

文章编号: 1001-0920(2011)12-1851-04

基于不确定知识的粒子群优化算法

梅从立, 刘国海

(江苏大学 电气信息工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 针对标准粒子群优化算法(PSO)速度更新方程存在随机参数, 使得粒子获取知识存在不完备性的问题, 将不确定知识引入 PSO 算法中, 并对个体知识、群体知识和不确定知识随机参数进行了归一化, 保证算法在每一步演化中都能获得完备知识. 理论分析给出了 PSO-UK 算法局部收敛参数条件, 并证明了其具有全局优化性能. 经典测试函数实验表明, 所提出的 PSO-UK 算法具有全局搜索能力, 且局部收敛精度明显优于 PSO 算法.

关键词: 粒子群优化算法; 不确定知识; 收敛性分析

中图分类号: TP301

文献标识码: A

Particle swarm optimization based on uncertain knowledge

MEI Cong-li, LIU Guo-hai

(School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China. Correspondent: MEI Cong-li, E-mail: clmei@ujs.edu.cn)

Abstract: Basic particle swarm optimization(PSO) algorithm only depends on individual and social cognition, but the cognitive part of PSO is uncertain for random behavior of cognitive factors. Therefore, uncertain knowledge is introduced to the basic PSO to improve the knowledge structure of each particle. Random cognitive factors normalization is also considered in the PSO-UK algorithm to ensure complete knowledge for the PSO-UK algorithm. Theoretical analysis and simulations show that the PSO-UK algorithm has the performance of global convergence and better precision value of local convergence than the basic PSO.

Key words: particle swarm optimization algorithm; uncertain knowledge; convergence analysis

1 引言

标准粒子群优化算法(PSO)是基于群体智能的进化优化技术, 具有收敛速度快、计算简单、所需参数少、易于实现等优点, 是当前进化计算研究的热点之一. 但 PSO 算法在演化过程中容易陷入局部最优值, 进而导致早熟问题. 为了克服这一缺陷, 相关学者已提出了多种改进算法, 最有代表性的研究工作是在 PSO 基础上, 根据 PSO 参数特性和实际应用背景, 开展 PSO 参数选择策略^[1-2]、PSO 与其他算法混合策略^[3-7]、控制种群多样性策略^[8]等研究. 这些改进策略在一定程度上提高了 PSO 算法的全局搜索能力, 但仍是在 PSO 算法框架下根据粒子个体和群体认知向最优解方向飞行, 难以从本质上克服早熟问题.

通过分析发现, PSO 优化过程仅依靠个体和群体认识, 而且由于速度更新方程存在随机参数, 粒子获

取知识具有不确定性和不完备性. 鉴于此, 本文提出了一种基于不确定知识的粒子群优化算法(PSO-UK). 将不确定知识引入到 PSO 算法中, 并对个体知识、群体知识和不确定知识随机参数进行归一化, 使得粒子在每一步演化中都能获得完备的知识. 较小不确定性知识可以增强 PSO 算法局部搜索能力, 较大不确定性知识可以增强 PSO 算法全局搜索能力. PSO-UK 算法保留了 PSO 算法简洁、易于实现等优点. 理论推导和典型测试函数实验表明, 本文所提出的 PSO-UK 算法具有全局搜索能力, 且局部收敛精度明显优于 PSO 算法, 也优于国内外一些较新的 PSO 改进算法.

2 标准 PSO 算法

PSO 算法的基本思想是: 通过模拟自然界生物的群体行为, 构造解的随机优化算法. 设在 D 维空间中,

收稿日期: 2010-07-16; 修回日期: 2010-11-15.

基金项目: 中国博士后基金项目(20090451171); 江苏高校自然科学基金项目(08KJD510011); 江苏大学高级人才科研启动基金项目(08JGD017); 江苏高校优势学科建设工程项目(苏政办发(2011)6号).

作者简介: 梅从立(1978—), 男, 讲师, 博士, 从事智能计算、信号检测与故障诊断的研究; 刘国海(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统优化与控制等研究.

有 m 个粒子组成一个群落, 其中第 i 个粒子的位置为 $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}]^T$, 速度为 $v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD}]^T$, $i = 1, 2, \dots, m$. 第 i 个粒子搜索到的历史最优位置为 x_i^* , 整个粒子群搜索到的最优位置为 x^* . PSO 算法通过下式进行寻优操作:

$$v_i^{k+1} = wv_i^k + c_1r_1(x_i^* - x_i^k) + c_2r_2(x^* - x_i^k), \quad (1)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1}. \quad (2)$$

其中: w 为惯性权重, c_1 和 c_2 为加速系数, r_1 和 r_2 为 $[0,1]$ 内的随机数.

