

文章编号: 1001-0920(2011)10-1567-04

一类不确定离散 Markov 跳变系统滑模状态反馈控制

黄凤芝, 井元伟

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

摘要: 针对具有不确定的离散 Markov 跳变系统, 研究其滑模状态反馈控制问题. 考虑系统的不确定满足匹配条件, 以线性矩阵不等式形式给出了离散滑模面存在的充分条件, 设计了具有指数趋近律的滑模控制器, 保证了系统状态到达滑模面并在滑模带上随机镇定. 数值仿真验证了所提出的控制方案的有效性.

关键词: 离散 Markov 跳变系统; 滑模控制; 不确定; 随机稳定

中图分类号: TP27

文献标识码: A

Sliding mode state feedback control of a class of uncertain discrete-time Markov jump systems

HUANG Feng-zhi, JING Yuan-wei

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Correspondent: HUANG Feng-zhi, E-mail: huangfzh@126.com)

Abstract: This paper considers the problem of state feedback sliding mode control for a class of discrete-time Markov jump systems. The uncertainty of the system is considered as a function of the system inputs, states and time, which satisfies the matched condition. A sufficient condition is provided to guarantee the existence of the discrete-time sliding modes in times of LMI. A sliding mode control law is designed to make the system states reach to the designed sliding mode and keep on stochastically stable. A simulation example shows the effectiveness of the state-feedback controller.

Key words: discrete-time Markov jump systems; sliding mode control; uncertain; stochastically stable

1 引言

Markov 跳变系统是一类特殊的随机系统, 由 Krasovskii 等人^[1]提出. 由于它能够描述大量实际系统, 如制造系统、生化系统、电力系统、网络通信系统等而受到学者的关注^[2-5], 并取得了许多有意义的成果. 离散 Markov 跳变系统鲁棒控制问题是研究的热点之一, 文献 [2-3] 讨论了参数不确定的离散 Markov 跳变系统 H_∞ 控制问题, 其中不确定性假设必须能分解成特定矩阵形式. [4] 讨论了具有时滞的线性离散 Markov 跳变系统 H_∞ 滤波问题, 考虑了系统存在外部扰动, 但没有考虑系统的内部不确定性. [5] 研究了具有多面体形式不确定性的线性离散 Markov 跳变系统稳定性问题, 考虑了系统参数存在不确定性, 但未考虑外部扰动的影响. [6] 针对转移概率矩阵部分未知时, 讨论了线性离散 Markov 跳变 H_∞ 鲁棒控制问题, 同样只考虑系统存在扰动, 而没

有考虑系统的内部不确定性. 另一方面, 由于对系统内部不确定性和外部扰动具有完全的鲁棒性, 滑模控制成为学者们研究系统鲁棒控制的一种重要方法. 然而将滑模控制用于 Markov 跳变系统的研究还较为少见, 且现有文献均是针对连续时间 Markov 跳变系统的. [7] 研究了连续时间线性 Markov 跳变系统滑模状态反馈控制, [8-9] 研究了具有 Markov 跳变的奇异系统的滑模控制.

基于上述考虑, 本文针对一类不确定离散 Markov 跳变系统设计离散滑模状态反馈控制器, 以得到系统随机稳定的条件. 其中所考虑的不确定性用系统输入、状态和时间的函数表示, 包含了系统的内部不确定和外部扰动.

2 系统描述

定义测度空间 (Ω, \mathcal{F}, P) . 其中: Ω 为样本空间; \mathcal{F} 为 Ω 的一个代数子集; P 为 \mathcal{F} 上的测度, 本文指概

收稿日期: 2010-08-03; 修回日期: 2011-01-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60274009); 国家高技术研究发展计划项目(2010AA101702).

作者简介: 黄凤芝(1982—), 女, 博士生, 从事 Markov 跳变系统控制的研究; 井元伟(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂网络、通信网络控制等研究.

率. 考虑定义在空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的离散时间 Markov 跳变系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)[u(k) + F(u, x, k)], \\ y(k) &= C_y(\theta_k)x(k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathcal{R}^n$ 为系统状态; $u(k) \in \mathcal{R}^m$ 为系统输入; $y(k) \in \mathcal{R}^q$ 为系统输出; $F(u, x, k)$ 为系统中的不确定性; $\{\theta_k, k \geq 0\}$ 为定义在向量空间 $\sigma \doteq \{1, 2, \dots, N\}$ 的具有如下转移概率的齐次 Markov 链:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \Pr(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i), \\ \lambda_{ij} &\geq 0, \forall i, j \in \sigma, \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

为了简单起见, 定义 $\theta_k = i, i \in \sigma$, 对应于每一个 i , 将 $A(\theta_k), B(\theta_k), C_y(\theta_k)$ 记作 A_i, B_i, C_{yi} . 为了便于讨论, 本文作如下假设:

假设 1 A_i, B_i, C_{yi} 为具有适当维数的常数矩阵.

