

文章编号: 1001-0920(2011)12-1783-08

## 基于 RENN 的柔性关节机械臂自适应动态面控制

顾义坤, 倪风雷, 刘宏

(哈尔滨工业大学 机器人技术与系统国家重点实验室, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对面贴式永磁同步电机驱动的柔性关节机械臂动力学模型具有非线性、不确定性和未知外部扰动等特点, 提出一种自适应动态面控制方法来实现其关节轨迹跟踪控制. 控制律由动态面技术得到, 降低了反推控制器的复杂性. 模型不确定因素由递归 Elman 神经网络在线补偿, 神经网络权值自适应律通过 Lyapunov 稳定性分析推导得到. 仿真研究表明, 该方法对于载荷不确定和外界扰动具有较强的鲁棒性, 与传统动态面法相比, 大大提高了柔性关节的位置跟踪精度.

**关键词:** 柔性关节机械臂; 动态面控制; 递归 Elman 神经网络; 自适应控制

中图分类号: TP24

文献标识码: A

## Flexible-joint manipulator adaptive control based on recurrent Elman neural networks and dynamic surface approach

GU Yi-kun, NI Feng-lei, LIU Hong

(State Key Laboratory of Robotics and System, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China.

Correspondent: GU Yi-kun, E-mail: gu.yikun@yahoo.com.cn)

**Abstract:** For overcoming the nonlinearity, uncertainty and unknown external disturbance in the model of flexible-joint manipulator driven by surface-mounted permanent magnet synchronous motors(PMSM), an adaptive dynamic surface control(DSC) approach is proposed to design a position-tracking control system in the joint space. Control laws are obtained from DSC technique, which reduces the complexity of backstepping controller. The uncertainties of the model are observed and compensated online by the recurrent Elman neural networks(RENNs). And the adaptation laws of RENN's weights are induced from the Lyapunov stability analysis. The simulation studies show that the proposed method provides a good robustness against payload uncertainties and external disturbances, and the position tracking performance is improved greatly comparing with the conventional DSC method.

**Key words:** flexible joint manipulator; dynamic surface control; recurrent Elman neural networks; adaptive control

### 1 引言

轻型柔性机械臂具有质量轻、惯性小、能耗低等特点, 目前已得到广泛应用. 但随着臂杆操作速度的提高和操作载荷的增大, 减速器、传动轴等传动机构产生的弹性变形将直接影响臂杆末端的精度, 关节柔性的存在成为影响机械臂动态精度和稳定性的重要因素. 柔性关节机器人的控制算法主要有滑模控制<sup>[1]</sup>、奇异摄动<sup>[2]</sup>、反馈线性化<sup>[3]</sup>和反步设计<sup>[4-5]</sup>等. 由于机械臂动力学模型存在非线性、不确定因素以及环境干扰力、力矩特性未知和时变因素, 上述控制算法往往结合自适应控制或者鲁棒控制以具备对这些不确定因素的适应能力, 保证操作的可靠性和安全性.

反步法是非线性控制系统设计中广泛使用的一种方法, 与神经网络或模糊控制结合可以解决一大类不确定非线性系统的设计. 但是反步法需要对中间虚拟控制信号进行大量的求导计算, 导致了系统方程微分项的膨胀, 控制器设计非常复杂. 为了解决上述问题, Swaroop 等人<sup>[6]</sup>提出了动态面控制(DSC)技术, 通过构造误差面变量和低通滤波器来设计系统控制信号, 避免了设计过程中对虚拟控制信号的反复求导, 大大减小了控制律的计算量, 更易于工程实现. Wang 等人<sup>[7]</sup>将自适应 DSC 应用于 SISO 非线性系统, 并应用径向基神经网络(RBFN)解决模型不确定问题. Yoo 等人<sup>[8-9]</sup>提出了基于自回归小波神经网络

收稿日期: 2010-07-22; 修回日期: 2010-12-02.

基金项目: 国家 863 计划项目(2008AA12A213); 国家重点实验室自主部署课题项目(SKLR200801A01).

作者简介: 顾义坤(1981—), 女, 博士生, 从事空间机器人技术、智能机器人关节的研究; 刘宏(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事仿人型灵巧手、空间机器人技术等研究.

(SRWNN)的柔性关节机械臂DSC方法,更进一步将DSC扩展到MIMO系统.由于SRWNN输出容易产生剧烈的震荡,权值学习率往往设置很低,这就削弱了神经网络对于不确定因素的补偿能力,无法达到高的控制精度.

Elman神经网络(ENN)属于前馈神经网络的一种,最早应用于语音处理<sup>[10]</sup>,它具有记忆神经元和关联反馈,由于关联神经元的存在和关联层与隐含层之间的递归连接,ENN比静态神经网络具有更加优良的动态性能<sup>[11-13]</sup>.递归Elman神经网络(RENN)<sup>[14]</sup>在关联神经元处增加了一个自反馈环节,使得神经元对于输入数据的历史信息更加敏感,可以提高收敛精度,减少学习时间,并具有结构简单、运算量小的特点.

本文建立了面贴式PMSM驱动的柔性关节机械臂动力学模型,充分考虑参数不确定及外部扰动未知的影 响,采用RENN观测动力学模型中的不确定项,实现关节轨迹跟踪的自适应动态面控制.

## 2 柔性关节机械臂建模

根据Spong的假设<sup>[3]</sup>,具有 $n$ 个自由度的柔性关节机械臂模型可以表述为

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F\dot{q} + K(q - q_m) &= 0, \\ J\ddot{q}_m + B\dot{q}_m + K(q_m - q) &= \tau. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $q, q_m \in \mathbf{R}^n$  分别为连杆和电机的位置矢量;  $M(q), J \in \mathbf{R}^{n \times n}$  分别为连杆和电机端的惯量矩阵;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为连杆离心力与哥氏力项矩阵;  $G(q) \in \mathbf{R}^n$  为连杆重力向量;  $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为与连杆轴承相关的摩擦矩阵;  $K \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为关节刚度矩阵;  $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为与电机轴承相关的阻尼矩阵;  $\tau \in \mathbf{R}^n$  为控制力矩向量;  $F, K, J, B$  均为常正定对角阵.

结合式(1)与PMSM在 $dq$ 坐标系下的数学模型<sup>[15]</sup>,建立采用面贴式PMSM驱动时的柔性关节机械臂动力学模型为

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F\dot{q} + K(q - q_m) &= 0, \\ J\ddot{q}_m + B\dot{q}_m + K(q_m - q) &= Hi_q, \\ Li_q + Ri_q + L\dot{Q}_m i_d + Ke\dot{q}_m &= u_q, \\ Li_d + Ri_d - L\dot{Q}_m i_q &= u_d. \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为转矩系数;  $L, R \in \mathbf{R}^{n \times n}$  分别为电机定子绕组的电感和电阻;  $Ke \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为相电势系数;  $i_d, i_q \in \mathbf{R}^n$  分别为电机 $d$ 轴和 $q$ 轴的电流矢量;  $u_d, u_q \in \mathbf{R}^n$  分别为电机定子绕组 $d$ 轴和 $q$ 轴的电压;  $\dot{Q}_m$  为电机速度的对角阵,  $\dot{Q}_m = \text{diag}[\dot{q}_{m,i}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $H, L, R, Ke$  均为常正定对角阵. 对于该模型,具有如下基本性质<sup>[9]</sup>:

**性质 1** 连杆惯量矩阵  $M(q)$  是正定对称的, 满

足  $M_m \leq \|M(q)\|_2 \leq M_M$ ,  $M_m$  和  $M_M$  是正实数.

**性质 2**  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为斜对称矩阵, 即对于任意矢量  $x$  均有  $x^T(\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}))x = 0$ .