3 PSO-UK 算法

3.1 PSO-UK 算法基本思想

由 PSO 算法可以看出, 单个粒子在运动过程中不仅从自身个体, 而且从群体行为中学习经验、获取信息. 但获取信息的过程均以最优个体为学习对象. 在 PSO 算法中, 将知识局限在个体学习知识和群体知识中. 但当式 (1) 中 r_1 和 r_2 的取值都比较小时, 粒子从个体行为和群体行为中获得的经验信息也较少, 主要依靠惯性“飞行”, 带有一定的“盲目性”, 此时粒子认知具有不确定性特点. 在缺少认知的情况下, 搜索空间中的任意一点都有可能是粒子飞行的目标, 以空间中任意一点为目标的粒子飞行行为可以理解为不确定知识. 本文在 PSO 算法的基础上, 引入这样的不确定知识以完善粒子知识结构的构成, 从而将粒子知识结构设计成由个体认知、社会认知和不确定性知识 3 部分组成. 基于上述思想的改进 PSO 算法称为基于不确定性知识的 PSO-UK 算法, 其演化公式可以表述为

$$v_i^{k+1} = wv_i^k + c_1l_1(x_i^* - x_i^k) + c_2l_2(x^* - x_i^k) + c_3l_3(C_D - x_i^k), \quad (3)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1}. \quad (4)$$

其中

$$l_1 = r_1/(r_1 + r_2 + r_3),$$

$$l_2 = r_2/(r_1 + r_2 + r_3),$$

$$l_3 = r_3/(r_1 + r_2 + r_3),$$

r_1, r_2, r_3, r_4 为 $[0,1]$ 之间的随机数; c_1, c_2, c_3 为加速系数; $C_D = \text{sgn}(r_4 - 0.5)\text{limit} + p_c$ 为粒子不确定性知识的边界, sgn 为符号函数, 表示粒子在不确定知识下飞行方向的不确定性, limit 为搜索空间边界到中心的距离, p_c 为搜索空间中心.

3.2 PSO 算法与 PSO-UK 算法对比分析

定理 1 (PSO 算法局部收敛性能) 当 $0 < w < 1$ 时, 如果存在 $0 < r_1 + r_2 < 2(w + 1)$, 则标准 PSO 算法是局部收敛的^[9].

下面对 PSO-UK 算法局部收敛性能进行分析. 定义

$$\varphi_1 = c_1l_1, \varphi_2 = c_2l_2, \varphi_3 = c_3l_3,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \rho = (\varphi_1x_i^* + \varphi_2x^* + \varphi_3C_D)/\varphi.$$

则式 (3) 和 (4) 写成差分方程形式为

$$v_i(k+1) = wv_i(k) + \varphi(\rho - x_i(k)), \quad (5)$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k+1). \quad (6)$$

令

$$y_i(k) = \rho - x_i(k),$$

$$P_k = \begin{bmatrix} v_i(k) \\ y_i(k) \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} w & \varphi \\ -w & 1 - \rho \end{bmatrix},$$

则式 (5) 和 (6) 可以改写为

$$P_{k+1} = MP_k. \quad (7)$$

M 的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{w+1-\varphi + \sqrt{(w+1-\varphi)^2 - 4w}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{w+1-\varphi - \sqrt{(w+1-\varphi)^2 - 4w}}{2}. \quad (8)$$

由动力系统的稳定性理论可知, PSO-UK 算法模型稳定(即收敛于 ρ) 当且仅当 $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

定理 2 (PSO-UK 算法局部收敛性能) 当 $0 < w < 1$ 时, 要使 PSO-UK 算法模型稳定(即收敛于 ρ), 当且仅当 $0 < \varphi \leq 2(w+1)$.

证明 由 $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$, 带入式 (8) 易解得 $0 < \varphi \leq 2(w+1)$, $0 < w < 1$. \square

注 1 定理 2 仅给出了 PSO-UK 算法的局部收敛条件, 虽然能够保证式 (3) 和 (4) 本身不会随着演化过程而发散, 但不能保证算法具有全局搜索能力. 定理 2 可以直观理解为: PSO-UK 算法在不确定知识的扰动下形成了一个耗散结构系统, 会收敛到稳定点.