假设 2 系统中不确定性满足如下不等式:

$$\|F(u, x, k)\| \leq \alpha \|u\| + \beta(x, k). \quad (3)$$

其中: $0 < \alpha < 1$ 为一个已知的常数, $\beta(x, k)$ 为一个已知的函数.

定义 1 对于离散 Markov 跳变系统 (1), 当 $u(k) \equiv 0$ 和 $F(u, x, k) \equiv 0$ 时, 若

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|^2 | x_0, \theta_0\right\} < \infty \quad (4)$$

对于任意初始状态 $x_0 \in \mathcal{R}^n$ 都成立, 则称系统 (1) 是随机稳定的. 其中: $\theta_0 \in \sigma, \mathbb{E}(\cdot)$ 为数学期望.

引理 1^[5] 当 $u(k) \equiv 0$ 和 $F(u, x, k) \equiv 0$ 时, 系统 (1) 是随机稳定的, 当且仅当存在正定对称矩阵 $P_i (i \in \sigma)$ 使得如下不等式成立:

$$A_i^T Q_j A_i - P_i < 0, \quad (5)$$

其中 $Q_j \triangleq \sum_{j \in \sigma} \lambda_{ij} P_j$.

3 控制器设计与稳定性分析

为了简化系统形式和便于控制器设计, 对系统 (1) 进行线性变换. 选择一个非奇异线性变换 $T(\theta_k)$, 对应于 $\theta_k = i (i \in \sigma)$, 将 $T(\theta_k)$ 记作 T_i , 且 $z(k) = T_i x(k)$, 则系统 (1) 可转化为

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \tilde{A}_i z(k) + \tilde{B}_i [u(k) + F(u, z, k)], \\ y(k) &= \tilde{C}_{yi} z(k). \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= T_i^{-1} A_i T_i, \tilde{B}_i = T_i B_i = [0 \quad \tilde{B}_{2i}]^T, \\ \tilde{C}_{yi} &= C_{yi} T_i^{-1}, \tilde{B}_{2i} \in \mathcal{R}^m. \end{aligned}$$

3.1 滑模面的设计

滑模控制器设计包括滑模面设计和控制器设计两个步骤, 先进行滑模面的设计.

对于系统 (6), 设计如下形式的滑模面:

$$S = G_i z(k) = 0. \quad (7)$$

不失一般性, 假设 $z(k), \tilde{A}_i, G_i$ 具有如下形式:

$$z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}, \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11i} & \tilde{A}_{12i} \\ \tilde{A}_{21i} & \tilde{A}_{22i} \end{bmatrix},$$

且 $z_1(k) \in \mathcal{R}^{n-m}, z_2(k) \in \mathcal{R}^m$, 则系统 (6) 可以改写为

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= \tilde{A}_{11i} z_1(k) + \tilde{A}_{12i} z_2(k), \\ z_2(k+1) &= \tilde{A}_{21i} z_1(k) + \tilde{A}_{22i} z_2(k) + \\ &\quad \tilde{B}_{2i} [u(k) + F(u, z, k)], \\ y(k) &= \tilde{C}_{yi} z(k). \end{aligned} \quad (8)$$

滑模面 (7) 可以改写为

$$S = G_i z(k) = [G_{1i} \quad G_{2i}] \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} = 0, \quad (9)$$

进一步得到

$$z_2(k) = -K_i z_1(k), \quad (10)$$

其中 $K_i = G_{2i}^{-1} G_{1i}$. 将式 (10) 代入 (8), 整理可得系统理想滑动模态方程为

$$z_1(k+1) = \hat{A}_i z_1(k), \quad (11)$$

$$S = G_{2i} [K_i \quad I] z(k) = 0, \quad (12)$$

其中 $\hat{A}_i = \tilde{A}_{11i} - \tilde{A}_{12i} K_i$.

下面讨论系统状态在滑模面上的稳定性.