**性质 3**  $\|C(q, \dot{q})\|_2 \leq C_M$ ,  $C_M$  是正实数.

式(2)中各参数采用的是名义值, 然而实际系统的参数总是与名义值存在差别. 当采用模型参数的实际值, 同时考虑关节端、电机端受到的扰动力矩  $T_r$  和  $T_m$ , 定子电压的扰动电压  $T_q$  和  $T_d$  时, 实际的机械臂动力学模型可以表达为

$$\begin{aligned} \bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \bar{G}(q) + \bar{F}\dot{q} + \bar{K}(q - q_m) + T_r &= 0, \\ \bar{J}\ddot{q}_m + \bar{B}\dot{q}_m + \bar{K}(q_m - q) + T_m &= \bar{H}i_q, \\ \bar{L}\dot{i}_q + \bar{R}i_q + \bar{L}\dot{Q}_m i_d + \bar{K}_e \dot{q}_m + T_q &= u_q, \\ \bar{L}\dot{i}_d + \bar{R}i_d - \bar{L}\dot{Q}_m i_q + T_d &= u_d. \end{aligned} \quad (3)$$

如果采用模型参数的名义值, 则式(3)可表示为

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F\dot{q} + \\ K(q - q_m) - \Omega_r(q, \dot{q}, q_m) &= 0, \\ J\ddot{q}_m + B\dot{q}_m + K(q_m - q) - \Omega_m(q, q_m, \dot{q}_m, i_q) &= Hi_q, \\ Li_q + Ri_q + L\dot{Q}_m i_d + Ke\dot{q}_m - \Omega_q(\dot{q}_m, i_q, i_d, u_q) &= u_q, \\ Li_d + Ri_d - L\dot{Q}_m i_q - \Omega_d(\dot{q}_m, i_q, i_d, u_d) &= u_d. \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_r(q, \dot{q}, q_m) &= \\ M(q)\bar{M}^{-1}(q)[\bar{K}(q_m - q) - T_r - \bar{F}\dot{q} - \bar{G}(q) - \\ \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q}] - [K(q_m - q) - F\dot{q} - G(q) - C(q, \dot{q})\dot{q}], \\ \Omega_m(q, q_m, \dot{q}_m, i_q) &= \\ J\bar{J}^{-1}[\bar{H}i_q - T_m - \bar{K}(q_m - q) - \bar{B}\dot{q}_m] - \\ [Hi_q - K(q_m - q) - B\dot{q}_m], \\ \Omega_q(\dot{q}_m, i_q, i_d, u_q) &= \\ L\bar{L}^{-1}[u_q - T_q - \bar{R}i_q - \bar{L}\dot{Q}_m i_d - \bar{K}_e \dot{q}_m] - \\ [u_q - Ri_q - L\dot{Q}_m i_d - Ke\dot{q}_m], \\ \Omega_d(\dot{q}_m, i_q, i_d, u_d) &= \\ L\bar{L}^{-1}[u_d - T_d - \bar{R}i_d + \bar{L}\dot{Q}_m i_q] - [u_d - Ri_d + L\dot{Q}_m i_q]. \end{aligned}$$

为了解决求解  $u_q, u_d, \Omega_q, \Omega_d$  时引发的代数运算循环问题, 将输入量  $u_q$  和  $u_d$  经低通滤波器得到  $u_{qf}$  和  $u_{df}$ , 因此不确定项的表达式演变为  $\Omega_q(\dot{q}_m, i_q, i_d, u_{qf})$  和  $\Omega_d(\dot{q}_m, i_q, i_d, u_{df})$ .

定义状态空间变量  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}, x_3 = q_m, x_4 = \dot{q}_m, x_5 = i_q, x_6 = i_d$ , 将柔性关节机械臂模型(4)改写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ M(x_1)\dot{x}_2 &= -C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) - Fx_2 - \\ K(x_1 - x_3) + \Omega_r(x_r), \end{aligned} \quad (5)$$

$$J\dot{x}_4 = -Bx_4 + Hx_5, \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4, \quad (7)$$

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{x}}_4 = -\mathbf{B}\mathbf{x}_4 - \mathbf{K}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{H}\mathbf{x}_5 + \Omega_m(\mathbf{x}_m), \quad (8)$$

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}_5 = -\mathbf{R}\mathbf{x}_5 - \mathbf{L}\mathbf{X}_4\mathbf{x}_6 - \mathbf{K}_e\mathbf{x}_4 + \mathbf{u}_q + \Omega_q(\mathbf{x}_q), \quad (9)$$

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}_6 = -\mathbf{R}\mathbf{x}_6 + \mathbf{L}\mathbf{X}_4\mathbf{x}_5 + \mathbf{u}_d + \Omega_d(\mathbf{x}_d). \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r &= [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \mathbf{x}_3^T], \mathbf{x}_m = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_3^T, \mathbf{x}_4^T, \mathbf{x}_5^T], \\ \mathbf{x}_q &= [\mathbf{x}_4^T, \mathbf{x}_5^T, \mathbf{x}_6^T, \mathbf{u}_{qf}^T], \mathbf{x}_d = [\mathbf{x}_4^T, \mathbf{x}_5^T, \mathbf{x}_6^T, \mathbf{u}_{df}^T], \\ \mathbf{X}_4 &= \text{diag}[x_{4,i}], i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

不确定项  $\Omega_j(\cdot)$  ( $j = r, m, q, d$ ) 无法直接计算得到, 因此引入神经网络的观测结果  $\hat{\Omega}_j(\cdot)$  来近似  $\Omega_j(\cdot)$ .

### 3 递归 Elman 神经网络

RENN 的结构如图 1 所示, 它包含  $N_i$  个输入单元,  $N_j$  个隐含单元,  $N_k$  个关联单元和 1 个输出, 具有 4 层结构<sup>[14]</sup>:

1) 输入层. 接收输入变量  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_i$ ), 并将输入变量直接输出.

2) 隐含层. 这一层的节点采用 sigmoid 函数  $S(x) = 1/(1 + \exp(-x))$ ,  $S_j(z_j)$  为输出,  $z_j$  为第  $j$  个节点的输入, 有

$$z_j = \sum_{i=0}^{N_i} \alpha_{ij}x_i + \sum_{k=0}^{N_k} \beta_{kj}x_k^c, j = 1, 2, \dots, N_j. \quad (11)$$

其中:  $x_i$  为第  $i$  个输入单元,  $x_k^c$  为第  $k$  个关联单元的输入,  $\alpha_{ij}$  为第  $i$  个输入单元到第  $j$  个隐含单元的权值,  $\beta_{kj}$  为第  $k$  个关联单元到第  $j$  个隐含单元的权值.

3) 关联层. 这一层的输出可以表示为

$$x_k^c = S_k(z_k)z^{-1} + x_k^c z^{-1}\gamma_k, k = 1, 2, \dots, N_k. \quad (12)$$

其中:  $0 \leq \gamma_k < 1$  为自反馈环权值,  $z^{-1}$  为时间延时.

4) 输出层. 可以表示为

$$y = \sum_{j=1}^{N_j} w_j S_j(z_j), \quad (13)$$

其中  $w_j$  为连接隐含层和输出层之间的权值.

