

文章编号: 1001-0920(2012)01-0058-07

基于信噪比受限通道的网络控制系统镇定

邓玮璋, 费敏锐, 杜大军, 宋 杨

(上海大学 a. 机电工程与自动化学院, b. 上海市电站自动化技术重点实验室, 上海 200072)

摘 要: 研究了同时考虑通信和网络特性的线性系统镇定问题. 首先针对连续时间网络控制系统, 使用线性矩阵不等式方法得到了系统镇定所需要的最小信噪比; 然后将问题推广到一类更为复杂的离散时间异构网络控制系统并得到了相似的结论. 其中建立的多传感器随机时滞模型很好地刻画了 token-passing 总线控制网络, 它更具有实际意义; 最后通过数值例子对以上理论进行了仿真验证, 有效表明了系统镇定时被控对象不稳定极点、网络时滞和信噪比之间的关系.

关键词: 信噪比; 网络控制系统; 通信通道; 镇定

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Stabilization of networked control systems over signal-to-noise ratio constrained channels

DENG Wei-hua, FEI Min-rui, DU Da-jun, SONG Yang

(a. School of Mechatronics Engineering and Automation, b. Shanghai Key Laboratory of Power Station Automation Technology, Shanghai University, Shanghai 200072, China. Correspondent: FEI Min-rui, E-mail: mrfei888@x263.net)

Abstract: This paper investigates the problem of stabilization for linear system considering communication and network characteristics together. Firstly, the minimal signal-to-noise ratios(SNRs) required for stabilisability are obtained in continuous-time networked control system(NCS) with varying delay by using linear matrix inequality(LMI) approach. Then the similar results are extended to a kind of discrete-time heterogeneous networked control system. The proposed multi-sensors stochastic delays model which is more practical can depict the characteristic of token-passing bus control network. Finally, the above theories are tested by numerical examples, and relations among unstable poles, delays and SNRs are illustrated explicitly.

Key words: signal-to-noise ratio; networked control systems; channels; stabilization

1 引 言

目前关于网络控制系统的理论研究已取得了很大进展. 该研究领域大概分为三大类: 一是不考虑具体控制系统组件的设计, 只关注通信或网络的规划和设计^[1]. 二是在通信或网络特性给定的条件下设计控制系统组件, 其中又包括两个分支: 1) 假设给定的通信特性是完美的^[2-5], 只需考虑网络所引起的延时和丢包, 然后研究系统稳定性和控制器设计; 2) 通信特性是不完美的, 受限制的^[6-11](如通道噪声、数据率、带宽、量化误差、通道衰退和信噪比等), 在此情形下研究系统的稳定和镇定问题. 三是通信、网络和控制

系统组件共同设计, 因属于交叉学科领域, 难度很大, 故对该问题的研究很少(可参见文献[10]的引言). 现有研究大都聚焦在第2类上, 尤其是忽略通信特性而只考虑网络特性的研究更受关注.

由于实际应用的需要, 最近的研究已开始同时考虑网络和通信特性. 其中较为典型的是对通道数据率的研究^[8-9]和通道信噪比受限的研究^[10-11]. 本文关注的是通道信噪比受限的情形. 将信噪比引入网络控制的研究刚刚起步, 还不够广泛和深入. 文献[10]较早地提出了这个问题, 并且较系统地阐述了连续时间和离散时间情形下信噪比受限通道的反馈镇定问题.

收稿日期: 2010-07-18; 修回日期: 2011-01-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074032, 60834002, 60904016, 61104089); 上海市科委基础研究重点项目(10JC1405000, 11ZR1413100); 上海大学研究生创新基金项目(SHUCX101016).

作者简介: 邓玮璋(1978—), 男, 博士生, 从事网络控制、智能控制的研究; 费敏锐(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、复杂系统建模和网络控制等研究.

[11]考虑了对象带有时滞条件下信噪比受限通道的输出反馈镇定问题.[6-7]分别针对一阶平均移动高斯通道和外部扰动情形得到了系统镇定所需要的最小信噪比.但是以上工作并没有考虑网络诱导时滞和丢包等网络特性,而且采用的是传统控制方法,不容易对理论进行数值计算和仿真.

针对上述问题,本文首先使用LMI方法得到了连续时变网络控制系统镇定所要求的最小信噪比;然后设计一类更加符合实际的异构网络控制系统架构,其中建立的多传感器随机时滞模型能够刻画 token-passing 总线网络,它更有利于理论分析的准确性;最后通过数值例子对本文理论进行了仿真验证,有效说明了系统镇定时被控对象不稳定极点、网络时滞和信噪比之间的关系.