假设 1 存在 $f(D(z, \xi)) < f(z)$, 并且若 $z \in S$, 则 $f(D(z, \xi)) < f(\xi)$, 其中 D 是算法迭代方式, 用来产生下一代^[10].

假设 2 对于 S 的任意 Borel 子集 A , 如果其测度 $v(A) > 0$, 则有 $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - \mu_k(A)) = 0$ 成立, 其中 $\mu_k(A)$ 表示由测度 μ_k 得到 A 的概率^[10].

引理 1 (全局收敛性能) 假设目标函数 f 为可测函数, 区域 S 为可测子集, 且满足假设 1 和假设 2. 设 $\{z_k\}_{k=1}^{k=+\infty}$ 为算法生成的解序列, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} P[z_k \in R_\varepsilon] = 1$ 成立. 其中: $P[z_k \in R_\varepsilon]$ 为第 k 步算法生成的解 $z_k \in R_\varepsilon$ 的概率, R_ε 为全局最优集合^[10].

注 2 引理 1 可以直观理解为: 如果一个迭代算法搜索到搜索空间任意子集的概率不为零, 则该算法具有全局优化能力.

定理 3 (PSO 算法全局收敛性能) 标准 PSO 不具有全局搜索能力.

证明 PSO 的解^[11]为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \frac{c_1 r_1}{c_1 r_1 + c_2 r_2} x_i^* + \frac{c_2 r_2}{c_1 r_1 + c_2 r_2} x^*. \quad (9)$$

由式 (9) 可知, PSO 经过有限次迭代后, 粒子聚集在 x_i^* 与 x^* 之间, x_i^* 与 x^* 越靠近, 粒子聚集程度越高, 直到算法停滞. 此时由于粒子失去了对整个搜索空间的遍历能力, 在整个搜索空间上必然存在搜索不到的子集. 由引理 1 可知, 标准 PSO 算法不具有全局优化搜索能力.

定理 4 (PSO-UK 算法全局收敛性能) PSO-UK 算法具有全局搜索能力.

证明 将式 (5) 代入 (6) 可得

$$x(k+2) + (\varphi - w - 1)x(k+1) + wx(k) = \varphi\rho. \quad (10)$$

式 (10) 为不含速度项的二阶微分方程, 其解为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \frac{\varphi_1}{\varphi} x_i^* + \frac{\varphi_2}{\varphi} x^* + \frac{\varphi_3}{\varphi} C_D. \quad (11)$$

由式 (11) 可知, PSO-UK 算法经过有限次迭代后, x_i^* 逐渐向 x^* 靠拢, 直到一致. 因为 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, 所以粒子在 x^* 与 C_D 上均匀分布. C_D 为 x^* 的往任意方向边界, 在整个搜索空间上必然不存在搜索不到的子集, 故由引理 1 可知 PSO-UK 算法具有全局优化搜索能力.

3.3 PSO-UK 算法实现

Step 1: 初始化. 设定加速系数 c_1, c_2, c_3 , 惯性权重 w , 最大迭代次数 $\max DT$, 搜索空间中心 p_c , 搜索空间边界到中心的距离 limit . 在定义搜索空间中, 随机生成 m 个粒子组成初始种群, 产生各粒子的初始速度.

Step 2: 评价种群 x^k , 计算每个粒子在每一维空间的适应值.

Step 3: 根据粒子速度式 (3) 更新粒子飞行速度, 根据粒子位置式 (4) 更新粒子位置, 产生新的种群 x^{k+1} . 比较当前粒子的适应值和自身最优适应值, 如果当前值比 x_i^* 坐标下的最优适应值更优, 则自身最优适应值为当前适应值, 并置 x_i^* 为 D 维空间的当前最优值. 将粒子适应值与种群最优值进行比较, 如果当前值比全局最优值更优, 则置 x^* 为当前值.

Step 4: 检查结束条件, 如果满足, 则结束寻优; 否则, 转至 Step 2. 结束条件为寻优达到最大迭代次数 $\max DT$ 或者评价值小于最小给定.