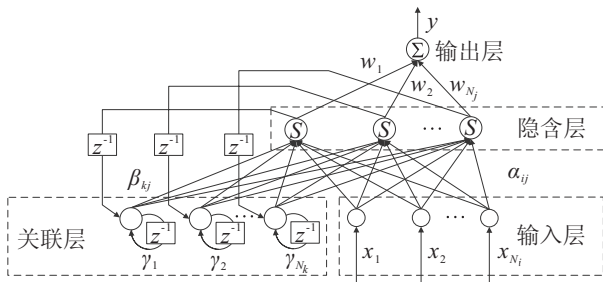


图 1 递归 Elman 神经网络的结构

RENN 权值  $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{N_i N_j + N_k N_j + N_k + N_j}$  表示为

$$\mathbf{W} = [\alpha_{ij}, \beta_{kj}, \gamma_k, w_j]^T,$$

$$1 \leq i \leq N_i, 1 \leq j \leq N_j, 1 \leq k \leq N_k. \quad (14)$$

通过 RENN 的输出  $\hat{\Omega}_j(\cdot)$  来近似不确定项  $\Omega_j(\cdot)$ , 表示为

$$\begin{aligned} \Omega_j(\mathbf{x}_j) &= \hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\hat{\mathbf{W}}_j) + [\hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{W}_j^*) - \\ &\hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\hat{\mathbf{W}}_j)] + \epsilon_j(\mathbf{x}_j). \end{aligned} \quad (15)$$

其中:  $\epsilon_j(\mathbf{x}_j)$  为最优重构误差,  $\|\epsilon_j(\mathbf{x}_j)\| \leq \epsilon_{j,M}$ ,  $\epsilon_{j,M}$  为正的实数;  $\hat{\mathbf{W}}_j$  为  $\hat{\Omega}_j(\cdot)$  的估计权值矩阵,  $\hat{\mathbf{W}}_j = \text{diag}[\hat{W}_{j,i}], j = r, m, q, d, i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mathbf{W}_j^*$  为  $\hat{\Omega}_j(\cdot)$  的最优权值矩阵, 定义为

$$\mathbf{W}_j^* = \arg \min_{\hat{\mathbf{W}}_j \in \kappa_{W_j}} [\sup_{\mathbf{x}_j \in \kappa_{x_j}} \|\Omega_j(\mathbf{x}_j) - \hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\hat{\mathbf{W}}_j)\|], \quad (16)$$

$\kappa_{W_j}$  和  $\kappa_{x_j}$  分别为权值矢量  $\mathbf{W}_j$  和输入  $\mathbf{x}_j$  的紧集.  $\|\mathbf{W}_j^*\|_F \leq W_{j,M}$ ,  $\|\cdot\|_F$  为 Frobenius 范数.

为了在下面的设计中通过 Lyapunov 稳定性理论推导 RENN 系统权值的在线学习法则, 将 RENN 的输出进行线性化处理, 将  $\hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{W}_j^*)$  在  $\hat{\mathbf{W}}_j$  进行泰勒展开, 可以得到

$$\hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{W}_j^*) - \hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\hat{\mathbf{W}}_j) = \tilde{\mathbf{W}}_j^T \Theta_j + \mathbf{H}_j(\mathbf{W}_j^*, \hat{\mathbf{W}}_j). \quad (17)$$

其中:  $\mathbf{H}_j(\mathbf{W}_j^*, \hat{\mathbf{W}}_j)$  为高次项;  $\tilde{\mathbf{W}}_j$  为最优权值矩阵与估计权值矩阵之差, 且  $\tilde{\mathbf{W}}_j = \mathbf{W}_j^* - \hat{\mathbf{W}}_j(t)$ ;  $\Theta_j$  为  $\hat{\Omega}_j(\cdot)$  对权值的偏导数, 有

$$\Theta_j = \left[ \frac{\partial \hat{\Omega}_{j,1}}{\partial \hat{W}_{j,1}}, \frac{\partial \hat{\Omega}_{j,2}}{\partial \hat{W}_{j,2}}, \dots, \frac{\partial \hat{\Omega}_{j,n}}{\partial \hat{W}_{j,n}} \right]^T.$$

将式 (17) 代入 (15), 可以得到

$$\Omega_j(\mathbf{x}_j) = \hat{\Omega}_j(\mathbf{x}_j|\hat{\mathbf{W}}_j) + \tilde{\mathbf{W}}_j^T \Theta_j + \alpha_j, \quad (18)$$

其中  $\alpha_j$  为泰勒展开高次项与最优重构误差之和,  $\alpha_j = \mathbf{H}_j(\mathbf{W}_j^*, \hat{\mathbf{W}}_j) + \epsilon_j(\mathbf{x}_j)$ ,  $\|\alpha_j\| \leq \rho_j$ ,  $\rho_j$  为正实数.

### 4 控制器设计

基于动态面的控制算法仍采用反步法的递归设计思想, 将复杂非线性系统分解成不超过系统阶数的子系统, 为每个子系统设计中虚拟控制量, 一直后退到整个系统, 完成整个控制器的设计. 步骤如下:

**Step 1** 定义第 1 个误差面矢量  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{q}_d$ ,  $\mathbf{S}_1$  对时间求导为  $\dot{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{q}}_d$ , 选择虚拟控制矢量为

$$\bar{\mathbf{x}}_2 = -k_1 \mathbf{S}_1 + \dot{\mathbf{q}}_d, \quad (19)$$

其中  $k_1 > 0$  为控制器参数.

由反步法得到  $\bar{\mathbf{x}}_2$  后, 在设计下一个子系统的虚拟控制律时要对  $\bar{\mathbf{x}}_2$  进行求导运算, 增加了控制律的复杂性. 而动态面方法将  $\bar{\mathbf{x}}_2$  通过低通滤波器得到其估计值, 在设计下一个子系统时, 只需要用滤波后的值代替虚拟控制量即可, 无需对  $\bar{\mathbf{x}}_2$  求导, 避免了反推法的计算膨胀问题. 将  $\bar{\mathbf{x}}_2$  经过一阶滤波器, 得到滤波后的值  $\mathbf{x}_{2f}$ , 有

$$\tau_2 \dot{\mathbf{x}}_{2f} + \mathbf{x}_{2f} = \bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_{2f}(0) = \bar{\mathbf{x}}_2(0), \quad (20)$$

其中  $\tau_2 > 0$  为滤波器的时间常数.

**Step 2** 定义第 2 个误差面矢量  $\mathbf{S}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{2f}$ , 将  $\mathbf{S}_2$  对时间求导并代入式 (6) 和 (20) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_2 &= \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_{2f} = \\ & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)[-C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 - \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2 - \\ & \mathbf{K}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) + \Omega_r(\mathbf{x}_r)] - (\bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_{2f})/\tau_2. \end{aligned} \quad (21)$$

选择虚拟控制矢量  $\bar{\mathbf{x}}_3$ , 应用 RENN 的观测值有

$$\bar{\mathbf{x}}_3 =$$

$$\mathbf{K}^{-1}\{\mathbf{K}\mathbf{x}_1 + C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{F}\mathbf{x}_2 - \hat{\Omega}_r(\mathbf{x}_r|\hat{\mathbf{W}}_r) - \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)[k_2\mathbf{S}_2 - (\bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_{2f})/\tau_2]\}, \quad (22)$$

其中  $k_2 > 0$  为控制器参数.

将  $\bar{\mathbf{x}}_3$  经过一阶滤波器, 得到滤波后的值  $\mathbf{x}_{3f}$ , 有

$$\tau_3\dot{\mathbf{x}}_{3f} + \mathbf{x}_{3f} = \bar{\mathbf{x}}_3, \quad \mathbf{x}_{3f}(0) = \bar{\mathbf{x}}_3(0), \quad (23)$$

其中  $\tau_3 > 0$  为时间常数.

**Step 3** 定义第 3 个误差面矢量  $\mathbf{S}_3 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_{3f}$ , 将  $\mathbf{S}_3$  对时间求导为  $\dot{\mathbf{S}}_3 = \mathbf{x}_4 - \dot{\mathbf{x}}_{3f}$ , 选择虚拟控制矢量  $\bar{\mathbf{x}}_4$ , 并代入式 (23) 可得

$$\bar{\mathbf{x}}_4 = -k_3\mathbf{S}_3 + (\bar{\mathbf{x}}_3 - \mathbf{x}_{3f})/\tau_3, \quad (24)$$

其中  $k_3 > 0$  为控制器参数.