2 连续时间网络控制系统

首先给出文中符号的说明: C^+ 为右开复半平面; D 和 \bar{D}^C 分别为闭单位圆和它的补; E 为期望操作; $*$ 为矩阵中的对称块; diag 为对角矩阵; I 为合适维数的单位阵; $\min(\rho)$ 为 ρ 的最小值; $\lambda_{\min}(M)$ 和 M^T 分别为矩阵 M 的最小特征值和它的转置, $M > 0, M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 代表 M 是对称正定矩阵.信号大小由 L_2 和 L_∞ 范数衡量,并且在连续时间情形,有

$$\|n(t)\|_{L_\infty}^2 = \sup E\{n^T(t)n(t)\},$$

$$\|n(t)\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty n^T(t)n(t)dt;$$

在离散时间情形,有

$$\|n(k)\|_{L_\infty}^2 = \sup E\{n^T(k)n(k)\},$$

$$\|n(k)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^\infty \|n(k)\|^2.$$

下面结合图1对连续时间网络控制系统进行描述.

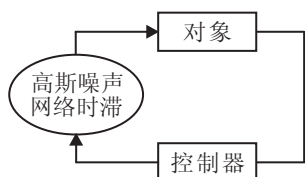


图1 带有噪声和时滞的连续时间网络控制系统

本文只考虑在控制器与执行器之间插入网络,并且同时考虑网络诱导时滞 τ_k 和通道加性高斯白噪声(AWGN)的影响.这个问题在无线通信系统和无线网络控制中非常严重,尽管使用好的编解码方法可从一定程度上抑制噪声的影响,但噪声仍是不可避免的.另外,无线通信协议(如IEEE 802.11 b)采用了CSMA/CA机制,故延时也是必然存在的.鉴于此,本文同时研究网络时滞和通道噪声的问题.另外系统还满足:1)由于网络诱导时滞主要是因网络节点之间竞

争从而由其等待时间造成的^[13],本文只考虑由等待时间导致的网络时滞;2)假设传感器是时间驱动,控制器和执行器是事件驱动,传感器和执行器与对象放置在一起.

结合以上假设,连续时间网络控制系统可表示为以下数据采样系统:

系统模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_r(t), \\ u_r(t) = n(t) + \bar{u}_s(t_k), t_k \leq t \leq t_{k+1}. \\ \bar{u}_s(t_k) = u_s(t_k - \tau_k), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态; $u_r(t) \in \mathbf{R}^1$ 既是通道输出又是控制输入; A, B 是具有合适维数的常矩阵; $n(t) \in \mathbf{R}^1$ 是稳态零均值高斯白噪声,其能量谱密度 $S_n(\omega) = \Phi$.

控制器

$$u_s(t) = Kx(t). \quad (2)$$

其中: K 是待定的控制器增益, $u_s(t) \in \mathbf{R}^1$ 是通道输入.

信噪比受限的形式:信号的能量一般定义为 $\|u_s(t)\|_{\text{pow}} = E\{u_s^T(t)u_s(t)\}$,并设 $S_{u_s}(\omega)$ 为 $u_s(t)$ 的能量谱密度.另外,由于系统电子硬件设备的要求以及防止各通信用户之间的相互干扰过大,一般要求通道输入信号应满足以下能量限制^[10]:

$$\|u_s(t)\|_{\text{pow}} < P, \quad (3)$$

其中 $P > 0$ 是一个给定输入能量界限.

如果将式(2)代入(1),并进行变换 $\tau(t) = t - t_k + \tau_k, 0 \leq \tau(t) \leq T + \tau_k \leq \tau$,其中 T 为采样周期,则有闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bn(t) + Bu_s(t - \tau(t)) = \\ &= Ax(t) + Bn(t) + BKx(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

若假设闭环系统是渐近稳定的,则信号 $u_s(t)$ 的能量谱密度可表示为^[10]

$$S_{u_s}(\omega) = T(j\omega)S_n(\Omega)T^T(-j\omega),$$

其中 $T(j\omega)$ 是 $n(t)$ 与 $u_s(t)$ 之间的闭环传递函数.因此,能量限制可表示为

$$P > \|u_s\|_{\text{pow}} = \|T\|_{H_2}^2 \Phi,$$

其中

$$\|T\|_{H_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)T(-j\omega)d\omega \right)^{1/2}$$

是系统(4)的 H_2 性能.则能量限制(3)等价于以下信噪比受限的形式:

$$\|T\|_{H_2}^2 < P/\Phi. \quad (5)$$

由于本文关注的是单输入单输出通信通道,系统(4)的 H_2 性能在此情形下等价于以下定义1中的 L_2 - L_∞ 性能,即能量到峰值性能^[12].

