

文章编号: 1001-0920(2012)01-0065-06

## 基于神经网络的非仿射块控非线性系统动态反演控制

胡云安, 李海燕

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

**摘要:** 即使已知非仿射非线性系统的逆存在, 利用隐函数定理求解该显式逆仍然非常困难. 为此, 针对一类不确定块控非仿射系统, 将动态反馈、反演、神经网络和反馈线性化技术相结合, 提出一种自适应鲁棒控制器的设计方法. 利用神经网络来逼近和消除未知函数, 并证明了整个闭环系统在李雅普诺夫意义下是稳定的. 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

**关键词:** 块控非线性系统; 非仿射; 反演; 动态反馈

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## NN-based dynamic feedback backstepping control for nonaffine block nonlinear systems

HU Yun-an, LI Hai-yan

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China.  
Correspondent: HU Yun-an, E-mail: hya507@yahoo.com)

**Abstract:** The difficulty associated with a control design for nonaffine control systems is that an explicit inverting control design is not possible even if the inverse exists by using the implicit function theorem. Therefore, a robust adaptive control design method is proposed for a class of uncertain block nonaffine systems via incorporating dynamic feedback, backstepping design, neural network, and feedback linearization techniques, in which the NNs are used to approximate and adaptively cancel the unknown functions. The whole closed-loop system is proved to be stable in the sense of Lyapunov. Finally, simulation results show the effectiveness of the proposed scheme.

**Key words:** block nonlinear system; nonaffine; backstepping; dynamic feedback

### 1 引言

近30年来,人们努力发展一种系统化的设计工具来完成不确定非线性系统的控制,并取得了显著的成果,例如反馈线性化技术<sup>[1]</sup>、自适应反演设计<sup>[2]</sup>、神经网络控制<sup>[3]</sup>和模糊控制<sup>[4]</sup>等.在绝大多数研究中都普遍假定被控系统是仿射系统,即对象与输入变量之间是线性关系,并且非线性特性可通过未知参数进行参数线性化<sup>[2]</sup>.基于神经网络的自适应控制对上述假定进行了放宽,去掉了系统可参数线性化的要求<sup>[5]</sup>.但是,有一些系统,如化学反应<sup>[6]</sup>和飞行控制系统<sup>[7]</sup>,其输入变量不能表示为仿射形式.

对于非仿射系统可以通过3种方法进行控制器设计:1)通过引入一个新的控制输入将非仿射系统转化为仿射系统<sup>[7]</sup>.在这类方法中,对控制输入的

非仿射函数进行微分,得到一个增广系统,对象与新的输入之间呈线性关系,然后利用常规方法进行设计<sup>[8]</sup>.2)直接控制方法.在控制过程中不需要将非仿射系统转换为仿射系统<sup>[9-11]</sup>.通过假设存在一个李雅普诺夫函数,文献<sup>[9]</sup>给出了非仿射系统存在连续稳定控制的充分条件.Lin<sup>[10-11]</sup>提出了非仿射无源系统理论,通过与反馈等价和有界控制技术相结合,构造一个平滑状态反馈控制律,以解决一类非仿射系统的全局稳定问题.但是,这种方法的缺点是难以找到相应的李雅普诺夫函数,而且对存在不确定性的系统难以进行处理.最近,利用神经网络的逼近特性,基于神经网络的自适应控制理论对不确定非线性系统进行处理已成为研究的热点.3)以神经网络为基础.一般非线性系统的神经网络控制器设计的关键是如何利用

收稿日期: 2010-08-25; 修回日期: 2010-12-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674090).

作者简介: 胡云安(1966—),男,教授,博士生导师,从事非线性控制等研究;李海燕(1979—),女,博士生,从事激光、非线性控制等研究.

神经网络逼近逆系统<sup>[12]</sup>. 采用隐函数理论和平均值定理, [13] 提出利用神经网络来逼近理想控制信号以解决跟踪问题. [14] 通过引入一个解析的可逆模型并用神经网络来补偿其误差得到了逆问题的一个解决方法, 而不是直接对逆问题进行求解. [15] 针对一类多变量非仿射不确定系统, 提出一种神经综合方法. 该方法将之前应用于单输入单输出系统的方法推广到多输入多输出系统, 而不需要借助于不动点假设. 在非仿射控制系统中应用这些方法的难点是, 即使通过隐函数理论证明系统的逆是存在的, 仍然很难显式地进行逆控制系统的设计<sup>[8]</sup>.

反演方法在非线性控制系统设计中是一个突破, 目前它已成为解决非线性问题的一个重要且流行的方法<sup>[2]</sup>, 并得到了广泛的应用<sup>[16-17]</sup>. 本文针对一类块控形式下的不确定非仿射系统的跟踪控制问题, 讨论了基于神经网络的自适应反演设计方法. 该方法通过巧妙构造 Lyapunov 函数简化了系统的设计, 避免了绝大多数文献要求解逆控制这一难点, 不依赖于隐函数理论和泰勒展开方法, 且可处理存在非匹配不确定性的系统.

## 2 问题描述

考虑如下具有不确定性的块控非仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i = [x_{i1} \cdots x_{im}]^T \in R^m$ ,  $\bar{x}_i = [x_1^T \cdots x_i^T]^T$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $u \in R^m$ ,  $y \in R^m$  分别为系统的状态、输入和输出;  $f_i(\cdot) = [f_{i1}(\cdot), f_{i2}(\cdot), \dots, f_{im}(\cdot)]^T$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为未知的光滑函数矩阵.

