文章编号: 1001-0920 (2012) 01-0082-05

一个具有可调变权能力的变权向量

成 波[1,2], 刘三阳[1]

(1. 西安电子科技大学 理学院，西安 710071；2. 安康学院 数学系，陕西 安康 725000)

摘 要: 依据变权向量的定义构造一个带参数的变权向量, 并证明了变权向量与状态变权向量的关系定理; 通过引入变权向量的相对调节度概念, 求出了所构造的变权向量的相对调节度, 并分析了其变权效果. 最后运用该变权向量求解一个算例, 所得结果表明, 该变权向量不但具有较强的变权能力, 而且其变权能力将随参数取值的改变而变化.

关键词: 多目标决策；变权综合；变权向量；状态变权向量；相对调节度

中图分类号: O159 **文献标识码:** A

A variable weights vector with adjustable capability to change weights

CHENG Bo[1,2], *LIU San-yang*[1]

(1. School of Science，Xidian University，Xi’an 710071，China；2. Department of Mathematics，Ankang University, Ankang 725000，China. Correspondent：CHENG Bo，E-mail：cb9802@163.com)

Abstract: A variable weight vector with parameters is constructed by using its definition. A theorem for the relationship of a variable weight vector and its state variable weight is proved. By introducing a concept of relative adjustment degree, the capability of a variable weight vector is measured to change weights. The relative adjustment degree of the variable weight vector is calculated, and its capability to chang weights is analyzed. Finally, an example is solved by using the variable weight vector. The result shows that not only the variable weight vector has strong capability to adjust weights, but also its capability to adjust weights changes when the value of the parameter is adjusted.

Key words: multi-objective decision-making；variable weights synthesis；variable weights vector；state variable weight vector；relative adjustment degree

1 引 言

现实中存在着大量的多目标决策问题, 目前求解多目标决策问题的方法主要是通过某种集结方法将其转化为单目标决策问题, 然后通过求解相应的单目标问题来获得原问题的解. 线性加权综合方法是一种常用的集结方法, 称其为常权综合方法. 然而在实际应用中, 这种方法具有一定的片面性, 有时可能导致不科学的决策结果[1]. 为了避免这个问题, 文献 [1] 提出了变权思想; [2-4] 对变权的本质和原理进行了系统的研究, 定义了变权向量、状态变权向量和均衡函数等一系列概念, 提出了变权综合原理, 并得到了变权向量的一种构造方法. 随后, 许多学者研究了状态变权向量与均衡函数的性质及其构造方法[5-8]. [9-10] 研究了变权向量的变权效果和变权能力, 提出了离散度、调节度和调权水平等概念, 为分析变权向量的变权效果提供了有力的工具. 另外, 许多文献对变权综合方法的应用进行了研究[11-13].

对于变权综合方法而言, 构造变权向量是整个方法的关键. 文献 [14] 根据变权的思想和定义, 直接构造了一个变权向量. 受此启发, 本文根据变权向量的定义构造了一个带参数的变权向量, 并研究其对应的状态变权向量; 通过分析和实例求解, 研究了该变权向量的特性和变权效果, 并证明了变权向量与状态变权向量的关系定理.

2 变权向量与变权综合原理

变权向量和状态变权向量概念由文献 [2] 提出, 后经文献 [5-6] 修改并给出了惩罚型变权向量和激励型变权向量的定义.

定义 1 设 $[0,1]^m$ 为 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中的单位立方体, $w_j:[0,1]^m\to[0,1]\,(j=1,2,\cdots,m)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in[0,1]^m$. 如果 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})=(w_1(\boldsymbol{x}), w_2(\boldsymbol{x}),\cdots,w_m(\boldsymbol{x}))$ 满足:

收稿日期: 2010-08-30；**修回日期:** 2010-12-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974082).

作者简介: 成波(1971−), 男, 副教授, 博士生, 从事最优化理论与应用的研究；刘三阳(1959−), 男, 教授, 博士生导师, 从事最优化理论与应用等研究.