4 仿真实验及分析

为了验证所提算法的正确性和有效性, 选用 4 个常用于优化算法比较的具有不同特征的基准函数, 如表 1 所示. Sphere 为单峰函数, 该函数只有一个极值

点, 在 $(0, 0, 0, \dots, 0)$ 处取到极值 0; Rosenbrock 为非凸病态函数, 其全局最优点位于一个平滑狭长的抛物线谷内, 在 $(1, 1, \dots, 1)$ 处达到极小值 0; Rastrigrin 函数和 Girewank 函数具有广泛的搜索空间、大量的局部极小点和高大的障碍物, 是复杂多模态问题, 两函数均在 $(0, 0, 0, \dots, 0)$ 处达到全局最小. 实验中, PSO 参数设置为: $w = 0.7298$ ^[12], $c_1 = c_2 = 1.4962$ ^[12], 种群为 40. PSO-UK 参数设置为: $w = 0.7298$, $c_1 = c_2 = c_3 = 1.1$ (符合定理 2 条件), 种群为 40. 表 2 为各函数的搜索空间和迭代次数^[13].

表 1 典型测试函数

编号	函数名	函数表达式
f_1	Sphere	$\sum_{i=1}^n x_i^2$
f_2	Rosenbrock	$\sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2]$
f_3	Rastrigrin	$\sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$
f_4	Griewank	$\frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \prod_{i=1}^n \cos \frac{x_i}{\sqrt{i}} + 1$

表 2 实验初始条件

函数名	解空间	迭代次数
f_1	$[-1, 1]^D$	1000
f_2	$[-10, 10]^D$	1000
f_3	$[-5.12, 5.12]^D$	1000
f_4	$[-30, 30]^D$	1000

表 3 为 PSO-UK 算法和 PSO 算法对函数 $f_1 \sim f_4$ 分别在 10, 20 和 30 维空间中进行 50 次测试的适应度值平均值和方差结果, MBF 为平均最优适应值, SD 为标准差. 对比函数 f_1 在 10, 20 和 30 维空间的测试结果可以发现, PSO-UK 算法始终保持较高精度的收敛结果, 而 PSO 算法随着函数 f_1 维数的增加, MBF 和 SD 均变得较大. 表明 PSO 算法的寻优能力变差, 且给收敛带来了困难. 对于函数 $f_2 \sim f_4$, 由表 3 中的测试结果也可以得出相同结论, 但是各测试函数维数变化对于 PSO-UK 算法收敛精度影响较小.

对比表 3 中各测试函数相同维数空间下 PSO-UK 算法与 PSO 算法的测试结果, PSO-UK 算法优于 PSO 算法, 尤其对于函数 f_2 和 f_3 , PSO-UK 算法优势明显.

为了直观地反映 PSO-UK 算法的收敛性和优化性, 图 1~图 4 给出了 PSO-UK 与 PSO 算法针对函数 $f_1 \sim f_4$ 在 30 维空间中 50 次实验结果的平均收敛曲线. 由图 1 可以看出, 对于 30 维函数 f_1 , PSO-UK 算法平均最优适应值下降速度快于 PSO 算法. 由图 2~图 4 可以看出, 对于 30 维函数 $f_2 \sim f_4$, PSO-UK 与 PSO 算法初期平均最优适应下降速度相当. 由此可见, 通

表 3 50 次测试实验结果比较

函数名	维数	MBF(SD)	
		PSO-UK	PSO
f_1	10	1.319 9e-007 (1.319 4e-007)	2.598 8e-007 (1.512 0e-006)
	20	2.373 8e-007 (3.474 3e-007)	3.675 1e-002 (3.216 8e-002)
	30	3.743 0e-007 (4.188 8e-007)	2.646 6e-001 (1.263 9e-001)
f_2	10	1.155 6e-003 (1.138 9e-003)	7.301 1e+000 (1.343 7e+000)
	20	2.326 5e-003 (2.206 9e-003)	2.367 2e+001 (3.797 2e+000)
	30	3.270 6e-003 (3.369 7e-003)	6.244 8e+001 (1.454 2e+001)
f_3	10	4.059 4e-004 (3.566 0e-004)	8.981 2e+000 (4.605 4e+000)
	20	1.219 9e-003 (1.587 9e-003)	2.538 5e+001 (1.048 5e+001)
	30	1.519 7e-003 (1.468 0e-003)	5.814 4e+001 (1.544 2e+001)
f_4	10	1.612 9e-005 (1.825 2e-005)	7.921 2e-007 (2.726 8e-007)
	20	2.520 8e-005 (2.688 4e-005)	3.656 6e-003 (2.040 9e-003)
	30	2.555 0e-005 (3.481 6e-005)	1.517 2e-002 (5.757 5e-003)