将  $\bar{\mathbf{x}}_4$  经过一阶滤波器, 得到滤波后的值  $\mathbf{x}_{4f}$ , 有

$$\tau_4\dot{\mathbf{x}}_{4f} + \mathbf{x}_{4f} = \bar{\mathbf{x}}_4, \quad \mathbf{x}_{4f}(0) = \bar{\mathbf{x}}_4(0), \quad (25)$$

其中  $\tau_4 > 0$  为时间常数.

**Step 4** 定义第 4 个误差面矢量  $\mathbf{S}_4 = \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_{4f}$ , 将  $\mathbf{S}_4$  对时间求导并代入式 (8) 和 (25) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_4 &= \dot{\mathbf{x}}_4 - \dot{\mathbf{x}}_{4f} = \mathbf{J}^{-1}[-\mathbf{B}\mathbf{x}_4 - \mathbf{K}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{H}\mathbf{x}_5 + \\ & \Omega_m(\mathbf{x}_m)] - (\bar{\mathbf{x}}_4 - \mathbf{x}_{4f})/\tau_4. \end{aligned} \quad (26)$$

选择虚拟控制矢量  $\bar{\mathbf{x}}_5$ , 应用 RENN 的观测值有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_5 &= \mathbf{H}^{-1}\{\mathbf{B}\mathbf{x}_4 + \mathbf{K}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) - \hat{\Omega}_m(\mathbf{x}_m|\hat{\mathbf{W}}_m) + \\ & \mathbf{J}[-k_4\mathbf{S}_4 + (\bar{\mathbf{x}}_4 - \mathbf{x}_{4f})/\tau_4]\}, \end{aligned} \quad (27)$$

其中  $k_4 > 0$  为控制器参数.

将  $\bar{\mathbf{x}}_5$  经过一阶滤波器, 得到滤波后的值  $\mathbf{x}_{5f}$ , 有

$$\tau_5\dot{\mathbf{x}}_{5f} + \mathbf{x}_{5f} = \bar{\mathbf{x}}_5, \quad \mathbf{x}_{5f}(0) = \bar{\mathbf{x}}_5(0), \quad (28)$$

其中  $\tau_5 > 0$  为时间常数.

**Step 5** 定义第 5 个误差面矢量  $\mathbf{S}_5 = \mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_{5f}$ , 将  $\mathbf{S}_5$  对时间求导并代入式 (9) 和 (28) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_5 &= \dot{\mathbf{x}}_5 - \dot{\mathbf{x}}_{5f} = \mathbf{L}^{-1}[-\mathbf{R}\mathbf{x}_5 - \mathbf{L}\mathbf{X}_4\mathbf{x}_6 - \mathbf{K}_e\mathbf{x}_4 + \mathbf{u}_q + \\ & \Omega_q(\mathbf{x}_q)] - (\bar{\mathbf{x}}_5 - \mathbf{x}_{5f})/\tau_5. \end{aligned} \quad (29)$$

选择实际控制量  $\mathbf{u}_q$ , 应用 RENN 的观测值有

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_q &= \mathbf{R}\mathbf{x}_5 + \mathbf{L}\mathbf{X}_4\mathbf{x}_6 + \mathbf{K}_e\mathbf{x}_4 - \hat{\Omega}_q(\mathbf{x}_q|\hat{\mathbf{W}}_q) + \\ & \mathbf{L}[-k_5\mathbf{S}_5 + (\bar{\mathbf{x}}_5 - \mathbf{x}_{5f})/\tau_5], \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $k_5 > 0$  为控制器参数.

**Step 6** 定义第 6 个误差面矢量  $\mathbf{S}_6 = \mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_{6d}$ ,  $\mathbf{x}_{6d}$  为  $i_d$  的期望值, 采用  $i_d = 0$  控制方式时,  $\dot{\mathbf{x}}_{6d} = \mathbf{x}_{6d} = 0$ . 将  $\mathbf{S}_6$  对时间求导并代入式 (10) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_6 &= \dot{\mathbf{x}}_6 - \dot{\mathbf{x}}_{6d} = \\ & \mathbf{L}^{-1}[-\mathbf{R}\mathbf{x}_6 + \mathbf{L}\mathbf{X}_4\mathbf{x}_5 + \mathbf{u}_d + \Omega_d(\mathbf{x}_d)]. \end{aligned} \quad (31)$$

选择实际控制量  $\mathbf{u}_d$ , 应用 RENN 的观测值有

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{R}\mathbf{x}_6 - \mathbf{L}\mathbf{X}_4\mathbf{x}_5 - \hat{\Omega}_d(\mathbf{x}_d|\hat{\mathbf{W}}_d) - \mathbf{L}k_6\mathbf{S}_6, \quad (32)$$

其中  $k_6 > 0$  为控制器参数.

## 5 稳定性分析

定义边界层误差为  $\bar{y}_i = \mathbf{x}_{jf} - \bar{\mathbf{x}}_j$ ,  $j = 2, 3, 4, 5$ . 由式 (19), (22), (24) 和 (27) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 &= \mathbf{x}_{2f} + k_1\mathbf{S}_1 - \dot{\mathbf{q}}_d, \\ \mathbf{y}_3 &= \mathbf{x}_{3f} - \mathbf{K}^{-1}\{\mathbf{K}\mathbf{x}_1 + C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{F}\mathbf{x}_2 - \\ & \hat{\Omega}_r(\mathbf{x}_r|\hat{\mathbf{W}}_r) - \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)(k_2\mathbf{S}_2 + \mathbf{y}_2/\tau_2)\}, \\ \mathbf{y}_4 &= \mathbf{x}_{4f} + k_3\mathbf{S}_3 + \mathbf{y}_3/\tau_3, \\ \mathbf{y}_5 &= \mathbf{x}_{5f} - \mathbf{H}^{-1}\{\mathbf{B}\mathbf{x}_4 + \mathbf{K}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) - \hat{\Omega}_m(\mathbf{x}_m|\hat{\mathbf{W}}_m) - \\ & \mathbf{J}(k_4\mathbf{S}_4 + \mathbf{y}_4/\tau_4)\}. \end{aligned} \quad (33)$$

控制器中 6 个误差面的导数为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_1 &= \mathbf{S}_2 + \mathbf{y}_2 - k_1\mathbf{S}_1, \\ \dot{\mathbf{S}}_2 &= -k_2\mathbf{S}_2 + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)[\mathbf{K}(\mathbf{y}_3 + \mathbf{S}_3) + \tilde{\mathbf{W}}_r^T\Theta_r + \alpha_r], \\ \dot{\mathbf{S}}_3 &= \mathbf{S}_4 + \mathbf{y}_4 - k_3\mathbf{S}_3, \\ \dot{\mathbf{S}}_4 &= \mathbf{J}^{-1}[\mathbf{H}(\mathbf{y}_5 + \mathbf{S}_5) + \tilde{\mathbf{W}}_m^T\Theta_m + \alpha_m] - k_4\mathbf{S}_4, \\ \dot{\mathbf{S}}_5 &= -k_5\mathbf{S}_5 + \mathbf{L}^{-1}(\tilde{\mathbf{W}}_q^T\Theta_q + \alpha_q), \\ \dot{\mathbf{S}}_6 &= -k_6\mathbf{S}_6 + \mathbf{L}^{-1}(\tilde{\mathbf{W}}_d^T\Theta_d + \alpha_d). \end{aligned} \quad (34)$$