(W1) 归一性: $\sum_{j=1}^{m} w_j(\boldsymbol{x}) = 1$;

(W2) 连续性: $w_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 关于每个自变量连续 $(j = 1, 2, \cdots, m)$.

则称 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的变权向量, 简称变权向量. 相应的变权综合模型为

$$\max_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m} \Big(\sum_{j=1}^{m} x_j w_j(\boldsymbol{x})\Big).$$

如果变权向量 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 满足:

(W3) 惩罚性: $w_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 关于自变量 x_j 单调递减 $(j = 1, 2, \cdots, m)$,

则称 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为惩罚型变权向量.

如果变权向量 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 满足:

(W3′) 激励性: $w_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 关于自变量 x_j 单调递增 $(j = 1, 2, \cdots, m)$,

则称 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为激励型变权向量.

定义 2　设 $s_j : [0, 1]^m \to [0, 1]$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$, 如果 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = (s_1(\boldsymbol{x}), s_2(\boldsymbol{x}), \cdots, s_m(\boldsymbol{x}))$ 满足:

(S1) 对于任意 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in [0, 1]^m$, 若 $x_i \geqslant x_j$, 则 $s_i(\boldsymbol{x}) \leqslant s_j(\boldsymbol{x})$;

(S2) $s_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 关于每个自变量连续 $(j = 1, 2, \cdots, m)$;

(S3) 对于任何常权向量 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 满足定义 1 中 (W1), (W2) 和 (W3), 且

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \frac{(w_1 s_1(\boldsymbol{x}), \cdots, w_m s_m(\boldsymbol{x}))}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(\boldsymbol{x}))}. \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 为惩罚型状态变权向量, 其中式 (1) 为 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 的归一化的 Hadamard 乘积.

如果将 (S1) 换为如下的条件:

(S1′) 对于 $\boldsymbol{x}\in[0, 1]^m$, 若 $x_i \geqslant x_j$, 则 $s_i(\boldsymbol{x}) \geqslant s_j(\boldsymbol{x})$; 且将 (S3) 中的 (W3) 换成 (W3′), 则相应的 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 称为激励型状态变权向量.

用变权向量对多目标决策进行集结综合时, 不仅考虑了各目标的相对重要性 (目标权重), 而且考虑了目标值的组态水平 (状态变权向量), 这正是文献 [2] 中所揭示的变权综合原理. 对于一个给定的变权向量, 是否存在某个状态变权向量, 使得该变权向量是已知常权向量与其归一化的 Hadamard 乘积? 下面的定理回答了这个问题.

定理 1　设 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 为给定的常权向量且 $w_j > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$, $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^m$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = (w_1(\boldsymbol{x}), w_2(\boldsymbol{x}), \cdots, w_m(\boldsymbol{x}))$.

1) 如果 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为惩罚型变权向量, 则存在惩罚型状态变权向量 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 使得

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \frac{(w_1 s_1(\boldsymbol{x}), \cdots, w_m s_m(\boldsymbol{x}))}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(\boldsymbol{x}))}$$

的充要条件是: 对于任何 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in [0, 1]^m$, 若 $x_i \geqslant x_j$, 则 $\dfrac{w_i(\boldsymbol{x})}{w_i} \leqslant \dfrac{w_j(\boldsymbol{x})}{w_j}$;

2) 如果 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为激励型变权向量, 则存在激励型状态变权向量 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 使得

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \frac{(w_1 s_1(\boldsymbol{x}), \cdots, w_m s_m(\boldsymbol{x}))}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(\boldsymbol{x}))}$$

的充要条件是: 对于任何 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in [0, 1]^m$, 若 $x_i \leqslant x_j$, 则 $\dfrac{w_i(\boldsymbol{x})}{w_i} \leqslant \dfrac{w_j(\boldsymbol{x})}{w_j}$.