定理 1 如果存在正定矩阵 $X_i, i \in \sigma$ 和矩阵 $Y_i, \forall i \in \sigma$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\chi_j & \pi_i (\tilde{A}_{11i} X_i - \tilde{A}_{12i} Y_i) \\ * & -X_i \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

其中

$$\chi_j \triangleq \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_N\},$$

$$\pi_i \triangleq [\sqrt{p_{i1}} I, \dots, \sqrt{p_{iN}} I]^T.$$

则降阶系统 (11) 在滑模面 (7) 上是随机稳定的, 而滑模面参数也可以由 $K_i = Y_i X_i^{-1}$ 求解.

证明 选择随机 Lyapunov 函数形如

$$V(z_1(k), k) = z_1^T(k) P_i z_1(k), \forall i \in \sigma. \quad (14)$$

系统在 k 时刻和 $k+1$ 时刻具有不同的模态, 即 $\theta_k = i, \theta_{k+1} = j$, 计算

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta(V)) &\triangleq \\ \mathbb{E}(V(z_1(k+1), j | z_1(k), i) - V(z_1(k), i)) &= \\ z_1(k)^T (\hat{A}_i^T Q_j \hat{A}_i - P_i) z_1(k), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 Q_j 的定义与式 (5) 中相同. 根据引理 1 可知, 若

$$\hat{A}_i^T Q_j \hat{A}_i - P_i < 0 \quad (16)$$

成立, 则系统 (11) 是随机稳定的.

对式 (16) 运用 Schur 补引理可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{p_{i1}}P_1\hat{A}_i \\ * & -P_2 & & \vdots & \sqrt{p_{i2}}P_2\hat{A}_i \\ * & * & \ddots & 0 & \vdots \\ * & * & * & -P_N & \sqrt{p_{iN}}P_N\hat{A}_i \\ * & * & * & * & -P_i \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中 * 为矩阵中对称的部分. 令 $X_i^{-1} = P_i$, 对式 (17) 进行同余变换, 且令 $Y_i = K_i X_i$, 可得式 (12). 所以如果式 (12) 成立, 则式 (17) 成立, 从而式 (16) 成立. 由式 (15) 可得

$$\begin{aligned} E(\Delta(V)) &\leq \\ &- \lambda_{\min}[-(\hat{A}_i^T Q_j \hat{A}_i - P_i)] z_1(k)^T z_1(k) \leq \\ &- \beta \|z_1(k)\|^2. \end{aligned}$$

其中: $\beta = \lambda_{\min}[-(\hat{A}_i^T Q_j \hat{A}_i - P_i)]$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 为矩阵的最小特征值. 对于时间 $T \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{k=0}^T \|z_1(k)\|^2\right\} &\leq \\ &- \frac{1}{\beta} E[V(z_1(T+1), (T+1))] - E[V(z_1(0), 0)] \leq \\ &\frac{1}{\beta} E[V(z_1(0), 0)] < \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

由定义 1 可得系统 (11) 是随机稳定的. \square

由定理 1 可以得出具有随机稳定的滑模面的存在性. 下面讨论使得系统状态到达滑模面且在滑模面运动的控制器设计.

3.2 状态反馈控制器的设计

对系统 (6) 采用如下指数趋近律设计控制器:

$$S(k+1) - S(k) = -\epsilon T \text{sign}(S(k)) - qTS(k). \quad (19)$$

其中: T 为系统的采样周期; $0 < \epsilon < 1$; $q > 0$ 为常数, 且 $1 - qT > 0$.

联立式 (7) 和 (19), 可得控制器

$$\begin{aligned} u(k) &= \\ &- [G_i \tilde{B}_i]^{-1} G_i A_i z(k) - [G_i \tilde{B}_i]^{-1} [\epsilon T \text{sign}(G_i z(k)) - \\ &- (1 - qT) G_i z(k)] - F(u, z, k). \end{aligned}$$

由于上述表达式中存在不确定项 $F(u, z, k)$, 上述控制器不能直接利用. 考虑不确定的特性, 设计如下对不确定性具有完全鲁棒性的滑模状态反馈控制器:

$$u = -[G_i \tilde{B}_i]^{-1} [\bar{G}z(k) + \epsilon T \text{sign}(S(k))] - \bar{u}_1. \quad (20)$$

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} \nu S(k) / \|S(k)\|, & S(k) \neq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \nu &= (\alpha \| (G_i \tilde{B}_i)^{-1} [\bar{G}z(k) + \epsilon T \text{sign}(S(k))] \| + \\ &\beta(z, k) + \gamma) / (1 - \alpha). \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $\bar{G} = G_i A_i - (1 - qT)G_i$, $\gamma > 0$ 为常数.