控制系统设计的目的是, 通过直接设计自适应控制器使得整个闭环系统的所有信号最终一致有界, 同时输出能稳定地跟踪期望的轨迹  $y_d$ .

## 3 控制器设计与稳定性分析

下面应用动态反馈、反馈线性化、反演以及神经网络自适应理论进行控制器设计. 在控制器设计之前先作如下假设:

**假设 1** 对于函数向量  $h: \Omega \mapsto R^p$ , 任给  $\sigma > 0$ , 总存在高斯函数向量  $S: R^m \mapsto R^l$  和最优权值矩阵  $W^*$  使得  $\|h(x) - W^{*T}S(V^{*T}X)\| \leq \sigma, \forall x \in \Omega$ , 其中  $\Omega$  是  $R^m$  的一个紧集. 定义

$$h(x) - W^{*T}S(V^{*T}X) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta h(x)$$

为重构误差, 权阵误差为  $\tilde{W} = \hat{W} - W^*$ , 其中  $\hat{W}$  是  $W^*$  的最优估计.

**Step 1** 考虑式(1)的第 1 个方程  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ , 求其导数得

$$\ddot{x}_1 = J_{x_1}(x_1, x_2)f_1(x_1, x_2) + J_{x_2}(x_1, x_2)\dot{x}_2. \quad (2)$$

其中:  $J_{x_1}(x_1, x_2) = \partial f_1(x_1, x_2)/\partial x_1$  为  $f_1(x_1, x_2)$  对  $x_1$  的偏导数,  $J_{x_2}(x_1, x_2) = \partial f_1(x_1, x_2)/\partial x_2$  为  $f_1(x_1, x_2)$  对  $x_2$  的偏导数. 设

$$f_1(x_1, x_2) = f_{10}(x_1, x_2) + \Delta f_{10}(x_1, x_2),$$

$$J_{x_1}(x_1, x_2) = J_{x_10}(x_1, x_2) + \Delta J_{x_10}(x_1, x_2),$$

$$J_{x_2}(x_1, x_2) = J_{x_20}(x_1, x_2) + \Delta J_{x_20}(x_1, x_2).$$

其中: 等式右边第 1 项为已知项, 第 2 项为未知项 (以下相同). 式(2)可改写为

$$\ddot{x}_1 = J_{x_10}(x_1, x_2)f_{10}(x_1, x_2) + J_{x_20}(x_1, x_2)\dot{x}_2 + \Delta f_1(x_1, x_2), \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta f_1(x_1, x_2) = & \Delta J_{x_10}(x_1, x_2)f_{10}(x_1, x_2) + \\ & J_{x_10}(x_1, x_2)\Delta f_{10}(x_1, x_2) + \\ & \Delta J_{x_10}(x_1, x_2)\Delta f_{10}(x_1, x_2) + \\ & \Delta J_{x_20}(x_1, x_2)\dot{x}_2. \end{aligned}$$

令  $z_1 = x_1 - x_{1d}$ ,  $x_{1d}$  为  $x_1$  的期望信号. 选取虚拟控制量

$$\dot{x}_{2d} = -J_{x_20}^{-1}(x_1, x_2)[J_{x_10}(x_1, x_2)f_{10}(x_1, x_2) - J_{x_20}(x_1, x_2)z_2 + v_1], \quad (4)$$

其中:  $v_1 = k_1 z_1 + (k_1 + 1)\dot{z}_1 - \ddot{x}_{1d} + v_{NN1} - v_{1r}$ ;  $z_2$  在下面定义;  $k_1 > 0$  为设计参数;  $\hat{x}_1$  可由跟踪微分器得到, 跟踪微分器的输出  $\hat{x}_1$  与  $x_1$  之间的误差可一并由神经网络逼近, 为方便起见, 这里不再区分  $\hat{x}_i$  和  $\hat{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $v_{NN1}$  为神经网络补偿项, 用于克服系统中不确定性的影响. 由神经网络的逼近特性可以设

$$\Delta f_1(x_1, x_2) = W_1^{*T}S_1(V_1^{*T}X_1) + \varepsilon_1. \quad (5)$$

其中: 多层神经网络  $W_1^{*T}S_1(V_1^{*T}X_1) + \varepsilon_1$  是  $\Delta f_1(x_1, x_2)$  的最优逼近;  $X_1 = [x_1^T, x_2^T, \dot{x}_1^T, 1]^T$  为神经网络的输入;  $\|\varepsilon_1\| \leq \varepsilon_{1u}$  为神经网络逼近误差,  $\varepsilon_{1u} > 0$ . 令

$$v_{NN1} = \hat{W}_1^T S_1(\hat{V}_1^T X_1), \quad (6)$$

将不确定性的表达式代入(3)并经变换可得

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & J_{x_10}(x_1, x_2)f_{10}(x_1, x_2) + J_{x_20}(x_1, x_2)\dot{x}_{2d} + \\ & \varepsilon_1 + W_1^{*T}S_1(V_1^{*T}X_1) + J_{x_20}(x_1, x_2)(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}). \end{aligned} \quad (7)$$

求  $z_1$  二阶导数并将式(4)代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & -k_1 z_1 - \hat{W}_1^T S_1(\hat{V}_1^T X_1) + W_1^{*T} S_1(V_1^{*T} X_1) - \\ & (k_1 + 1)\dot{z}_1 + J_{x_2 0}(x_1, x_2)(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) + \\ & v_{1r} + \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (8)$$

