间建模可根据实际需要建立 m 阶模型 ($m \geq n$, n 为最小阶状态空间实现) 来提取某一阶次的输出信号.

3 变阶次分数阶系统稳定理论

对于定常阶次的分数阶状态空间自治系统

$$D^r x(t) = Ax(t), \quad (9)$$

文献[7]提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶稳定性判定定理.

引理 1 对于分数阶系统(9), 当阶次 $r < 1$ 时, 如果系统的系数矩阵 A 满足 Lyapunov 方程, 即存在实对称正定矩阵 P , 半正定矩阵 Q , 使得 $A^T P + PA = -Q$ 对于任意的状态变量 $x(t)$ 恒成立, 则分数阶系统(9)渐近稳定.

文献[7]中给出了详细的证明过程, 从证明过程可以得出, 引理 1 同样适用于变阶次分数阶系统. 因为分数阶系统(9)是定常阶次的, 所以引理 1 的实际使用并不方便. 因此, 本文基于引理 1 进一步给出如下形式简洁的变阶次分数阶系统稳定性判定定理:

定理 1 对于变阶次分数阶自治系统

$$\begin{bmatrix} D^{r_1} x_1 \\ D^{r_2} x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n} x_n \end{bmatrix} x(t) = Ax(t), \quad (10)$$

当系统各阶次 $r_i < 1$ 时, 如果存在实对称正定矩阵 P , 使得如下方程恒成立:

$$J = x^T P \begin{bmatrix} D^{r_1} x_1 \\ D^{r_2} x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n} x_n \end{bmatrix} \leq 0, \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T,$$

则分数阶系统(10)渐近稳定.

证明 设 $A^T P + PA = -Q$ 成立, 则分数阶系统(10)稳定, 即

$$x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x. \quad (11)$$

因为 Q 为半正定矩阵, 所以

$$x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x \leq 0. \quad (12)$$

将系统 (10) 代入式 (12) 可得

$$\begin{bmatrix} D^{r_1}x_1 \\ D^{r_2}x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n}x_n \end{bmatrix}^T Px + x^T P \begin{bmatrix} D^{r_1}x_1 \\ D^{r_2}x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n}x_n \end{bmatrix} \leq 0. \quad (13)$$

设实对称正定矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

则

$$\begin{bmatrix} D^{r_1}x_1 \\ D^{r_2}x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n}x_n \end{bmatrix}^T Px + x^T P \begin{bmatrix} D^{r_1}x_1 \\ D^{r_2}x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n}x_n \end{bmatrix} \leq 0. \quad (14)$$

展开可得

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i D^{r_j}x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j D^{r_i}x_i \leq 0. \quad (15)$$

因为 $a_{ij} = a_{ji}$, 所以

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i D^{r_j}x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j D^{r_i}x_i = \\ & 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i D^{r_j}x_j = \\ & 2x^T P \begin{bmatrix} D^{r_1}x_1 \\ D^{r_2}x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n}x_n \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} D^{r_1}x_1 \\ D^{r_2}x_2 \\ \vdots \\ D^{r_n}x_n \end{bmatrix}^T P x \leq 0. \quad (16) \end{aligned}$$

将上述过程反推亦可证明引理 1 成立. 因此, 对于变阶次分数阶自治系统, 引理 1 与定理 1 等价. \square

定理 1 将传统整数阶系统的稳定性判定定理推广到变阶次分数阶系统, 并将分数阶系统理论推广到了状态空间领域. 基于该理论, 可借鉴传统整数阶 Lyapunov 函数构造方法构造 J 函数.

4 数值仿真

考虑一个复杂分数阶系统

$$G(s) = \frac{1}{s^{3.2} + 2.5s^{2.5} + 4.2s^{2.1} + 4.6s^{1.5} + 2.5s^{0.8} + 1.5}. \quad (17)$$

如果采用分数导数项分母的最小公倍数进行状态空间实现^[6], 则由于分数导数项分母的最小公倍数为 0.1, 转换后的系统为 32 阶复杂系统. 采用变阶次状态空间实现, 则只需转化为 5 阶系统. 系统 (17) 可以转化为

$$\begin{bmatrix} D^{0.8}x_1(t) \\ D^{0.7}x_2(t) \\ D^{0.6}x_3(t) \\ D^{0.4}x_4(t) \\ D^{0.7}x_5(t) \end{bmatrix} = Ax(t) + Bu(t). \quad (18)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.5 & -2.5 & -4.6 & -4.2 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t)]^T,$$

$$x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

在 $u(t) = 0$ 时, 原系统为自治系统, 可利用定理 1 判定该系统的稳定性. 取 Q 为单位阵, 则存在实对称正定矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 30.2795 & -0.5 & -16.4863 \\ -0.5 & 16.4863 & -0.5 \\ -16.4863 & -0.5 & 12.0271 \\ 0.5 & -12.0271 & -0.5 \\ 12.0271 & 0.5 & -11.0981 \\ & 0.5 & 12.0271 \\ & -12.0271 & 0.5 \\ \leftarrow & -0.5 & -11.0981 \\ & 11.0981 & -0.5 \\ & -0.5 & 13.7442 \end{bmatrix}$$

使得 $A^T P + PA = -Q$ 成立, 因此系统 (17) 为渐近稳定系统.