定理 2 当定理 1 成立时, 对于给定参数 q, T, ϵ, γ 及由定理 1 所得的滑模面参数 G_i , 如果存在正定矩阵 $P_i, i \in \sigma$, 使得不等式

$$(1 - qT)^2 Q_j - P_i < 0, \quad (23)$$

$$(\gamma \|G_i \tilde{B}_i\| + \epsilon T) - 2(1 - qT) \|S(k)\| < 0 \quad (24)$$

成立, 则受控系统 (6) 在所设计的控制器 (20) 和 (21) 的作用下, 渐近收敛到滑模面 (7), 且在滑模面上随机稳定, 其中 Q_j 的定义与式 (5) 相同.

证明 选择如下形式的随机 Lyapunov 函数:

$$V(S(k), k) = S^T(k) P_i S(k). \quad (25)$$

对于 $\theta_k = i, \theta_{k+1} = j$, 有

$$\begin{aligned} E(\Delta V(S(k), k)) &= \\ E(V(S(k+1)) - V(S(k))) &= \\ S^T(k+1) Q_j S(k+1) - S^T(k) P_i S(k). \end{aligned} \quad (26)$$

将所设计的控制器代入式 (26), 整理可得

$$\begin{aligned} E(\Delta V(S(k), k)) &= \\ S^T(k) [(1 - qT)^2 Q_j - P_i] S(k) - \\ &2\epsilon T (1 - qT) \|S(k)\| Q_j + (\epsilon T)^2 \|\text{sign}(S(k))\| Q_j - \\ &2\epsilon T \text{sign}(S(k)) Q_j [G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)] + \\ &2(1 - qT) [G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)]^T Q_j S(k) + \\ &[G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)]^T Q_j [G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)]. \end{aligned}$$

计算各项可得

$$-2\epsilon T (1 - qT) \|S(k)\| Q_j < 0, \quad (27)$$

$$(\epsilon T)^2 \|\text{sign}(S(k))\| Q_j \leq (\epsilon T)^2 Q_j, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 2(1 - qT) [G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)]^T Q_j S(k) &\leq \\ -2\gamma (1 - qT) \|G_i \tilde{B}_i\| \|S(k)\| Q_j, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} -2\epsilon T \text{sign}(S(k)) Q_j [G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)] + \\ [G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)]^T Q_j [G_i \tilde{B}_i (F(u, z, k) - \bar{u}_1)] &< \\ \gamma \|G_i \tilde{B}_i\| (2\epsilon T + \gamma \|G_i \tilde{B}_i\|) Q_j. \end{aligned} \quad (30)$$

综上, 由式 (26)~(30) 可以看出, 如果选择合适的 q, T, γ, ϵ 使得不等式

$$(1 - qT)^2 Q_j - P_i < 0,$$

$$(\gamma \|G_i \tilde{B}_i\| + \epsilon T) - 2(1 - qT) \|S(k)\| < 0$$

成立, 容易证明式 (26) 小于零, 则被控系统是随机稳定的. 即系统状态在控制器 (20) 和 (21) 的作用下, 最终到达滑模面. \square

注 1 离散系统由于采样周期的存在使得系统状态在到达滑模面后, 不同于连续系统在滑模面上运动, 而是在到达滑模面后穿越滑模面, 下一时刻又反向穿越滑模面, 循环往复而形成一个宽度为 $\epsilon T / (2 - qT)$ 滑动模带, 系统状态在滑动模带运动时对

匹配条件的不确定具有不变性.

4 仿真例子

考虑系统(1)具有两个工作模态的情况, 系统转移概率矩阵为

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 5/14 & 9/14 \end{bmatrix}.$$

采样周期为 $T = 0.1$ s, 系统中的参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1.25 \\ 2.5 & 2.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.83 \\ 2.5 & 3.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

不确定性形如 $F(u, x, k) = 0.2u(k) + 0.02y(k)$.

通过求解线性矩阵不等式(13)和 $K_i = Y_i X_i^{-1}$ 可得滑模面参数 $K_1 = [-0.424 \ 1]$, $K_2 = [-3.4125]$, 滑模面选取为 $G_1 = [-0.424 \ 1]$, $G_2 = [-3.4125 \ 1]$.