利用文献[18]引理2.2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & -k_1 z_1 - (k_1 + 1)\dot{z}_1 + J_{x_2 0}(x_1, x_2)z_{2E} + \\ & v_{1r} - \tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1) - \\ & \hat{W}_1^T \hat{S}'_1 \tilde{V}_1^T X_1 - d_{u1} + \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $z_{2E} = z_2 + \dot{z}_2$ ,  $z_2 = x_2 - x_{2d}$ ,  $x_{2d}$  为  $x_2$  的期望信号,  $d_{u1}$  的定义见文献[18]. 令  $z_{1E} = z_1 + \dot{z}_1$ , 其导数为

$$\dot{z}_{1E} = A_1 z_{1E} + \Theta_1. \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 = & -k_1 I, \\ \Theta_1 = & -\tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1) - \hat{W}_1^T \hat{S}'_1 \tilde{V}_1^T X_1 \\ & - d_{u1} + \varepsilon_1 + v_{1r} + J_{x_2 0}(x_1, x_2)z_{2E}. \end{aligned}$$

选取 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V_1 = & z_{1E}^T P_1 z_{1E} + \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \tilde{W}_1\} + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \Gamma_{V_1}^{-1} \tilde{V}_1\}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中:  $\Gamma_{W_1} = \Gamma_{W_1}^T > 0$ ,  $\Gamma_{V_1} = \Gamma_{V_1}^T > 0$  为设计参数. 因  $A_1$  为对角阵且稳定, 故存在正定对角阵  $P_1$  和  $Q_1$  使得  $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q_1$  成立. 求  $V_1$  的导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -z_{1E}^T Q_1 z_{1E} + \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{W}}_1\} - z_{1E}^T P_1 \times \\ & [\tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1) + \hat{W}_1^T \hat{S}'_1 \tilde{V}_1^T X_1] + \\ & \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \Gamma_{V_1}^{-1} \dot{\tilde{V}}_1\} - z_{1E}^T P_1 (d_{u1} - \varepsilon_1 - v_{1r}) + \\ & z_{1E}^T P_1 J_{x_2 0}(x_1, x_2)z_{2E}. \end{aligned} \quad (12)$$

考虑选取如下权重矩阵自适应调节律:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}}_1 = & \Gamma_{W_1}[(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1)z_{1E}^T P_1 - \sigma_{W_1} \tilde{W}_1], \\ \dot{\tilde{V}}_1 = & \Gamma_{V_1}(X_1 z_{1E}^T P_1 \hat{W}_1^T \hat{S}'_1 - \sigma_{V_1} \tilde{V}_1). \end{aligned} \quad (13)$$

其中:  $\sigma_{W_1} > 0$ ,  $\sigma_{V_1} > 0$  为小的设计参数. 将式(13)代入(12), 利用性质  $\text{tr}\{yx^T\} = x^T y$  得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\lambda_{\min}(Q_1)\|z_{1E}\|^2 - \sigma_{W_1} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \tilde{W}_1\} - \\ & \sigma_{V_1} \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \tilde{V}_1\} - z_{1E}^T P_1 (d_{u1} - \varepsilon_1 - v_{1r}) + \\ & z_{1E}^T P_1 J_{x_2 0}(x_1, x_2)z_{2E}. \end{aligned} \quad (14)$$

设计鲁棒项为

$$\begin{aligned} v_{1r} = & -P_1 z_{1E} (\|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1\|_F^2 \|X_1\|^2 + \\ & \|\hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1\|_F^2 + 2)/\eta_1, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\eta_1 > 0$  为一小的常数. 利用文献[18]引理2.2, 将式(15)代入(14), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\lambda_{\min}(Q_1)\|z_{1E}\|^2 - \sigma_{W_1} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \tilde{W}_1\} - \sigma_{V_1} \times \\ & \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \tilde{V}_1\} - \|z_{1E}^T P_1\|^2 (\|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1\|_F^2 \|X_1\|^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1\|_F^2 + 2)/\eta_1 + z_{1E}^T P_1 J_{x_2 0}(x_1, x_2)z_{2E} + \\ & \|z_{1E}^T P_1 (\|V_1^*\|_F \|\tilde{W}_1^T \hat{S}'_1\|_F \|X_1\| + \\ & \|W_1^*\|_F \|\hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1\|_F + \sqrt{l} \|W_1^*\|_F + \varepsilon_{1u}). \end{aligned} \quad (16)$$

利用下列形式的不等式<sup>[18]</sup>:

$$\begin{aligned} -\sigma_{W_1} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \tilde{W}_1\} & \leq \frac{\sigma_{W_1}}{2} \|W_1^*\|_F^2 - \frac{\sigma_{W_1}}{2} \|\tilde{W}_1\|_F^2, \\ \|z_{1E}^T P_1\| \|V_1^*\|_F \|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1\|_F \|X_1\| & \leq \\ \frac{\|z_{1E}^T P_1\|^2}{\eta_1} \|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1\|_F^2 \|X_1\|^2 + \frac{\eta_1}{4} \|V_1^*\|_F^2, \\ \|z_{1E}^T P_1\| (\sqrt{l} \|W_1^*\|_F + \varepsilon_{1u}) & \leq \\ 2\|z_{1E}^T P_1\|^2 / \eta_1 + \frac{l\eta_1}{4} \|W_1^*\|_F^2 + \frac{\eta_1}{4} \varepsilon_{1u}^2, \end{aligned}$$

式(16)可简化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\lambda_{\min}(Q_1)\|z_{1E}\|^2 - \frac{\sigma_{W_1}}{2} \|\tilde{W}_1\|_F^2 - \\ & \frac{\sigma_{V_1}}{2} \|\tilde{V}_1\|_F^2 + b_1 + z_{1E}^T P_1 J_{x_2 0}(x_1, x_2)z_{2E}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} b_1 = & \frac{\eta_1}{4} (\|W_1^*\|_F^2 + \|V_1^*\|_F^2 + l\|W_1^*\|_F^2 + \varepsilon_{1u}^2) + \\ & \frac{\sigma_{W_1}}{2} \|W_1^*\|_F^2 + \frac{\sigma_{V_1}}{2} \|V_1^*\|_F^2 \end{aligned}$$

为一有界常数.