将式 (33) 对时间求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_2 &= -\mathbf{y}_2/\tau_2 + \mathbf{P}_2(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{q}_d), \\ \dot{\mathbf{y}}_3 &= -\mathbf{y}_3/\tau_3 + \mathbf{P}_3(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dot{\mathbf{W}}_r, \mathbf{q}_d), \\ \dot{\mathbf{y}}_4 &= -\mathbf{y}_4/\tau_4 + \mathbf{P}_4(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \dot{\mathbf{W}}_r, \mathbf{q}_d), \\ \dot{\mathbf{y}}_5 &= -\mathbf{y}_5/\tau_5 + \mathbf{P}_5(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5, \\ & \dot{\mathbf{W}}_r, \dot{\mathbf{W}}_m, \mathbf{q}_d). \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_d &= [\mathbf{q}_d^T, \dot{\mathbf{q}}_d^T, \ddot{\mathbf{q}}_d^T]^T; \\ \mathbf{P}_2(\cdot) &= k_1\dot{\mathbf{S}}_1 - \dot{\mathbf{q}}_d, \quad \|\mathbf{P}_2\| \leq P_2, \quad P_2 > 0; \\ \mathbf{P}_3(\cdot) &= -\mathbf{K}^{-1}\left\{\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}_1 + \left(\dot{\mathbf{x}}_1^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}_1} + \dot{\mathbf{x}}_2^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}_2}\right)\mathbf{x}_2 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_2 + \right. \\ & \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}_1}\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}_2 - \frac{\partial \hat{\Omega}_r}{\partial \mathbf{x}_r}\dot{\mathbf{x}}_r - \frac{\partial \hat{\Omega}_r}{\partial \hat{\mathbf{W}}_r}\dot{\mathbf{W}}_r - \right. \\ & \left. \dot{\mathbf{x}}_1^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}_1}(k_2\mathbf{S}_2 + \mathbf{y}_2/\tau_2) - \mathbf{M}(k_2\dot{\mathbf{S}}_2 + \dot{\mathbf{y}}_2/\tau_2)\right\}, \\ & \|\mathbf{P}_3\| \leq P_3, \quad P_3 > 0; \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_4(\cdot) = k_3 \dot{\mathbf{S}}_3 + \dot{\mathbf{y}}_3 / \tau_3, \|\mathbf{P}_4\| \leq P_4, P_4 > 0;$$

$$\mathbf{P}_5(\cdot) = -\mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}}_4 + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{x}}_3 - \dot{\mathbf{x}}_1) - \frac{\partial \hat{\Omega}_m}{\partial \mathbf{x}_m} \dot{\mathbf{x}}_m - \frac{\partial \hat{\Omega}_a}{\partial \hat{\mathbf{W}}_a} \hat{\mathbf{W}}_a - \mathbf{J}(k_4 \dot{\mathbf{S}}_4 + \dot{\mathbf{y}}_4 / \tau_4) \right\},$$

$$\|\mathbf{P}_5\| \leq P_5, P_5 > 0.$$

设计 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2^T \mathbf{M}(\mathbf{x}_1) \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3^T \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4^T \mathbf{J} \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_5^T \mathbf{L} \mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_6^T \mathbf{L} \mathbf{S}_6 + \sum_{k=2}^5 \mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_k + \sum_{j=r,m,q,d} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_j^T \lambda_j^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_j) \right], \quad (36)$$

其中  $\lambda_j$  为权值的学习率矩阵,  $\lambda_j = \text{diag}[\lambda_{j,i}]$ ,  $\lambda_{j,i} > 0$ ,  $j = r, m, q, d$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**定理 1** 带有模型不确定性的柔性关节机械臂 (4) 采用控制律 (30) 和 (32), 初始条件满足  $V \leq \mu$  ( $\mu$  为任意正实数), RENN 权值自适应律选择如下:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{W}}}_{r,i} &= \lambda_{r,i} \theta_{r,i} S_{2,i} - \eta_r \lambda_{r,i} \hat{\mathbf{W}}_{r,i}, \\ \dot{\hat{\mathbf{W}}}_{m,i} &= \lambda_{m,i} \theta_{m,i} S_{4,i} - \eta_m \lambda_{m,i} \hat{\mathbf{W}}_{m,i}, \\ \dot{\hat{\mathbf{W}}}_{q,i} &= \lambda_{q,i} \theta_{q,i} S_{5,i} - \eta_q \lambda_{q,i} \hat{\mathbf{W}}_{q,i}, \\ \dot{\hat{\mathbf{W}}}_{d,i} &= \lambda_{d,i} \theta_{d,i} S_{6,i} - \eta_d \lambda_{d,i} \hat{\mathbf{W}}_{d,i}. \end{aligned} \quad (37)$$

其中:  $S_{2,i}, S_{4,i}, S_{5,i}$  分别为误差面矢量  $\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5$  第  $i$  项;  $\theta_{r,i}, \theta_{m,i}, \theta_{q,i}, \theta_{d,i}$  分别为  $\theta_r, \theta_m, \theta_q$  和  $\theta_d$  第  $i$  项,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\eta_r, \eta_m, \eta_q, \eta_d > 0$  为增益调整系数.

选择适当控制器参数  $k_l, \tau_k, \lambda_j$  和  $\eta_j$  ( $l = 1, 2, \dots, 6, k = 2, 3, 4, 5, j = r, m, q, d$ ), 可以保证闭环系统状态及神经网络调整权值的误差均为有界, 且稳态跟踪误差可以小于任意预定值.

**证明** 将式 (36) 对时间求导有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{S}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{S}_2^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_1) \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2^T \mathbf{M}(\mathbf{x}_1) \dot{\mathbf{S}}_2 + \mathbf{S}_3^T \dot{\mathbf{S}}_3 + \mathbf{S}_4^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{S}}_4 + \\ &\mathbf{S}_5^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{S}}_5 + \mathbf{S}_6^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{S}}_6 + \sum_{k=2}^5 \mathbf{y}_k^T \dot{\mathbf{y}}_k - \sum_{j=r,m,q,d} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_j^T \lambda_j^{-1} \dot{\hat{\mathbf{W}}}_j). \end{aligned} \quad (38)$$

将式 (34), (35), (37) 代入 (38), 考虑性质 2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \|\mathbf{S}_1\| \|\mathbf{S}_2\| + \|\mathbf{S}_1\| \|\mathbf{y}_2\| - k_1 \|\mathbf{S}_1\|^2 + \|\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\|_2 \|\mathbf{S}_2\|^2 - \\ &k_2 \|\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\|_2 \|\mathbf{S}_2\|^2 + \|\mathbf{K}\|_2 \|\mathbf{S}_2\| \|\mathbf{y}_3\| + \|\mathbf{K}\|_2 \|\mathbf{S}_2\| \|\mathbf{S}_3\| + \\ &\|\mathbf{S}_2\| \|\alpha_r\| + \|\mathbf{S}_3\| \|\mathbf{S}_4\| + \|\mathbf{S}_3\| \|\mathbf{y}_4\| - k_3 \|\mathbf{S}_3\|^2 - \\ &k_4 \|\mathbf{J}\|_2 \|\mathbf{S}_4\|^2 + \|\mathbf{H}\|_2 \|\mathbf{S}_4\| \|\mathbf{y}_5\| + \|\mathbf{H}\|_2 \|\mathbf{S}_4\| \|\mathbf{S}_5\| + \\ &\|\mathbf{S}_4\| \|\alpha_m\| - k_5 \|\mathbf{L}\|_2 \|\mathbf{S}_5\|^2 + \|\mathbf{S}_5\| \|\alpha_q\| - \\ &k_6 \|\mathbf{L}\|_2 \|\mathbf{S}_6\|^2 + \|\mathbf{S}_6\| \|\alpha_d\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^5 (-\|\mathbf{y}_k\|^2 / \tau_k + \|\mathbf{y}_k\| \|\mathbf{P}_k\|) + \eta_r \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_r^T \tilde{\mathbf{W}}_r) + \\ &\eta_m \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_m^T \tilde{\mathbf{W}}_m) + \eta_q \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_q^T \tilde{\mathbf{W}}_q) + \eta_d \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_d^T \tilde{\mathbf{W}}_d). \end{aligned} \quad (39)$$