趋近律参数选择为: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.2$, $q = 8$, 参数 $\gamma = 0.002$. 若所选参数满足定理2中的条件, 则可以设计在两种不同模态时控制器如下:

$$U_1 =$$

$$-[-0.397 \ 4 \ 3.310 \ 6]z(k) - 0.2\text{sign}(S(k)) -$$

$$1.25\{0.2\|[-0.397 \ 4 \ 3.310 \ 6]z(k) -$$

$$0.2\text{sign}(S(k)) + 0.02y(k) + 0.002\|\} \frac{S(k)}{\|S(k)\|}, \quad (31)$$

$$U_2 =$$

$$-[-8.358 \ 9 \ 3.780 \ 3]z(k) - 0.2\text{sign}(S(k)) -$$

$$1.25\{0.2\|[-8.358 \ 9 \ 3.780 \ 3]z(k) -$$

$$0.2\text{sign}(S(k)) + 0.02y(k) + 0.002\|\} \frac{S(k)}{\|S(k)\|}. \quad (32)$$

系统在控制器作用下的响应如图1~图4所示. 由图3可以看出, 系统状态在图2所示的控制作用下很快到达图4所示的滑模面, 并在滑模面的附近运动.

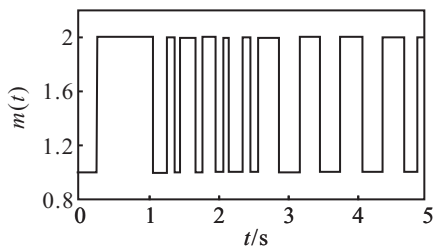


图1 系统模态跳变

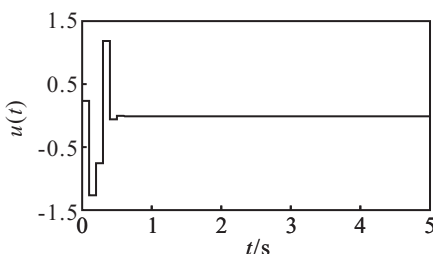


图2 控制输入曲线

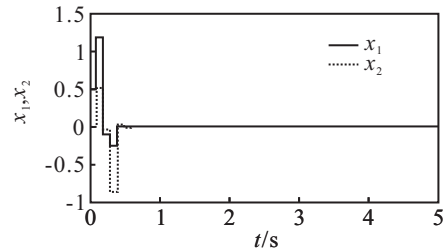


图3 系统状态响应曲线

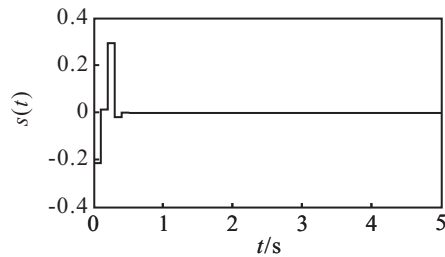


图4 滑模面响应曲线

5 结 论

本文研究了一类满足匹配条件不确定的离散 Markov 跳变系统的滑模控制问题, 给出了随机稳定的滑模面存在的充分条件, 所设计的滑模状态反馈控制器可以保证系统到达滑模且在滑动带随机稳定. 最后通过对具有两个模态的离散系统进行数值仿真, 验证了所提出的设计方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Krasovskii N N, Lidskii E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes[J]. Automation and Remote Control, 1961, 22(9): 1021-2025.
- [2] Carlos E S, Fragoso M D. H_∞ control for linear systems with Markovian jumping parameters[J]. Control Theory and Advanced Technology, 1993, 9(2): 457-466.
- [3] Shi P, Boukas E K. H_∞ control for Markovian jumping linear systems with parametric uncertainty[J]. J of Optimization Theory and Applications, 1997, 95(1): 75-99.
- [4] Wang Z D, Lam J, Liu X H. Robust filtering for discrete-time Markovian jump delay systems[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(8): 659-662.
- [5] Carlos E S. Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time jump linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 836-841.
- [6] Xiong J, Lam J, Gao H J, et al. On robust stabilization of Markov jump systems with uncertain switching probabilities[J]. Automatica, 2005, 48(5): 897-903.
- [7] Shi P, Xia Y Q, Rees D. On designing of sliding-mode control for stochastic jump systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(1): 97-103.

(下转第1576页)