**Step i** ( $2 \leq i \leq n-1$ ) 下面以  $i=2$  为例进行推导. 考虑子系统  $\dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2, x_3)$ , 求其导数得

$$\ddot{x}_2 = J_{\bar{x}_2}(\bar{x}_2, x_3)\bar{f}_2(\bar{x}_2, x_3) + J_{x_3}(\bar{x}_2, x_3)\dot{x}_3. \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}_2}(\bar{x}_2, x_3) = & \left[ \frac{\partial f_2(\bar{x}_2, x_3)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_2(\bar{x}_2, x_3)}{\partial x_2} \right], \\ \bar{f}_2(\bar{x}_2, x_3) = & [f_1^T(x_1, x_2) \quad f_2^T(\bar{x}_2, x_3)]^T. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(\bar{x}_2, x_3) = & \bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3) + \Delta \bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3), \\ J_{\bar{x}_2}(\bar{x}_2, x_3) = & J_{\bar{x}_2 0}(\bar{x}_2, x_3) + \Delta J_{\bar{x}_2 0}(\bar{x}_2, x_3), \\ J_{x_3}(\bar{x}_2, x_3) = & J_{x_3 0}(\bar{x}_2, x_3) + \Delta J_{x_3 0}(\bar{x}_2, x_3), \end{aligned}$$

则式(18)可表示为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = & J_{\bar{x}_2 0}(\bar{x}_2, x_3)\bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3) + J_{x_3 0}(\bar{x}_2, x_3)\dot{x}_3 + \\ & \Delta \bar{f}_2(\bar{x}_2, x_3), \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta \bar{f}_2(\bar{x}_2, x_3) = & \Delta J_{\bar{x}_2 0}(\bar{x}_2, x_3)\bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3) + \\ & J_{\bar{x}_2 0}(\bar{x}_2, x_3)\Delta \bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3) + \\ & \Delta J_{\bar{x}_2 0}(\bar{x}_2, x_3)\Delta \bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3) + \\ & \Delta J_{x_3 0}(\bar{x}_2, x_3)\dot{x}_3. \end{aligned}$$

选取虚拟控制量为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{3d} = & -J_{x_3 0}^{-1}(\bar{x}_2, x_3)[J_{\bar{x}_2 0}(\bar{x}_2, x_3)\bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3) - \\ & J_{x_3 0}(\bar{x}_2, x_3)z_3 + v_2], \end{aligned} \quad (20)$$

其中:  $v_2 = k_2 z_{2E} + \dot{z}_2 + P_2^{-1} J_{x_{20}}^T(x_1, x_2) P_1 z_{1E} - \ddot{x}_{2d} + v_{NN2} - v_{2r}$ ,  $P_2$  在下面定义,  $k_2 > 0$  为设计参数. 由神经网络的逼近特性可以设

$$\Delta \bar{f}_2(\bar{x}_2, x_3) = W_2^{*T} S_2(V_2^{*T} X_2) + \varepsilon_2. \quad (21)$$

其中: 多层神经网络  $W_2^{*T} S_2(V_2^{*T} X_2)$  是  $\Delta \bar{f}_2(\bar{x}_2, x_3)$  的最优逼近;  $X_2 = [\bar{x}_3^T, \dot{x}_3^T, 1]^T$  为神经网络的输入;  $\|\varepsilon_2\| \leq \varepsilon_{2u}$  为神经网络逼近误差,  $\varepsilon_{2u} > 0$ . 令

$$v_{NN2} = \hat{W}_2^T S_2(\hat{V}_2^T X_2), \quad (22)$$

将式 (21) 代入 (19), 得

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = & J_{\bar{x}_{20}}(\bar{x}_2, x_3) \bar{f}_{20}(\bar{x}_2, x_3) + J_{x_{30}}(\bar{x}_2, x_3) \dot{x}_{3d} + \\ & \varepsilon_2 + W_2^{*T} S_2(V_2^{*T} X_2) + J_{x_{30}}(\bar{x}_2, x_3) \dot{z}_3, \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $z_3 = x_3 - x_{3d}$ . 利用式 (20) 和 (23) 求  $z_{2E}$  的导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2E} = & -\hat{W}_2^T S_2(\hat{V}_2^T X_2) + W_2^{*T} S_2(V_2^{*T} X_2) + \\ & J_{x_{30}}(\bar{x}_2, x_3) z_{3E} + P_2^{-1} J_{x_{20}}^T(x_1, x_2) P_1 z_{1E} + \\ & \varepsilon_2 + v_{2r} - k_2 z_{2E}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $z_{3E} = z_3 + \dot{z}_3$ . 将式 (24) 表示为

$$\dot{z}_{2E} = A_2 z_{2E} + \Theta_2. \quad (25)$$

其中:  $A_2 = -k_2 I$ ,  $\Theta_2 = -\hat{W}_2^T S_2(\hat{V}_2^T X_2) + \varepsilon_2 + v_{2r} + W_2^{*T} S_2(V_2^{*T} X_2) + P_2^{-1} J_{x_{20}}^T(x_1, x_2) P_1 z_{1E} + J_{x_{30}}(\bar{x}_2, x_3) z_{3E}$ . 选取如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V_2 = & V_1 + \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{W}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \tilde{W}_2\} + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{V}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \tilde{V}_2\} + z_{2E}^T P_2 z_{2E}. \end{aligned} \quad (26)$$