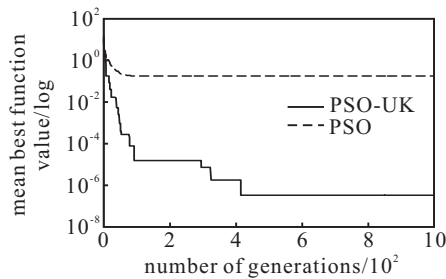


图 1 30 维函数 f_1 收敛性能对比

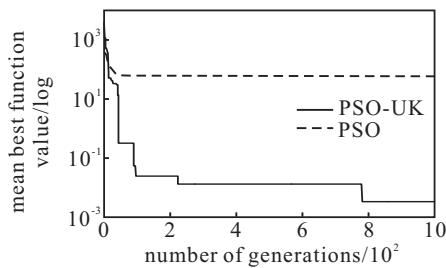


图 2 30 维函数 f_2 收敛性能对比

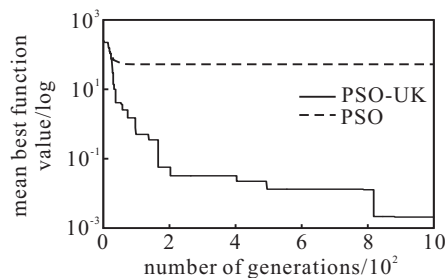


图 3 30 维函数 f_3 收敛性能对比

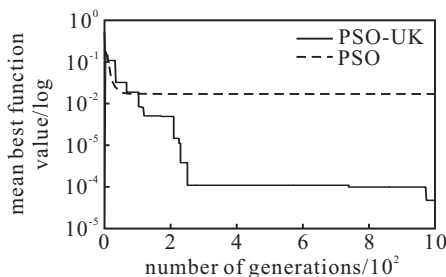


图 4 30 维函数 f_4 收敛性能对比

过设置合适的参数, PSO-UK 算法不仅具有收敛特性, 而且适应度函数值下降速度稍快于 PSO 算法, 继承了 PSO 算法收敛速度快快的特点.

对比 PSO-UK 算法与 PSO 算法的全局优化能力, 图 1~图 4 所示的 $f_1 \sim f_4$ 适应度函数值平均收敛曲线表明, PSO-UK 算法全局搜索能力明显优于 PSO 算法, 尤其对于 30 维函数 f_2 和 f_3 优势更加明显. 在 10 和 20 维空间中, 对函数 $f_1 \sim f_4$ 进行实验, 所得结论与在 30 维空间中一致.

实验测试表明, PSO-UK 算法比 PSO 算法具有更好的适应度值. 在相同迭代步长下, PSO-UK 算法下降速度稍快于标准 PSO. 由于 PSO-UK 算法引入了不确定性知识, 无论是全局搜索能力还是局部收敛精度均明显优于标准 PSO 算法.

5 结 论

本文提出了一种基于不确定知识的粒子群优化算法 PSO-UK. 将不确定知识引入 PSO 算法中, 并对个体知识、群体知识和不确定知识随机参数进行归一化, 使得算法在每一步演化中均能获得完备的知识. 理论分析和实验表明, 所提出的 PSO-UK 算法具有全局搜索能力, 且相同步长设定下局部收敛精度明显优于 PSO 算法, 也优于国内外一些较新的 PSO 改进算法. PSO-UK 算法保留了 PSO 算法简洁优美的特点, 易于实现.

参考文献(References)

- [1] Jiao B, Lian Z G, Gu X S. A dynamic inertia weight particle swarm optimization algorithm[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2008, 37(3): 698-705.
- [2] 张项学, 廖锐全. 一种基于种群速度的自适应粒子群算法[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1257-1260.
(Zhang D X, Liao R Q. Adaptive particle swarm optimization algorithm based on population velocity[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1257-1260.)
- [3] 朱海梅, 吴永萍. 一种高速收敛粒子群优化算法[J]. 控制与决策, 2010, 25(1): 20-24.
(Zhu H M, Wu Y P. A PSO algorithm with high speed convergence[J]. Control and Decision, 2010, 25(1): 20-24.)
- [4] Liu B, Wang L, Jin Y H, et al. Improved particle swarm optimization combined with chaos[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25(5): 1261-1271.
- [5] Yi D, Ge X. An improved PSO-based ANN with simulated annealing technique[J]. Neurocomputing, 2005, 63(1): 527-533.
- [6] Hendtlass T. A combined swarm differential evolution algorithm for optimization problems[C]. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 2070: 11-18.