定义 1 1) 连续时间网络控制系统 (1) 在 $n(t) = 0$ 时是渐近稳定的; 2) 假如给定 τ, γ_τ , 在零初始条件下对于所有非零 $n(t) \in L_2[0, \infty]$, 满足 $\|u_s(t)\|_{L_\infty}^2 < \gamma_\tau^2 \|n(t)\|_{L_2}^2$, 则闭环系统 (4) 是渐近稳定的且其 H_2 性能为 γ_τ .

由定义 1 及式 (5) 可得

$$\rho_\tau < P/\Phi, \quad (6)$$

其中 $\rho_\tau = \gamma_\tau^2$. 于是可形成如下问题:

问题 1 使用 LMI 方法找到一个状态反馈控制器增益 K , 使得连续时间网络控制系统 (1) 镇定且其 H_2 性能 γ_τ 满足限制 (6), 同时能够计算出 γ_τ 的最优数值解.

定理 1 考虑连续时间网络控制系统 (1), 假如 A 有不同特征值 $\{p_i \in \mathbb{C}^+; i = 1, \dots, m\}$, 对于给定的 $\tau > 0$, 可以通过优化问题

$$\begin{aligned} \rho_\tau^* &= \min \rho_\tau, \\ \text{s.t. } & (9) \sim (11), \end{aligned} \quad (7)$$

得到 ρ_τ^* , 并且问题 1 是可解的当且仅当允许的信噪比满足

$$P/\Phi > \rho_\tau^*. \quad (8)$$

证明 与文献 [10] 一致但有所不同的是, 这里要证明的是条件 (7). 最小化 ρ_τ 的问题实质上是 H_2 最优控制问题. 证明式 (7) 即等价于证明以下问题:

对于给定的标量 $\gamma_\tau > 0, \tau > 0$, 系统存在状态反馈 H_2 控制律, 如果存在对称正定矩阵 $\bar{P}, \bar{S}, \bar{R}, Z$ 和矩阵 $\bar{K}, \bar{M}_{11}, \bar{M}_{12}, \bar{M}_{13}, \bar{M}_{14}, \bar{M}_{21}, \bar{M}_{22}, \bar{M}_{23}, \bar{M}_{24}$, 使得以下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ * & \Omega_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -Z & \bar{K} \\ \bar{K}^T & -\bar{P} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\text{Trace}(Z) < \rho_\tau. \quad (11)$$

其中

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ * & * & * & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{11} = A\bar{P} + \bar{P}A^T + \bar{S} + \bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^T,$$

$$\Omega_{12} = B\bar{K} + \bar{M}_{21} - \bar{M}_{11} + \bar{M}_{12}^T,$$

$$\Omega_{13} = -\bar{M}_{21} + \bar{M}_{13}^T, \Omega_{14} = B + \bar{M}_{14}^T,$$

$$\Omega_{22} = \bar{M}_{22} + \bar{M}_{22}^T - \bar{M}_{12} - \bar{M}_{12}^T,$$

$$\Omega_{23} = -\bar{M}_{22} + \bar{M}_{23}^T - \bar{M}_{13}^T, \Omega_{24} = -\bar{M}_{14}^T + \bar{M}_{24}^T,$$

$$\Omega_{33} = -\bar{S} - \bar{M}_{23} - \bar{M}_{23}^T, \Omega_{34} = -\bar{M}_{24}^T,$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \bar{P}A^T & \bar{M}_{11} & \bar{M}_{21} \\ \bar{K}^TB^T & \bar{M}_{12} & \bar{M}_{22} \\ 0 & \bar{M}_{13} & \bar{M}_{23} \\ B^T & \bar{M}_{14} & \bar{M}_{24} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} -1/\tau\bar{R} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau\bar{R} - 2/\tau\bar{P} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau\bar{R} - 2/\tau\bar{P} \end{bmatrix}.$$

选取 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$\begin{aligned} V(t) &= x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Sx(s)ds + \\ &\int_{-\tau}^0 \int_{\beta}^0 \dot{x}^T(t+s)R\dot{x}(t+s)d\beta ds, \end{aligned}$$

并设

$$A_1 = \varepsilon^T(t)M_1 \left(x(t) - x(t-\tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds \right),$$

$$A_2 =$$

$$\varepsilon^T(t)M_2 \left(x(t-\tau(t)) - x(t-\tau) - \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{x}(s)ds \right),$$

$$\varepsilon^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t-\tau(t)) \ x^T(t-\tau) \ n^T(t)],$$

其中 M_1, M_2 是合适维数的自由矩阵. 则当 $n(t) = 0$ 时, 采用自由矩阵方法和 Newton-Leibniz 公式, 很容易证明定义 1 中的条件 1).