其中:  $\Gamma_{W_2} = \Gamma_{W_2}^T > 0$ ,  $\Gamma_{V_2} = \Gamma_{V_2}^T > 0$  为设计参数. 因  $A_2$  为对角阵且稳定, 故存在正定对角阵  $P_2$  和  $Q_2$  使得  $A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q_2$  成立. 求  $V_2$  的导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \dot{V}_1 + \text{tr}\{\tilde{W}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{W}}_2\} + \text{tr}\{\tilde{V}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \dot{\tilde{V}}_2\} - \\ & z_{2E}^T Q_2 z_{2E} + z_{2E}^T P_2 [J_{x_{30}}(\bar{x}_2, x_3) z_{3E} + \\ & P_2^{-1} J_{x_{20}}^T(x_1, x_2) P_1 z_{1E} - \tilde{W}_2^T (\hat{S}_2 - \hat{S}'_2 \hat{V}_2^T \times \\ & X_2) - \hat{W}_2^T \hat{S}'_2 \hat{V}_2^T X_2 - (d_{u2} - \varepsilon_2 - v_{2r})]. \end{aligned} \quad (27)$$

考虑选取如下权重矩阵自适应调节律:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}}_2 = & \Gamma_{W_2} [( \hat{S}_2 - \hat{S}'_2 \hat{V}_2^T X_2 ) z_{2E}^T P_2 - \sigma_{W_2} \tilde{W}_2], \\ \dot{\tilde{V}}_2 = & \Gamma_{V_2} (X_2 z_{2E}^T P_2 \tilde{W}_2^T \hat{S}'_2 - \sigma_{V_2} \tilde{V}_2). \end{aligned} \quad (28)$$

其中:  $\sigma_{W_2} > 0$ ,  $\sigma_{V_2} > 0$  为小的设计参数. 利用  $\text{tr}\{yx^T\} = x^T y$ , 并将式 (28) 代入 (27), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\lambda_{\min}(Q_1) \|z_{1E}\|^2 - \lambda_{\min}(Q_2) \|z_{2E}\|^2 - \\ & \sigma_{W_2} \text{tr}\{\tilde{W}_2^T \tilde{W}_2\} - \sigma_{V_2} \text{tr}\{\tilde{V}_2^T \tilde{V}_2\} - \\ & z_{2E}^T P_2 (d_{u2} - \varepsilon_2 - v_{2r}) + b_1 + \\ & z_{2E}^T P_2 J_{x_{30}}(\bar{x}_2, x_3) z_{3E}. \end{aligned} \quad (29)$$

设计鲁棒项为

$$\begin{aligned} v_{2r} = & -P_2 z_{2E} (\|\hat{W}_2^T \hat{S}'_2\|_F^2 \|X_2\|^2 + \\ & \|\hat{S}'_2 \hat{V}_2^T X_2\|_F^2 + 2) / \eta_2, \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $\eta_2 > 0$  为小常数. 利用文献 [18] 引理 2.2, 将式 (30) 代入 (29), 类似第 1 步的推导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\lambda_{\min}(Q_1) \|z_{1E}\|^2 - \lambda_{\min}(Q_2) \|z_{2E}\|^2 - \\ & \frac{\sigma_{W_1}}{2} \|\tilde{W}_1\|_F^2 - \frac{\sigma_{V_1}}{2} \|\tilde{V}_1\|_F^2 - \frac{\sigma_{W_2}}{2} \|\tilde{W}_2\|_F^2 - \\ & \frac{\sigma_{V_2}}{2} \|\tilde{V}_2\|_F^2 + b_1 + b_2 + \\ & z_{2E}^T P_2 J_{x_{30}}(\bar{x}_2, x_3) z_{3E}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} b_2 = & \frac{\eta_2}{4} (\|W_2^*\|_F^2 + \|V_2^*\|_F^2 + l \|W_2^*\|_F^2 + \varepsilon_{2u}^2) + \\ & \frac{\sigma_{W_2}}{2} \|W_2^*\|_F^2 + \frac{\sigma_{V_2}}{2} \|V_2^*\|_F^2 \end{aligned}$$

为有界常数.

**Step n** 对系统  $\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u)$  两边求导, 可得

$$\ddot{x}_n = J_{\bar{x}_n}(\bar{x}_n, u) \bar{f}_n(\bar{x}_n, u) + J_u(\bar{x}_n, u) \dot{u}. \quad (32)$$

其中

$$J_{\bar{x}_n}(\bar{x}_n, u) = \left[ \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial x_n} \right],$$

$$\bar{f}_n(\bar{x}_n, u) = [f_1^T(x_1, x_2) \quad \dots \quad f_n^T(\bar{x}_n, u)]^T.$$