考虑性质 1 和性质 3, 将  $\|\alpha_j\| \leq \rho_j, \|\mathbf{W}_j^*\|_F \leq W_{j,M}, \tilde{\mathbf{W}}_j = \mathbf{W}_j^* - \hat{\mathbf{W}}_j(t)$  和  $\|\mathbf{P}_k\| \leq P_k$  代入 (39), 采用杨氏不等式对其进行进一步化简可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \|\mathbf{S}_1\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{S}_2\|^2 + \|\mathbf{S}_1\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{y}_2\|^2 - k_1 \|\mathbf{S}_1\|^2 + \\ &C_M \|\mathbf{S}_2\|^2 - k_2 M_M \|\mathbf{S}_2\|^2 + \mathbf{K}_M (\|\mathbf{S}_2\|^2 + \|\mathbf{y}_3\|^2 / 4) + \\ &\mathbf{K}_M (\|\mathbf{S}_2\|^2 + \|\mathbf{S}_3\|^2 / 4) + \|\mathbf{S}_2\|^2 + \rho_r^2 / 4 + \|\mathbf{S}_3\|^2 + \\ &\frac{1}{4} \|\mathbf{S}_4\|^2 + \|\mathbf{S}_3\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{y}_4\|^2 - k_3 \|\mathbf{S}_3\|^2 - k_4 \mathbf{J}_M \|\mathbf{S}_4\|^2 + \\ &\mathbf{H}_M (\|\mathbf{S}_4\|^2 + \|\mathbf{y}_5\|^2 / 4) + \mathbf{H}_M (\|\mathbf{S}_4\|^2 + \|\mathbf{S}_5\|^2 / 4) + \\ &\|\mathbf{S}_4\|^2 + \rho_m^2 / 4 - k_5 \mathbf{L}_M \|\mathbf{S}_5\|^2 + \|\mathbf{S}_5\|^2 + \rho_q^2 / 4 - \\ &k_6 \mathbf{L}_M \|\mathbf{S}_6\|^2 + \|\mathbf{S}_6\|^2 + \rho_d^2 / 4 + \sum_{k=2}^5 (-\|\mathbf{y}_k\|^2 / \tau_k + \\ &\|\mathbf{y}_k\|^2 + P_k^2 / 4) + \eta_r (\|\tilde{\mathbf{W}}_r\|_F W_{r,M} - \|\tilde{\mathbf{W}}_r\|_F^2) + \\ &\eta_m (\|\tilde{\mathbf{W}}_m\|_F W_{m,M} - \|\tilde{\mathbf{W}}_m\|_F^2) + \eta_q (\|\tilde{\mathbf{W}}_q\|_F W_{q,M} - \\ &\|\tilde{\mathbf{W}}_q\|_F^2) + \eta_d (\|\tilde{\mathbf{W}}_d\|_F W_{d,M} - \|\tilde{\mathbf{W}}_d\|_F^2), \end{aligned} \quad (40)$$

其中  $K_M, J_M, H_M, L_M$  分别为矩阵  $\mathbf{K}, \mathbf{J}, \mathbf{H}, \mathbf{L}$  的最大特征值. 令

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 + k_1^*, k_2 = (5/4 + C_M + 2K_M + k_2^*) / M_M, \\ k_3 &= 2 + K_M / 4 + k_3^*, k_4 = (5/4 + 2H_M + k_4^*) / J_M, \\ k_5 &= (1 + H_M / 4 + k_5^*) / L_M, k_6 = (1 + k_6^*) / L_M, \\ 1/\tau_2 &= 5/4 + \tau_2^*, 1/\tau_3 = 1 + K_M / 4 + \tau_3^*, \\ 1/\tau_4 &= 5/4 + \tau_4^*, 1/\tau_5 = 1 + H_M / 4 + \tau_5^*. \end{aligned}$$

式 (40) 进一步整理为

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - \sum_{l=1}^6 k_l^* \|\mathbf{S}_l\|^2 - \sum_{k=2}^5 \tau_k^* \|\mathbf{y}_k\|^2 - \frac{1}{2} \eta_r \|\tilde{\mathbf{W}}_r\|_F^2 - \\ &\frac{1}{2} \eta_m \|\tilde{\mathbf{W}}_m\|_F^2 - \frac{1}{2} \eta_q \|\tilde{\mathbf{W}}_q\|_F^2 - \frac{1}{2} \eta_d \|\tilde{\mathbf{W}}_d\|_F^2 + \Gamma. \end{aligned} \quad (41)$$

其中

$$\begin{aligned} k_l^* &> 0, \tau_k^* > 0, \\ \Gamma &= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^5 P_k^2 + \frac{1}{4} \rho_r^2 + \frac{1}{4} \rho_m^2 + \frac{1}{4} \rho_q^2 + \frac{1}{4} \rho_d^2 + \\ &\frac{1}{2} \eta_r W_{r,M}^2 + \frac{1}{2} \eta_m W_{m,M}^2 + \frac{1}{2} \eta_q W_{q,M}^2 + \frac{1}{2} \eta_d W_{d,M}^2. \end{aligned}$$

取实数  $\sigma$  满足

$$\begin{aligned} 0 < \sigma < \min \left[ k_1^*, k_2^* / M_M, k_3^*, k_4^* / J_M, k_5^* / L_M, k_6^* / L_M, \right. \\ &\left. \tau_2^*, \tau_3^*, \tau_4^*, \tau_5^*, \frac{1}{2} (\eta_r \lambda_{r,m}), \frac{1}{2} (\eta_m \lambda_{m,m}), \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\eta_q \lambda_{q,m}), \frac{1}{2}(\eta_d \lambda_{d,m})], \quad (42)$$

其中  $\lambda_{r,m}, \lambda_{m,m}, \lambda_{q,m}, \lambda_{d,m}$  分别为矩阵  $\lambda_r, \lambda_m, \lambda_q, \lambda_d$  的最小特征值. 因此, 式 (41) 可以表示为

$$\dot{V} \leq -2\sigma V + \Gamma. \quad (43)$$

令  $\sigma > \Gamma/2\mu$ , 当  $V = \mu$  时,  $\dot{V} \leq 0$ , 因此  $V \leq \mu$  是不变集. 即如果  $V(0) \leq \mu$ , 则对于所有的  $t \geq 0$  有  $V(t) \leq \mu$ . 另外, 闭环系统的误差 (误差面矢量  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_6$ ; 边界层误差  $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5$ ; 权值估计误差  $\tilde{\mathbf{W}}_r, \tilde{\mathbf{W}}_m, \tilde{\mathbf{W}}_q, \tilde{\mathbf{W}}_d$ ) 均为有界并属于紧集  $E$ , 即

$$E = \left\{ \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_6, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_5, \tilde{\mathbf{W}}_r, \tilde{\mathbf{W}}_m, \tilde{\mathbf{W}}_q, \tilde{\mathbf{W}}_d \mid \|\mathbf{S}_1\|^2 + \mathbf{M}_m \|\mathbf{S}_2\|^2 + \|\mathbf{S}_3\|^2 + \mathbf{J}_m \|\mathbf{S}_4\|^2 + \mathbf{L}_m \|\mathbf{S}_5\|^2 + \mathbf{L}_m \|\mathbf{S}_6\|^2 + \sum_{k=2}^5 \|\mathbf{y}_k\|^2 + \frac{1}{\max[\lambda_{r,M}, \lambda_{m,M}, \lambda_{q,M}, \lambda_{d,M}]} (\|\tilde{\mathbf{W}}_r\|_F^2 + \|\tilde{\mathbf{W}}_m\|_F^2 + \|\tilde{\mathbf{W}}_q\|_F^2 + \|\tilde{\mathbf{W}}_d\|_F^2) \leq \Gamma/\sigma \right\}. \quad (44)$$

其中:  $\lambda_{r,M}, \lambda_{m,M}, \lambda_{q,M}, \lambda_{d,M}$  分别为  $\lambda_r, \lambda_m, \lambda_q, \lambda_d$  的最大特征值;  $\mathbf{J}_m, \mathbf{L}_m$  分别为矩阵  $\mathbf{J}, \mathbf{L}$  的最小特征值. 通过调整  $k_i^*, \tau_k^*, \lambda_j, \eta_j$ , 紧集  $E$  可以随意缩小, 所以轨迹跟踪误差  $\mathbf{S}_1$  可以达到预定的精度.  $\square$

## 6 仿真实验及结果

为了验证上述算法的正确性, 以一个三连杆柔性关节机械臂为例进行仿真. 在 Matlab/Simulink 环境下编制相关柔性机械臂模型、递归 Elman 神经网络及自适应动态面控制器的  $S$  函数. 为了考察模型参数不准确对于系统的影响, 假设机械臂动力学模型中各参数名义值及实际值如表 1 所示. 连杆惯量  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ , 离心力与哥氏力项  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  和重力项  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  的计算参见文献 [16]. 控制器参数等设置如下:

1) 3 个关节的初始位置设置为  $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$ , 3 个关节均由 0 rad 运动到 0.5 rad, 期望轨迹由保罗规划产生 [17].