另外设

$$J_\tau = V(t) - \int_0^t n^T(s)n(s)ds,$$

$$M_1 = [M_{11}^T \ M_{12}^T \ M_{13}^T \ M_{14}^T]^T,$$

$$M_2 = [M_{21}^T \ M_{22}^T \ M_{23}^T \ M_{24}^T]^T,$$

并且定义矩阵变量

$$P^{-1} = \bar{P}, \quad P^{-1}SP^{-1} = \bar{S}, \quad P^{-1}M_{1i}P^{-1} = \bar{M}_{1i},$$

$$M_{2i}P^{-1} = \bar{M}_{2i}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$KP^{-1} = \bar{K}, \quad R^{-1} = \bar{R}.$$

使用 Schur 补并根据定义 1 便可证明结论. \square

下面通过一个例子^[11]来验证以上结论.

例 1 假设系统 (1) 中的对象参数取以下值:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

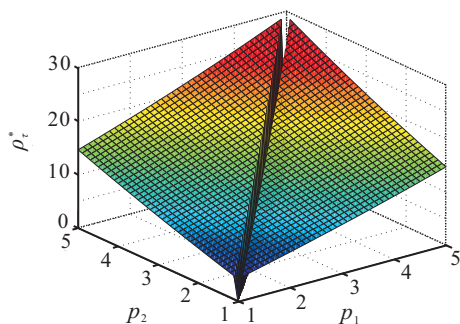
$$p_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad i = 1, 2, \quad p_1 \neq p_2.$$

另外取 $\tau = 0.02$. 通过求解优化问题 (7), 可以得到表 1, 其中 \circ 表示 $p_1 = p_2$ 的情形, 不在本文计算范围.

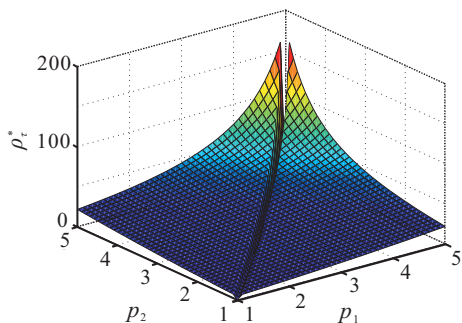
当 $p_i \in [1, 5], i = 1, 2, p_1 \neq p_2$ 时, 可以分别得到 $\tau = 0.02$ 和 $\tau = 0.05$ 时的三维图, 见图 2, 它表示了系统可镇定条件下不稳定极点、信噪比和网络时滞的关系. 从图 2 中可以看到, 网络时滞越大, 使系统镇定所需要的最小信噪比也越大.

表 1 网络时滞情形系统极点与最小信噪比的关系 ρ_τ^*

p_2	p_1				
	1	2	3	4	5
1	o	6.645 6	9.160 4	11.839 7	14.697 5
2	6.645 6	o	11.929 4	14.841 7	17.955 8
3	9.160 4	11.929 4	o	18.058 2	21.455 8
4	11.839 7	14.841 6	18.058 3	o	25.222 7
5	14.697 5	17.955 8	21.455 8	25.222 8	o



(a) $\tau = 0.02$



(b) $\tau = 0.05$

图 2 不稳定极点与信噪比的关系

需要说明的是, 如果不考虑网络时滞, 则问题可简化为文献 [10] 中定理 1 所描述的情形, 并且使用本文方法可以得到表 2. 从表 2 可以看出, 系统镇定所需要的最小信噪比等于对象不稳定极点的实部和的 2 倍, 即 $\rho^* = 2 \sum_{i=1}^m \text{Re}\{p_i\}$, 这与文献 [10] 是一致的.

表 2 无时滞情形不稳定极点与最小信噪比的关系 ρ^*

p_2	p_1				
	1	2	3	4	5
1	o	6	8	10	12
2	6	o	10	12	14
3	8	10	o	14	16
4	10	12	14	o	18
5	12	14	16	18	o

通过比较表 1 和表 2 对应数据可以看出, 网络诱导时滞使系统镇定所需要的最小信噪比有所增加, 这表明网络特性确实对通道信噪比特性具有一定影响.

另外, 选取 $p_1 = 1, p_2 = 2, \tau = 0.02, x(0) = [0.5 \ 0.5]^T$ 和 $P/\Phi = 10 > 6.645 6$, 可以得到图 3, 即

只考虑通道噪声(点线)与同时考虑噪声和网络时滞(实线)时系统镇定的状态曲线 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$. 从图 3 中可以看出, 状态响应曲线都趋于稳定, 这说明当同时考虑噪声和网络时滞时, 本文方法是可行的. 另外, 从图 3 中还可以看到, 实线的超调量大于点线, 并且进入稳态后也稍落后于点线, 这说明网络延时对系统镇定具有一定的影响.