令

$$\bar{f}_n(\bar{x}_n, u) = \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u) + \Delta \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u),$$

$$J_{\bar{x}_n}(\bar{x}_n, u) = J_{\bar{x}_n0}(\bar{x}_n, u) + \Delta J_{\bar{x}_n0}(\bar{x}_n, u),$$

$$J_u(\bar{x}_n, u) = J_{u0}(\bar{x}_n, u) + \Delta J_{u0}(\bar{x}_n, u),$$

则式 (32) 可重写为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n = & J_{\bar{x}_n0}(\bar{x}_n, u) \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u) + J_{u0}(\bar{x}_n, u) \dot{u} + \\ & \Delta \bar{f}_n(\bar{x}_n, u), \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\Delta \bar{f}_n(\bar{x}_n, u) =$$

$$\Delta J_{\bar{x}_n0}(\bar{x}_n, u) \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u) + J_{\bar{x}_n0}(\bar{x}_n, u) \Delta \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u) +$$

$$\Delta J_{\bar{x}_n0}(\bar{x}_n, u) \Delta \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u) + \Delta J_{u0}(\bar{x}_n, u) \dot{u}.$$

选取控制量为

$$\dot{u} = -J_{u0}^{-1}(\bar{x}_n, u) [J_{\bar{x}_n0}(\bar{x}_n, u) \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u) + v_n]. \quad (34)$$

其中:  $v_n = k_n z_{nE} + P_n^{-1} J_{x_{n0}}^T(\bar{x}_{n-1}, x_n) P_{n-1} z_{(n-1)E} + \dot{z}_n - \ddot{x}_{nd} + v_{NNn} - v_{nr}$ ,  $P_n$  在下面定义,  $k_n > 0$  为设计参数,  $x_{nd}$  是  $x_n$  的期望信号. 由神经网络的逼近特性可以设

$$\Delta f_n(\bar{x}_n, u) = W_n^{*T} S_n(V_n^{*T} X_n) + \varepsilon_n, \quad (35)$$

其中: 多层神经网络  $W_n^{*T} S_n(V_n^{*T} X_n)$  为  $\Delta f_n(\bar{x}_n, u)$  的最优逼近;  $X_n = [\bar{x}_n^T, \dot{x}_n^T, 1]^T$  为神经网络的输入;  $\|\varepsilon_n\| \leq \varepsilon_{nu}$  为神经网络逼近误差,  $\varepsilon_{nu} > 0$ .

令神经网络项为

$$v_{NNn} = \hat{W}_n^T S_n(\hat{V}_n^T X_n), \quad (36)$$

将式(35)代入(33), 得

$$\ddot{x}_n = J_{\bar{x}_n 0}(\bar{x}_n, u) \bar{f}_{n0}(\bar{x}_n, u) + J_{u0}(\bar{x}_n, u) \dot{u} + W_n^{*T} S_n (V_n^{*T} X_n) + \varepsilon_n. \quad (37)$$

令  $z_{nE} = z_n + \dot{z}_n$ , 求其导数并利用式(34)和(37), 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_{nE} = & -k_n z_{nE} - \hat{W}_n^T S_n (\hat{V}_n^T X_n) + \\ & W_n^{*T} S_n (V_n^{*T} X_n) + \varepsilon_n + v_{nr} \\ & P_n^{-1} J_{\bar{x}_n 0}^T(\bar{x}_{n-1}, x_n) P_{n-1} z_{(n-1)E}. \end{aligned} \quad (38)$$

显然式(38)可写为如下形式:

$$\dot{z}_{nE} = A_n z_{nE} + \Theta_n. \quad (39)$$

其中:  $A_n = -k_n I$ ,  $\Theta_n = -\hat{W}_n^T S_n (\hat{V}_n^T X_n) + W_n^{*T} S_n \times (V_n^{*T} X_n) + \varepsilon_n + P_n^{-1} J_{\bar{x}_n 0}^T(\bar{x}_{n-1}, x_n) P_{(n-1)} z_{(n-1)E} + v_{nr}$ . 选取 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V_n = & \sum_{i=1}^{n-1} V_i + z_{nE}^T P_n z_{nE} + \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{W}_n^T \Gamma_{W_n}^{-1} \tilde{W}_n\} + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{V}_n^T \Gamma_{V_n}^{-1} \tilde{V}_n\}. \end{aligned} \quad (40)$$

其中:  $\Gamma_{W_n} = \Gamma_{W_n}^T > 0$ ,  $\Gamma_{V_n} = \Gamma_{V_n}^T > 0$  为设计参数. 因  $A_n$  为对角阵且稳定, 故存在正定对角阵  $P_n$  和  $Q_n$  使得  $A_n^T P_n + P_n A_n = -Q_n$  成立. 对  $V_n$  求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & \sum_{i=1}^{n-1} \dot{V}_i - z_{nE}^T Q_n z_{nE} + \text{tr}\{\tilde{W}_n^T \Gamma_{W_n}^{-1} \dot{\tilde{W}}_n\} + \\ & z_{nE}^T J_{\bar{x}_n 0}^T(\bar{x}_{n-1}, x_n) P_{(n-1)} z_{(n-1)E} - \\ & z_{nE}^T P_n [\tilde{W}_n^T (\hat{S}_n - \hat{S}'_n \hat{V}_n^T X_n) + \\ & \hat{W}_n^T \hat{S}'_n \tilde{V}_n^T X_n] + \text{tr}\{\tilde{V}_n^T \Gamma_{V_n}^{-1} \dot{\tilde{V}}_n\} - \\ & z_{nE}^T P_n (d_{un} - \varepsilon_n - v_{nr}). \end{aligned} \quad (41)$$