2) 控制器参数设置为  $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0.001$ ,  $k_1 = k_5 = k_6 = 300, k_2 = 10, k_3 = 25, k_4 = 3000$ .

3) RENN 系统权值  $\alpha_{ij}, \beta_{kj}, \gamma_k, w_j$  的初值设为 0, 并通过自适应律 (37) 进行在线的优化调整. 权值自适应律的参数设置为:  $\lambda_m = \lambda_d = \text{diag}[1 \ 1 \ 1]$ ,  $\lambda_r = \text{diag}[5 \ 5 \ 5]$ ,  $\lambda_q = \text{diag}[0.25 \ 0.25 \ 0.25]$ ,  $\eta_r = \eta_m = \eta_q = \eta_d = 0.001$ .

4) 包含 4 个 RENN 系统:  $\hat{\Omega}_r(\cdot)$  有 3 个输入 ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ), 3 个隐含单元, 3 个关联单元和 1 个输出;  $\hat{\Omega}_m(\cdot)$  有 4 个输入 ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$ ), 4 个隐含单元, 4 个关联单元和 1 个输出;  $\hat{\Omega}_q(\cdot)$  有 4 个输入 ( $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{u}_{qf}$ ), 4 个隐

含单元, 4 个关联单元和 1 个输出;  $\hat{\Omega}_d(\cdot)$  有 4 个输入 ( $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{u}_{df}$ ), 4 个隐含单元, 4 个关联单元和 1 个输出.

5) 考虑到控制器饱和, 设实际控制量  $\mathbf{u}_q$  和  $\mathbf{u}_d$  的极限值为  $\mathbf{u}_{q \max} = \mathbf{u}_{d \max} = 100 \text{ V}$ ,  $\mathbf{u}_{q \min} = \mathbf{u}_{d \min} = -100 \text{ V}$ .

表 1 机械臂参数

		关节1	关节2	关节3
连杆质量 $m_i/\text{kg}$	名义值	0.5	0.5	0.5
	实际值	1	0.4	0.8
连杆转动惯量 $I_i/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	名义值	0.09	0.05	0.03
	实际值	0.10	0.07	0.05
连杆长 $l_i/\text{m}$	名义值	0.7	0.7	0.7
	实际值	0.9	0.5	1.2
电机转动惯量 $J_i/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	名义值	0.02	0.02	0.02
	实际值	0.03	0.01	0.04
电机阻尼 $B_i/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad})$	名义值	5	5	5
	实际值	10	2	8
关节摩擦系数 $F_i/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad})$	名义值	10	10	10
	实际值	15	7	20
关节刚度 $K_i/(\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad})$	名义值	100	100	100
	实际值	150	80	120
关相电感 $L_i/\text{H}$	名义值	0.025	0.025	0.025
	实际值	0.030	0.029	0.034
相电阻 $R_i/\Omega$	名义值	2	2	2
	实际值	2.5	2.3	2.2
相电势系数 $K_{e,i}/(\text{V}/\text{rad}/\text{s})$	名义值	10	10	10
	实际值	13	11	8
转矩系数 $H_i/(\text{N}\cdot\text{m}/\text{A})$	名义值	10	10	10
	实际值	12	8	13

表 1 中, 各参数均存在 10%~100% 的不确定度. 为了验证控制系统对于大的外部扰动的鲁棒性, 加外部扰动  $\mathbf{T}_r, \mathbf{T}_m, \mathbf{T}_q$  和  $\mathbf{T}_d$  如下:

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{T}_m = \mathbf{T}_q = \mathbf{T}_d = \begin{cases} [0 \ 0 \ 0]^T, & t < 10; \\ [10 \ 10 \ 10]^T, & t \geq 10. \end{cases}$$

图 2 给出了应用传统动态面方法和基于 RENN 的自适应动态面控制方法的关节轨迹跟踪结果. 图 2(a), 图 2(c), 图 2(e) 中, 实线为期望位置, 虚线为自适应动态面, 点线为传统动态面; 图 2(b), 图 2(d), 图 2(f) 中, 实线为自适应动态面, 虚线为传统动态面. 在外部扰动施加之前, 即  $t < 10$  的时间内, 系统的不确定因素来自动力学模型参数的不准确. 从 3 个关节的跟踪误差来看, 自适应动态面控制方法的性能明显优于传统动态面控制方法, 这说明 RENN 系统能够很好地补偿机械臂动力学、驱动器动力学和电机动力学参数的不确定. 当  $t \geq 10$  时, 由于施加了大的外部扰动, 关节实际轨迹相对于期望轨迹出现了大的偏离. 但是,

由于 RENN 系统的补偿能力, 自适应动态面控制方法能够迅速矫正偏离, 并最终达到  $10^{-5}$ rad 的定位精度. 而传统的动态面方法对于大的外部扰动的补偿能力极为有限, 最终定位误差接近 0.04 rad.

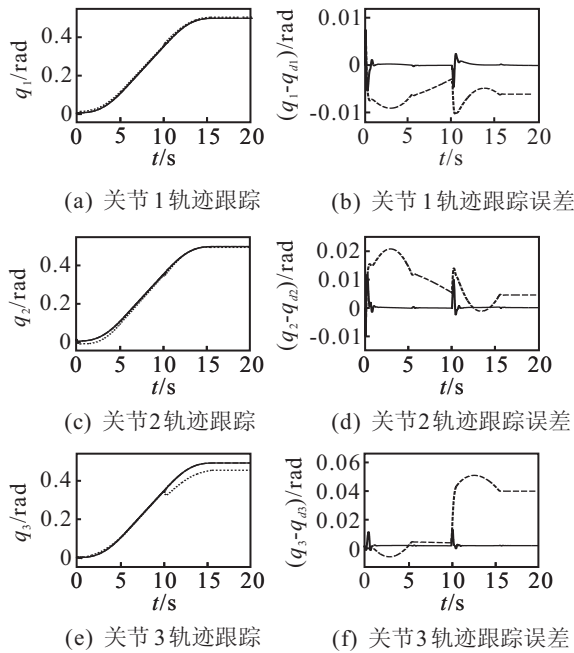


图 2 关节轨迹跟踪结果

由于面贴式 PMSM 的输出转矩取决于定子电流的  $q$  轴分量, 在图 3(a) 中的加/减速段,  $q$  轴电压较大, 以提供关节加/减速所需的控制力矩. 当  $t \geq 10$  时, 为了克服外界扰动,  $u_q$  呈现阶跃变化. 由于采用  $i_d = 0$  的控制方式, 当  $t < 10$  时,  $d$  轴电压几乎为 0. 当  $t \geq 10$  时, 外加了  $T_d = [10 \ 10 \ 10]^T$  的外部扰动, 即 3 个关节