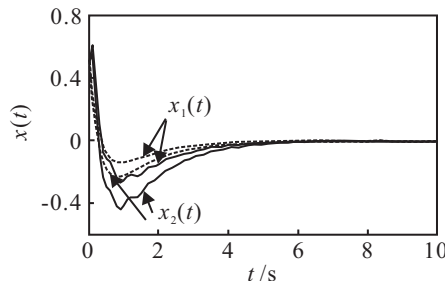


图 3 满足信噪比要求的系统镇定状态响应曲线

3 离散时间网络控制系统

以上研究了较简单的时变网络特性, 下面考虑具有多传感器的网络环境. 对象的状态分别由多个传感器测量, 网络时滞特性也更为复杂, 这样更加符合实际.

考虑由两种网络构成的一类异构网络控制系统, 如图 4 所示. 这样的结构具有很大的应用价值, 因为在一个实际网路控制系统(NCS)中往往包含各种网络通道, 并且在某些环境下, 有的网络受延时的影响远大于噪声(如 token-passing 总线控制网络), 有的网络受噪声的影响远大于延时(如干扰较大、节点数较少的无线网络). 图 4 中: $x_1(k), \dots, x_n(k)$ 是来自 n 个传感器的信号; $x_1(k-d_{1k}), \dots, x_n(k-d_{nk})$ 是已通过网络的信号, 并且 d_{1k}, \dots, d_{nk} 是网络诱导时滞.

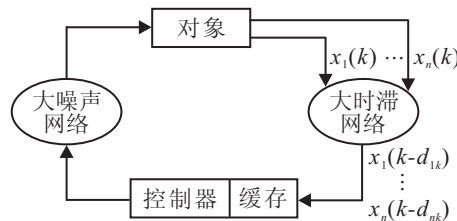


图 4 一类异构网络控制系统

根据 token 总线协议, 有以下假设:

- 1) n 个传感器和一个控制器是由 ℓ 个逻辑节点构成的网络的一部分, 即 $n + 1 \leq \ell$. 执行器不包含在其中.
- 2) 输入输出数据触发方式采用循环触发方式, 即令牌在 ℓ 个节点之间传递一遍为一个循环周期.
- 3) 第 i 个节点持有令牌时间为其最大持有时间并设为 1, 则其等待时间为 $i - 1, i = 1, \dots, \ell$, 并且由于每个循环周期形成的逻辑环都是随机的, 导致每个节点的等待时间也是随机的, 但总在 $[0, \ell - 1]$ 范围内.

4) 传感器和控制器均是时间驱动, 并且其周期都是 h ; 而执行器是事件驱动的.

系统对象模型为

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u_r(k). \quad (12)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $u_r(k) \in \mathbf{R}^1$ 既是通道输出也是控制输入.

通道模型为

$$u_r(k) = n(k) + u_s(k). \quad (13)$$

其中: $n(k) \in \mathbf{R}^1$ 是稳态零均值高斯白噪声, 其能量谱密度 $S_n(\omega) = \Phi$.

信噪比受限的形式: 与连续时间相似, 信号的能量定义为 $\|u_s(k)\|_{\text{pow}} = E\{u_s^T(k)u_s(k)\}$, 并设 $S_{u_s}(\omega)$ 是 $u_s(k)$ 的能量谱密度. 通道输入信号满足以下能量限制:

$$\|u_s(k)\|_{\text{pow}} < P. \quad (14)$$

基于多通道网络时滞模型的控制器: 由于节点等待时间是引起网络时滞的一个主要因素^[13], 本文只考虑其作为网络诱导时滞, 则控制器为

$$u_s(k) = K(d_{1k}, \dots, d_{nk}) \begin{bmatrix} x_1(k-d_{1k}) \\ \vdots \\ x_n(k-d_{nk}) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中 $d_{lk} \in N_l = \{0, 1, \dots, \ell-1\}$. N_l 是 n 个 Markov 链, 同时设在每个链中 d_{lk} 从 i_l 到 j_l 的传递概率矩阵为 $\Pi_l = [\pi_{i_l j_l}^l]$. 这里

$$\pi_{i_l j_l}^l = \Pr(d_{lk+1} = j_l | d_{lk} = i_l), \quad (16)$$

且满足 $\pi_{i_l j_l}^l \geq 0$, $\sum_{j_l=0}^{\ell-1} \pi_{i_l j_l}^l = 1, l = 1, \dots, n$. 关于此多通道网路时滞模型的详细介绍可参见文献 [5].

离散时间 NCS 模型: 在建立随机系统之前, 首先通过下式对式 (15) 中的时滞界进行一个转换:

$$\nu = \begin{cases} h, & \ell-1 > h; \\ \ell-1, & \ell-1 \leq h. \end{cases} \quad (17)$$

转换的目的是, 下文将针对小于等于采样周期的随机时滞来设计控制器, 而大于采样周期的情形作为丢包, 利用存储在缓存中的上一个信息进行补偿. 于是随机时滞 $0 \leq d_{lk} \leq \ell-1$ 变为 $0 \leq d_{lk} \leq \nu, l = 1, \dots, n$. 相应的模式个数也由 N_l 变为 $N'_l, l = 1, \dots, n$.