选取如下权重矩阵自适应调节律:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_n = & \Gamma_{W_n} [(\hat{S}_n - \hat{S}'_n \hat{V}_n^T X_n) z_{nE}^T P_n - \sigma_{W_n} \hat{W}_n], \\ \dot{\hat{V}}_n = & \Gamma_{V_n} (X_n z_{nE}^T P_n \hat{W}_n^T \hat{S}'_n - \sigma_{V_n} \hat{V}_n). \end{aligned} \quad (42)$$

其中:  $\sigma_{W_n} > 0$ ,  $\sigma_{V_n} > 0$  为小的设计参数. 将式(42)代入(41)并经推导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \sum_{i=1}^n \lambda_{\min}(Q_i) \|z_{iE}\|^2 + \text{tr}\{\tilde{W}_n^T \times \\ & [(\hat{S}_n - \hat{S}'_n \hat{V}_n^T X_n) z_{nE}^T P_n - \sigma_{W_n} \hat{W}_n]\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{V}_n^T (X_n z_{nE}^T P_n \hat{W}_n^T \hat{S}'_n - \sigma_{V_n} \hat{V}_n)\} - z_{nE}^T \times \\ & P_n [\tilde{W}_n^T (\hat{S}_n - \hat{S}'_n \hat{V}_n^T X_n) + \hat{W}_n^T \hat{S}'_n \tilde{V}_n^T X_n] - \\ & z_{nE}^T P_n (d_{un} - \varepsilon_n - v_{nr}) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i. \end{aligned} \quad (43)$$

设计鲁棒项函数为

$$\begin{aligned} v_{nr} = & -P_n z_{nE} (\|\hat{W}_n^T \hat{S}'_n\|_F^2 \|X_n\|^2 + \\ & \|\hat{S}'_n \hat{V}_n^T X_n\|_F^2 + 2) / \eta_n, \end{aligned} \quad (44)$$

其中  $\eta_n > 0$  为小常数. 类似前面的推导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_{\min}(Q_i) \|z_{iE}\|^2 + \frac{\sigma_{W_i}}{2} \|\tilde{W}_i\|_F^2 + \right. \\ & \left. \frac{\sigma_{V_i}}{2} \|\tilde{V}_i\|_F^2 - b_i \right] \leq -k V_n + b. \end{aligned} \quad (45)$$

其中

$$\begin{aligned} b_n = & \frac{\eta_n}{4} (\|W_n^*\|_F^2 + \|V_n^*\|_F^2 + l \|W_n^*\|_F^2 + \varepsilon_{nu}^2) + \\ & \frac{\sigma_{W_n}}{2} \|W_n^*\|_F^2 + \frac{\sigma_{V_n}}{2} \|V_n^*\|_F^2 \end{aligned}$$

为有界常数, 而

$$k = \min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ 2\lambda_{\min}(Q_j), \frac{\sigma_{W_j}}{\lambda_{\max}(\Gamma_{W_j}^{-1})}, \frac{\sigma_{V_j}}{\lambda_{\max}(\Gamma_{V_j}^{-1})} \right\},$$

$$b = \sum_{j=1}^n b_j.$$

在  $[0, t]$  对式(45)积分可得

$$V_n(t) \leq V_n(0) e^{-kt} + \frac{1}{k} b \leq V_n(0) + \frac{b}{k}, \quad \forall t \geq 0. \quad (46)$$

定义

$$\lambda_{\min}(\Gamma_W^{-1}) = \min_{j=1,2,\dots,n} \{\lambda_{\min}(\Gamma_{W_j}^{-1})\},$$

$$\lambda_{\min}(\Gamma_V^{-1}) = \min_{j=1,2,\dots,n} \{\lambda_{\min}(\Gamma_{V_j}^{-1})\},$$

则由式(40)和(46)可以推出

$$\sum_{j=1}^n \|\tilde{W}_j\|_F^2 \leq \frac{2V_n(t)}{\lambda_{\min}(\Gamma_W^{-1})}, \quad \sum_{j=1}^n \|\tilde{V}_j\|_F^2 \leq \frac{2V_n(t)}{\lambda_{\min}(\Gamma_V^{-1})}. \quad (47)$$

定义  $\lambda_{\min}(P) = \min_{j=1,2,\dots,n} \{\lambda_{\min}(P_j)\}$ , 由式(40)还可得到

$$V_n(t) \geq \lambda_{\min}(P) \sum_{j=1}^n \|z_{jE}\|^2. \quad (48)$$

由式(45)~(48)可知闭环系统所有信号均有界. 由式(45)可得  $\dot{V}_n(t) \leq -\frac{k}{2} \sum_{j=1}^n \|z_{jE}\|^2 + b$ , 对其积分, 有

$$\int_0^t \|z_{jE}(\tau)\|^2 d\tau \leq 2[V_n(0) + tb]/k, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

综上所述, 可得如下结论:

**定理 1** 考虑系统(1), 在满足假设条件的前提下, 选取神经网络调节律为式(13), (28)和(42), 控制规律  $\dot{u}$  由式(34)给定, 则有如下结论成立:

1) 系统状态跟踪误差  $z_{jE}$  及神经网络各参数估计误差均有界且指数收敛至系统原点的一个邻域

$$\Omega = \left\{ z_{jE}, \tilde{W}_j, \tilde{V}_j \mid \sum_{j=1}^n \|z_{jE}\|^2 \leq \frac{V_n(0) + b/k}{\lambda_{\min}(P)}, \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^n \|\tilde{W}_j\|^2 \leq \frac{2[V_n(0) + b/k]}{\lambda_{\min}(\Gamma_W^{-1})}, \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^n \|\tilde{V}_j\|^2 \leq \frac{2[V_n(0) + b/k]}{\lambda_{\min}(\Gamma_V^{-1})}, j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

2) 以下不等式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|z_{jE}(\tau)\|^2 d\tau \leq V_n(0)/k.$$

#### 4 仿真算例

考虑如下非线性系统:

$$\dot{x}_1 = \sin x_1 + 5 \cos x_1 + x_2 + 0.5 \cos x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \sin x_2 - 5 \cos x_2 + u + 0.5 \sin u,$$

$$y = x_1.$$

期望输出为  $y_d = x_{1d} = 10$ , 状态的初始值均为 0.