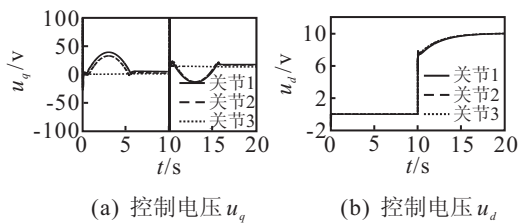


图 3 PMSM 控制电压

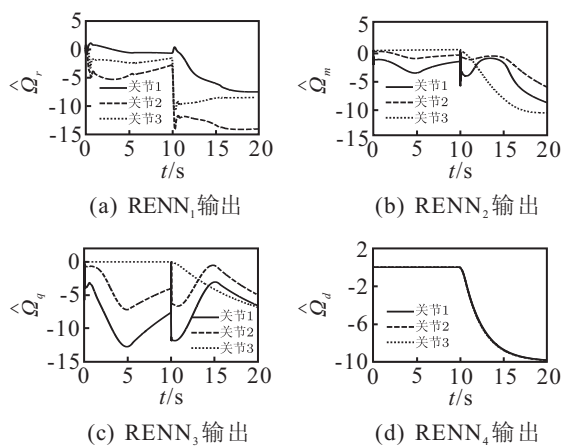


图 4 RENN 估计值输出

的  $d$  轴电压均受到 10V 的外部扰动, 所以  $u_d$  在  $t = 10$  时出现阶跃, 并最终稳定在 10V 左右.

神经网络观测器的输出  $\hat{\Omega}_j$  近似了系统的不确定项  $\Omega_j$ . 如图 4 所示, 以  $t = 10$  的时间点为分界, 当  $t < 10$  时,  $\hat{\Omega}_j$  近似了动力学模型参数不准确引入的不确定项; 当  $t > 10$  时,  $\hat{\Omega}_j$  近似了动力学模型参数不准确及外部扰动引入的不确定项.

图 5 给出了 4 个 RENN 系统权值矢量  $\hat{W}_j$  的  $L_2$  范数. 由图 5 可以看出, 闭环系统神经网络所有的权值都是有界的, 即使受到大的外部扰动时也是如此.

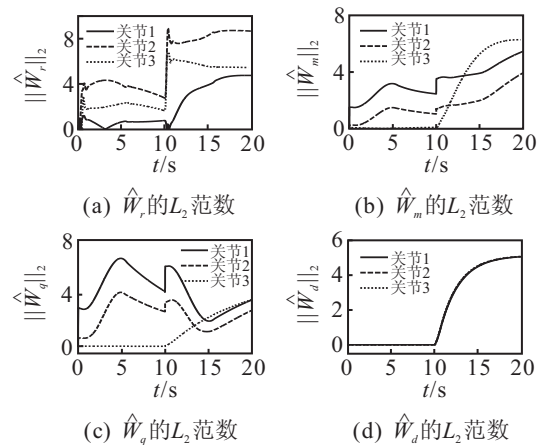


图 5 RENN 权值的  $L_2$  范数

### 7 结 论

本文首先建立了采用面贴式 PMSM 驱动的柔性关节机器人动力学模型. 结合 RENN 快速稳定的在线学习和收敛能力以及动态面控制的简捷设计思路, 提出了一种基于 RENN 的自适应动态面控制方法. 充分考虑机械臂模型、外界扰动及电机动力学参数不确定因素的影响, 应用 RENN 在线观测补偿不确定项, 实现关节轨迹跟踪的自适应动态面控制. 控制律由动态面方法推导, 避免了微分项的膨胀, 简化了控制器设计过程. 通过 Lyapunov 稳定性分析推导了 RENN 权值的在线学习法则, 同时证明了闭环系统所有信号有界, 系统跟踪误差和神经网络权值估计误差收敛到有界紧集内. 以一个三连杆柔性关节机械臂为例在 Matlab/simulink 环境下进行了仿真分析, 结果表明, 对于模型参数的不准确和外界扰动, 系统都具有较强的补偿能力, 验证了控制算法的有效性和可行性.

### 参考文献(References)

[1] Tenreiro M J A. Variable structure control of manipulators with compliant joints[C]. Proc IEEE Int Industrial Electronics Conf. Budapest, 1993: 554-559.  
 [2] 刘业超, 刘伊威, 刘宏. 柔性关节机器人奇异摄动控制[J]. 电机与控制学报, 2009, 13(3): 436-441.  
 (Liu Y C, Liu Y W, Liu H. Singular perturbation control

- for flexible-joint manipulator[J]. *Electric Machines and Control*, 2009, 13(3): 436-441.)
- [3] Spong M W. Modeling and control of elastic joint robots[J]. *J of Dynamics Systems, Measurement and Control*, 1987, 109(4): 310-319.
- [4] Lozano R, Brogliato B. Adaptive control of robot manipulators with flexible joints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(2): 174-181.
- [5] Bridges M M, Dawson D M, Abdallah C T. Control of rigid-link, flexible-joint robots: A survey of backstepping approaches[J]. *J of Robotic Systems*, 1995, 12(3): 119-216.
- [6] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [7] Wang D, Huang J. Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2005, 16(1): 195-202.
- [8] Yoo S J, Park J B, Choi Y H. Adaptive dynamic surface control of flexible-joint robots using self-recurrent wavelet neural networks[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 2006, 36(6): 1342-1355.
- [9] Yoo S J, Park J B, Choi Y H. Adaptive output feedback control of flexible-joint robots using neural networks: Dynamic surface design approach[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2008, 19(10): 1712-1726.
- [10] Elman J. Finding structure in time[J]. *Cognitive Science*, 1990, 14(2): 179-211.
- [11] Li X, Chen G R, Chen Z Q, et al. Chaotifying linear elman networks[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(5): 1193-1199.
- [12] Wlas M, Krzeminski Z, Guzinski J, et al. Artificial-neural-network-based sensorless nonlinear control of induction motors[J]. *IEEE Trans on Energy Conversion*, 2005, 20(3): 520-528.
- [13] Lin F J, Hung Y C. FPGA-based elman neural network control system for linear ultrasonic motor[J]. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2009, 56(1): 101-113.
- [14] Lin F J, Chen S Y, Shyu K K. Robust dynamic sliding-mode control using adaptive RENN for magnetic levitation system[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2009, 20(6): 938-951.
- [15] 刘贤兴, 胡育文. 永磁同步电机的神经网络逆动态解耦控制[J]. *中国电机工程学报*, 2007, 27(27): 72-76.  
(Liu X X, Hu Y W. Dynamic decoupling control of PMSM based on neural network inverse method[J]. *Proc of the CSEE*, 2007, 27(27): 72-76.)
- [16] Kim E. Output feedback tracking control of robot manipulators with model uncertainty via adaptive fuzzy logic[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2004, 12(3): 368-378.
- [17] 理查德·皮·保罗. 机器人操作手: 数学、编程与控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1991: 130-134.  
(Richard P Paul. *Robot manipulators: Mathematics, programming, and control*[M]. Beijing: China Machine Press, 1991: 130-134.)

## 下 期 要 目

- 无序量测滤波更新算法综述 ..... 王 炜, 等
- 基于隐 Lyapunov 函数的软变结构控制: 一种控制策略 ..... 张彩虹, 等
- 改进型复杂过程全局进化算法在热连轧负荷分配中的应用 ..... 胡长斌, 等
- 基于灰色预测模型和粒子滤波的视觉目标跟踪算法 ..... 朱明清, 等
- 一类 Lurie 时滞广义系统的时滞相关  $H_\infty$  控制 ..... 李圣涛, 等
- 多目标强度 Pareto 混沌差分进化算法 ..... 章 萌, 等
- 基于证据理论的模糊时间序列预测模型 ..... 邱望仁, 刘晓东
- 一个具有可调变权能力的变权向量  $H_\infty$  控制 ..... 成 波, 刘三阳