对于系统 (17), 分别采用传递函数及变阶次状态空间建模仿真, 阶跃响应结果如图 1 和图 2 所示. 由图 1 可以看出, 两种方法的建模仿真输出结果几乎完全重合. 图 2 给出了变阶次状态空间建模下其他状态变量的输出值, 可以看出, 变阶次状态空间建模不但实现了低阶转换, 同时可以求出各个状态变量, 而且根据实际需要, 在建立模型过程中可通过增加状态变量来提取某一阶次的输出信号.

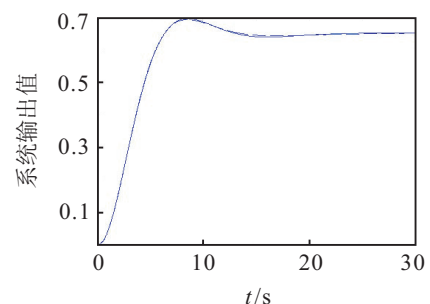


图 1 系统输出值比较

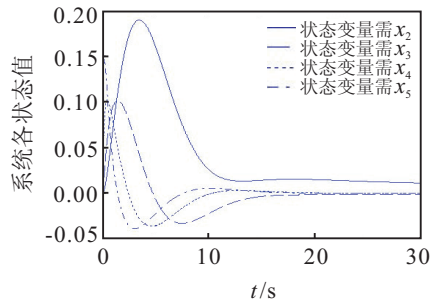


图 2 系统各状态输出值

5 结 论

本文首先结合分数阶微积分算子的叠加原理,提出了变阶次状态空间建模方法,该方法可实现最小阶分数阶系统状态空间模型转换,而且可通过增加状态变量来提取某一特定阶次的输出信号;然后针对所建立的变阶次分数阶系统状态空间模型,提出了变阶次分数阶系统的稳定性判定定理,并通过实例仿真验证了该理论的有效性。

参考文献(References)

- [1] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 162-169.
(Zhu C X, Zou Y. Summary of research on fractional-order control[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 162-169.)
- [2] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶PID控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771-776.
(Xue D Y, Zhao C N. Fractional order PID controller design for fractional order system[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(5): 771-776.)
- [3] Valerio D, Sa da Costa J. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules[J]. Signal Processing, 2006(86): 2771-2784.
- [4] Concepcion A M, Blas M V, Feliu V, et al. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications[J]. Control Engineerin Practice, 2008(16): 798-812.
- [5] Xue Dingyu, Zhao Chunna, Chen Yangquan. Fractional order PID control of a DC-motor with elastic shaft: A case study[C]. Proc of the 2006 American Control Conf. Minneapolis, 2006: 3182-3187.
- [6] 王振滨, 曹广益. 分数微积分的两种建模方法[J]. 系统仿真学报, 2004, 16(4): 810-812.
(Wang Z B, Cao G Y. Two system modeling methods using fractional calculus[J]. J of System Simulation, 2004, 16(4): 810-812.)
- [7] 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 基于Lyapunov方程的分数阶混沌系统同步[J]. 物理学报, 2008, 57(12): 7522-7526.
(Hu J B, Han Y, Zhao L D. Synchronizing fractional chaotic systems based on Lyapunov equation[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(12): 7522-7526.)
- [8] Podlubny I, Petras I, Vinagre B M, et al. Analogue realizations of fractional-order controllers[J]. Nonlinear Dynamics, 2002(29): 281-296.
- [9] 杨强大, 王福利, 常玉清. 基于改进BP神经网络的菌体浓度软测量[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 869-873.
(Yang Q D, Wang F L, Chang Y Q. Soft sensor of biomass based on improved BP neural network[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 869-873.)
- [10] 周云龙, 柳长昕, 赵鹏, 等. 基于自回归-连续隐马尔可夫模型的离心泵故障诊断[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(20): 88-93.
(Zhou Y L, Liu C X, Zhao P, et al. Fault diagnosis methods for centrifugal pump based on autoregressive and continuous hidden Markov model[J]. Proc of the CSEE, 2008, 28(20): 88-93.)
- [11] Desai K, Badhe Y, Tambe S S, et al. Soft-sensor development for fed-batch bioreactors using support vector regression[J]. Biochemical Engineering J, 2006, 27(3): 225-239.
- [12] Rabiner L R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition[J]. Proc of the IEEE, 1989, 77(2): 257-286.
- [13] Liu G H, Zhou D W, Xu H X, et al. Model optimization of SVM for a fermentation soft sensor[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(4): 2708-2713.
- [14] Juang B H, Katagiri S. Discriminative learning for minimum error classification[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1993, 40(12): 3043-3054.
- [15] Mahvash A, Ross A. Application of CHMMs to two-phase flow pattern identification[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2008, 21(8): 1144-1152.
- [16] Hazen T J, Margolis A. Discriminative feature weighting using MCE training for topic identification of spoken audio recordings[C]. Proc ICASSP. Las Vegas, 2008: 4965-4968.
- [17] Abdulla W H, Kasabov N. Reduced feature-set based parallel CHMM speech recognition systems[J]. Information Sciences, 2003, 156(1/2): 21-38.
- [18] Zhu K, Wong Y S, Hong G S. Multi-category micro-milling tool wear monitoring with continuous hidden Markov models[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(2): 547-560.

(上接第1756页)