控制系统参数设计如下:  $k_1 = 16$ ,  $k_2 = 15$ ,  $\Gamma_{W_1} = \Gamma_{W_2} = \text{diag}\{1.9\}$ ,  $\sigma_{W_1} = \sigma_{W_2} = 0.01$ ,  $\Gamma_{V_1} = \Gamma_{V_2} = \text{diag}\{0.1\}$ ,  $\sigma_{V_1} = \sigma_{V_2} = 0.1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0.001$ ,  $P_1 = P_2 = 1$ .

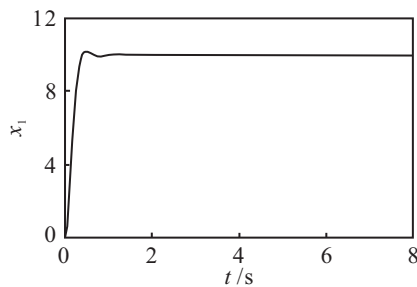


图 1 无不确定性时  $x_1$  的仿真曲线

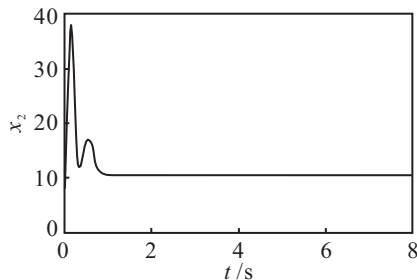


图 2 无不确定性时  $x_2$  的仿真曲线

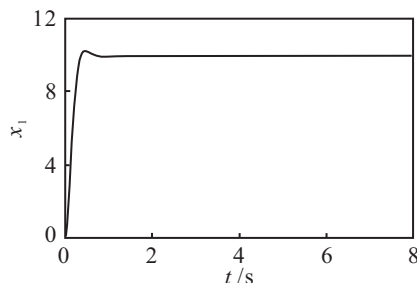


图 3 有不确定性时  $x_1$  的仿真曲线

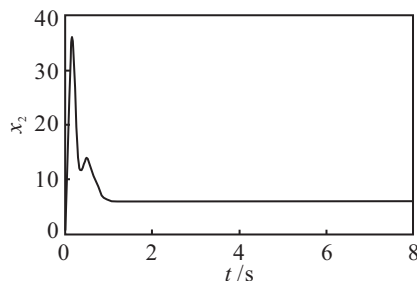


图 4 有不确定性时  $x_2$  的仿真曲线

仿真结果如图 1~图 4 所示. 其中: 图 1 为无不确定性时系统输出的仿真曲线, 图 2 为无不确定性时状态量  $x_2$  仿真曲线. 当系统的参数发生变化时, 算例第 1 个方程等式右边第 2 项的系数变为 3, 第 2 个方程等式右边第 2 项系数变为  $-3$ , 此时系统的仿真情况如图 3, 图 4 所示. 从仿真曲线可以看出, 无论是否有不确定性, 本文提出的方法均获得了较好的控制效果, 具有较强的适应性和鲁棒性.

#### 5 结 论

本文针对一类不确定块控非仿射系统提出了一种新的神经自适应控制器. 控制器的设计过程中用到了神经网络控制、动态反馈、反演设计和反馈线性化技术. 利用李雅普诺夫稳定理论证明了系统的稳定性并推导了神经网络权重的自适应调节律. 所提出的方法能够保证闭环系统中的所有信号有界, 对输出信号的跟踪误差能收敛到原点附近. 通过选择合适的设计参数能够保证闭环系统的控制性能.

#### 参考文献(References)

- [1] Isidori A. Nonlinear control system[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995: 219-292.
- [2] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: Wiley, 1995: 87-121.
- [3] Lewis F L, Jagannathan S, Yesildirek A. Neural network control of robot manipulators and nonlinear systems[M]. London: Taylor and Francis, 1999: 173-187.
- [4] Wang L X. Adaptive fuzzy systems and control: Design and analysis[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1994: 102-139.
- [5] Spooner T, Maggiore M, Ordóñez R, et al. Stable adaptive control and estimation for nonlinear systems-neural and fuzzy approximator techniques[M]. New York: Wiley, 2002: 206-208.
- [6] Ge S S, Hang C C, Zhang T. Nonlinear adaptive control using neural network and its application to cstr systems[J]. J of Process Control, 1998, 9(4): 313-323.
- [7] Boskovic J D, Chen L, Mehra R K. Adaptive control design for nonaffine models arising in flight control[J]. AIAA J of Guidance Control Dynamics, 2004, 27(2): 209-217.
- [8] Yang B J, Calise A J. Adaptive control of a class of nonaffine systems using neural networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2007, 18(4): 1149-1159.
- [9] Moulay E, Perruquetti W. Stabilization of nonaffine systems: A constructive method for polynomial systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(4): 520-526.

(下转第 76 页)