结合式 (17), 离散时间系统 (12) 增广为

$$\varepsilon(k+1) = \bar{A}\varepsilon(k) + \bar{B}u_r(k). \quad (18)$$

其中: $\varepsilon(k) = [x_1(k) \cdots x_n(k), x_1(k-1) \cdots x_1(k-\nu), \dots, x_n(k-1) \cdots x_n(k-\nu)]^T$, 并且初始条件是 $\varepsilon(0) = \varepsilon_0, d_{10} \neq d_{20} \neq \dots \neq d_{n0}$. 另外

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \bar{e}_1 & \bar{I}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \bar{e}_2 & 0 & \bar{I}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{e}_n & 0 & \cdots & 0 & \bar{I}_n \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{I}_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_l = \begin{bmatrix} e_l \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_l = [0 \cdots 1 \cdots 0],$$

且 e_l 中第 l 列为 1. 考虑离散通道 (13) 和控制器 (15), 设 $d_k = (d_{1k}, \dots, d_{nk})$, 可以得到随机系统

$$\varepsilon(k+1) = (\bar{A} + \bar{B}K(d_k)F(d_k))\varepsilon(k) + \bar{B}n(k), \quad (19)$$

其中

$$F(d_k) = [F_{d_{1k}} \cdots F_{d_{nk}}]^T.$$

如果 $d_{lk} = 0$, 则 $F_{d_{lk}}$ 中的第 $d_{lk} + l$ 列为 1, 其他列为 0; 否则, 第 $n + (l-1)\nu + d_{lk}$ 列为 1, 其他列为 0, $l = 1, \dots, n$. 若假设闭环系统是渐近稳定的, 则信号 $u_s(k)$ 的能量谱密度可表示为^[10]

$$S_{u_s}(\omega) = |T(z)|^2 S_n(\omega),$$

其中 $T(z)$ ($z = e^{j\omega}$) 是 $n(k)$ 和 $u_s(k)$ 之间的闭环传递函数. 这样能量限制可表示为

$$P > \|u_s\|_{\text{pow}} = \|T\|_{H_2}^2 \Phi,$$

其中

$$\|T\|_{H_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T(e^{j\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

从而能量限制 (14) 形式上等价于 (5). 与连续情形相似, 有下列结论:

定义 2 1) 当 $n(k) = 0$ 时, 离散时间 NCS (18) 是均方稳定的; 2) 如果给定 γ_d , 在零初始条件下, 对于所有非零 $n(k) \in L_2[0, \infty]$ 和时滞模式 $d_{lk} = i$ ($i = 1, \dots, N'_l, l = 1, \dots, n$), $\|u_n(k)\|_{L_\infty}^2 < \gamma_d^2 \|n(k)\|_{L_2}^2$ 均能满足, 则闭环系统 (19) 是均方稳定的并具有 H_2 性能 γ_d .

相似地, 由定义 2 和式 (5), 有

$$\rho_d < P/\Phi, \quad (20)$$

其中 $\rho_d = \gamma_d^2$.

问题 2 利用 LMI 方法找到一组状态反馈控制器增益 $K(d_{1k}, \dots, d_{nk}), d_{lk} = i, i = 1, \dots, N'_l, l = 1, \dots, n$, 使得离散时间 NCS (18) 镇定且其 H_2 性能 ρ_d 满足限制 (20), 同时能够计算出 ρ_d 的最优数值解.

定理 2 考虑离散时间 NCS (18), 如果 A_d 具有不同特征值 $\{p_i \in \bar{D}^C; i = 1, \dots, \ell\}$, 则通过优化问题

$$\begin{aligned} \rho_d^* &= \min \rho_d, \\ \text{s.t.} & \quad (23) \sim (25), \end{aligned} \quad (21)$$

可以求解出 ρ_d^* , 并且问题 2 是可解的当且仅当允许的

信噪比满足

$$P/\Phi > \rho_d^*. \quad (22)$$

证明 显然, 证明式 (21) 等价于证明: 给定标量 $\gamma_d > 0$, 离散时间 NCS (18) 存在状态反馈 H_2 控制律, 假如存在 $P(i_1, \dots, i_n) > 0, Z_d > 0$ 以及 $K(i_1, \dots, i_n), i_l \in N_l', l = 1, \dots, n$, 满足

$$\begin{bmatrix} -P(i_1, \dots, i_n) & 0 & \Omega_1(i_1, \dots, i_n) \\ * & -I & \Omega_2(i_1, \dots, i_n) \\ * & * & -\Omega_3(i_1, \dots, i_n) \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} -Z_d & K(i_1, \dots, i_n)F(i_1, \dots, i_n) \\ * & -P(i_1, \dots, i_n) \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$\text{Trace}(Z_d) < \rho_d. \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_1(i_1, \dots, i_n) &= \\ &[(\pi_{i_n 0}^n)^{\frac{1}{2}}(\bar{A} + \bar{B}K(i_1, \dots, i_n)F(i_1, \dots, i_n))^T, \dots, \\ &(\pi_{i_n \nu}^n)^{\frac{1}{2}}(\bar{A} + \bar{B}K(i_1, \dots, i_n)F(i_1, \dots, i_n))^T], \\ \Omega_2(i_1, \dots, i_n) &= [(\pi_{i_n 0}^n)^{\frac{1}{2}}\bar{B}^T, \dots, (\pi_{i_n \nu}^n)^{\frac{1}{2}}\bar{B}^T], \\ \Omega_3(i_1, \dots, i_n) &= \text{diag}\{\bar{P}^{-1}(i_1, \dots, i_{n-1}, 0), \\ &\dots, \bar{P}^{-1}(i_1, \dots, i_{n-1}, \nu)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n) &= \\ &\sum_{j_1=0}^{\tau} \pi_{i_1 j_1}^1 \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{\tau} \pi_{i_{n-1} j_{n-1}}^{n-1} P(j_1, \dots, j_{n-1}, j_n), \\ &j_n = 0, \dots, \nu. \end{aligned}$$

考虑函数

$$V(\varepsilon(k), k) = \varepsilon(k)^T P(d_{1k}, \dots, d_{nk})\varepsilon(k), \quad (26)$$

则有

$$E\{\Delta V(\varepsilon(k), k)\} = \varepsilon(k)^T M(i_1, \dots, i_n)\varepsilon(k).$$

如果 $M(i_1, \dots, i_n) < 0$, 则容易得到

$$\begin{aligned} E\{\Delta V(\varepsilon(k), k)\} &\leq \\ &-\lambda_{\min}(-M(i_1, \dots, i_n))\varepsilon(k)^T \varepsilon(k) \leq \\ &-\gamma \|\varepsilon(k)\|^2. \end{aligned}$$

其中: $\gamma = \inf\{\lambda_{\min}(-M(i_1, \dots, i_n))\}, i_l \in [0, N_l'], l = 1, \dots, n$, 而

$$\begin{aligned} M(i_1, \dots, i_n) &= \\ &\sum_{j_1=0}^{\nu} \pi_{i_1 j_1} \cdots \sum_{j_n=0}^{\nu} \pi_{i_n j_n} \times \\ &[(\bar{A} + \bar{B}K(i_1, \dots, i_n)F(i_1, \dots, i_n)) \bar{B}]^T \times \\ &P(j_1, \dots, j_n) \times \\ &[(\bar{A} + \bar{B}K(i_1, \dots, i_n)F(i_1, \dots, i_n)) \bar{B}] - \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} P(i_1, \dots, i_n) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

再通过简单的变换, 容易得到

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|\varepsilon(k)\|^2\right\} \leq \frac{1}{\gamma} \varepsilon_0^T P(d_{10}, \dots, d_{n0})\varepsilon_0.$$

这样就证明了离散时间 NCS (18) 在 $n(k) = 0$ 时是均方稳定的. 另外, 设

$$J_d = V(k) - \sum_{q=0}^{k-1} n^T(q)n(q),$$

根据定义 2, 闭环离散时间 NCS (19) 是均方稳定的且具有 H_2 性能 γ_d , 同时可以通过优化问题 (21) 得到系统镇定需要的最小信噪比 ρ_d^* . \square

同样, 使用以下数值例子^[14]验证上述结论.

例 2 离散时间系统对象 (12) 的相应参数为

$$A_d = \begin{bmatrix} a & 0.0301 \\ 0.5202 & a \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0053 \end{bmatrix},$$

其中 $a \in \{1.0078, 1.0178, 1.0278, 1.0378, 1.0478\}$. 容易得到相应的不稳定极点

$$p \in \{1.1329, 1.1429, 1.1529, 1.1629, 1.1729\}.$$

如果 $\ell = 3, n = 2$, 随机时滞选取 $d_{1k} \in \{0, 1\}, d_{2k} \in \{0, 1, 2\}$, 并设其传递概率矩阵为

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix},$$

求解优化问题 (21), 便可得到表 3. 它反映了随机网络诱导时滞对系统镇定所需要的最小信噪比有一个显著的影响.

表 3 离散时间网络时滞情形系统极点与最小信噪比的关系

p	1.1329	1.1429	1.1529	1.1629	1.1729
ρ_d^*	340.4472	476.3011	641.9821	841.4259	1079.3987

需要说明的是, 在设计过程中转移概率矩阵的选取是一个关键因素, 它表征了某一具体网络的统计特性. 另外, 如果不考虑网络特性, 则问题 2 同样可以简化为文献 [10] 中离散时间状态反馈情形, 并且使用本文方法可以得到表 4. 显然表 4 的数据与公式 $\rho^* = \left(\prod_{i=1}^m |p_i|^2\right) - 1$ 是一致的.

表 4 离散时间无时滞情形不稳定极点与最小信噪比的关系

p	1.1329	1.1429	1.1529	1.1629	1.1729
ρ^*	0.2835	0.3063	0.3293	0.3524	0.3758

另外选取 $a = 1.0078, P/\Phi = 400 > 340.4472, x_0 = [0.5 \ 0.5]^T$, 可以得到图 5, 它给出了只考虑通道

噪声(点线)与同时考虑噪声和网络时滞(实线)的系统镇定状态曲线 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$. 从图 5 中可以看出, 状态响应曲线都趋于稳定, 即点线代表渐近稳定, 实线代表均方稳定. 这说明当同时考虑噪声和随机网络时滞时, 本文方法是可行的. 另外, 从图 5 中还可以看到, 实线的超调量大于点线, 并且是均方意义上的稳定, 这说明随机网络延时对系统镇定具有较大的影响.

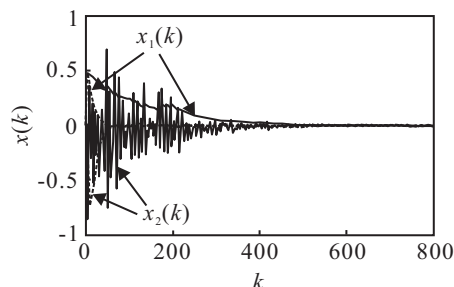


图 5 满足信噪比要求的系统镇定状态响应曲线

4 结 论

本文使用 LMI 方法研究了在信噪比受限通道上的网络控制系统镇定问题. LMI 方法可有效地结合 Lyapunov 稳定理论和凸优化方法分析问题, 并方便地进行数值计算和仿真. 另外设计了一类新的异构网络控制系统架构, 其中使用多 Markov 链刻画的网络随机时滞更符合实际. 但本文所研究的通信特性只是单通道情形, 而在网络控制中大多是多通道方式, 因此关于较复杂的多通道信噪比约束问题有待于进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Walsh G C, Ye H. Scheduling of networked control systems[J]. IEEE Control System Magazine, 2001, 21(1): 57-65.
- [2] Lin Chong, Wang Zidong, Yang Fuwen. Observer-based networked control for continuous-time systems with random sensor delays[J]. Automatica, 2009, 45(2): 578-584.
- [3] Xiong Junlin, Lam James. Stabilization of networked control systems with a logic ZOH[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 358-363.
- [4] 王志文, 潘纬, 郭戈. 一类网络控制系统的稳定性分析[J]. 控制与决策, 2008, 23(11): 1311-1314.
(Wang Z W, Pan W, Guo G. Stability analysis of a class of networked control systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(11): 1311-1314.)
- [5] 邓玮璋, 费敏锐. 基于带有随机时滞的多通信通道的网络控制系统的镇定[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1635-1640.
(Deng W H, Fei M R. Stabilization of networked control system based on multiple communication channels with random delays[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1635-1640.)
- [6] Middleton, Rojas, Freudenberg, et al. Feedback stabilization over a first order moving average gaussian noise channel[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(1): 163-167.
- [7] Rojas. Signal-to-noise ratio performance limitations for input disturbance rejection in output feedback control[J]. Systems and Control Letters, 2009, 58(5): 353-358.
- [8] Paolo Minero, Massimo Franceschetti, Girish N Nair. Data rate theorem for stabilization over time-varying feedback channels[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 243-255.
- [9] Girish N Nair, Fabio Fagnani, Sandro Zampieri, et al. Feedback control under data rate constraints: An overview[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 108-137.
- [10] Braslavsky, Middleton, Freudenberg. Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(8): 1391-1403.
- [11] Braslavsky, Middleton, Freudenberg. Effects of time delay on feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels[C]. Proce of 16th IFAC World Congress. Prague, 2005, 16: 219-224.
- [12] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 31.
(Yu L. Robust control—Linear matrix inequality approach[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 31.)
- [13] Feng Lilian, James R Moyne. Performance evaluation of control networks: Ethernet, controlnet, and devicenet[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 66-83.
- [14] Gao Huijun, Meng Xiangyu, Chen Tongwen. Stabilization of networked control systems with a new delay characterization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(9): 163-167.