证明　1) 充分性. 设 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为惩罚型变权向量, 则对于每个 $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^m$ 都有 $w_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{m} w_j(\boldsymbol{x}) = 1$. 因 $w_j > 0$, 故取

$$s_j(\boldsymbol{x}) = w_j(\boldsymbol{x}) \Big/ \Big(w_j \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i(\boldsymbol{x})}{w_i}\Big), \tag{2}$$

置 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = (s_1(\boldsymbol{x}), s_2(\boldsymbol{x}), \cdots, s_m(\boldsymbol{x}))$. 下面证明 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 是惩罚型状态变权向量. 首先, 由 $w_j > 0, w_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, 根据式 (2) 得 $0 \leqslant s_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$. 其次, 因 $w_j(\boldsymbol{x})$ 关于每个自变量连续, 故 $s_j(\boldsymbol{x})$ 关于每个自变量连续, 即 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 满足 (S2). 经计算, 恰好有

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \frac{(w_1 s_1(\boldsymbol{x}), \cdots, w_m s_m(\boldsymbol{x}))}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(\boldsymbol{x}))},$$

因此 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 满足 (S3). 而对于 $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^m$, 当 $x_i \geqslant x_j$ 时, 因 $w_i(\boldsymbol{x})/w_i \leqslant w_j(\boldsymbol{x})/w_j$, 故

$$s_i(\boldsymbol{x}) - s_j(\boldsymbol{x}) = \frac{w_i(\boldsymbol{x})}{w_i} - \frac{w_j(\boldsymbol{x})}{w_j} \leqslant 0,$$

即 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 也满足 (S1). 因此根据定义 2 可知, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 是惩罚型状态变权向量.

必要性. 由文献 [10] 中的定理 1 可得.

2) 证明类似于 1). □

注 1　在多目标决策问题中, 所考虑的目标都是必要的, 从而每个目标的权重都应为非零, 因此定理 1 中条件 $w_j > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 是合理的.

为了衡量变权向量对每一个权重的变权水平, 引入变权向量的相对调节度概念.

定义 3　设 $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^m$, $\boldsymbol{w}$ 为常权向量且 $w_j > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为变权向量, 称

$$v_j(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})) = \frac{w_j(\boldsymbol{x}) - w_j}{w_j}$$

为变权向量 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 w_j 的相对调节度, 称

$$\bar{v}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(v_j(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})))^2}$$

为 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的总相对调节度.

相对调节度 $v_j(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))$ 表示变权 $w_j(\boldsymbol{x})$ 对常权 w_j 的相对改变量. 显然当 $v_j(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))$ 为正时, 变权增大了 x_j 的权重; 当 $v_j(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))$ 为负时, 变权减小了 x_j 的权重. 总相对调节度表示变权向量 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 对常权向量 $\boldsymbol{w}$ 各分量相对改变量的综合. 相对调节度对于分析和确定变权向量的变权水平具有重要作用, 通常, 决策者可以事先给定一个相对调节度的上限, 这样不仅可以减少构造变权向量的随意性, 而且构造出的变权向量也符合决策者对变权的基本要求.

3 带参数的变权向量

目前构造变权向量的一般方法是先构造状态变权向量, 然后用它与常权向量一起生成变权向量. 事实上, 依据变权的基本思想, 按照变权向量的定义可以直接构造变权向量[14]. 对于给定的常权向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$, 构造向量 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})=(w_1(\boldsymbol{x}),w_2(\boldsymbol{x}),\cdots,w_m(\boldsymbol{x}))$, 这里

$$w_j(\boldsymbol{x})=(1+\alpha(\bar{x}-x_j))w_j. \tag{3}$$

其中: $j=1,2,\cdots,m;\boldsymbol{x}\in[0,1]^m;\bar{x}=\sum_{j=1}^{m}(x_jw_j)$; 参数 α 满足

$$\frac{1}{\min\limits_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j-\bar{x})}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{\max\limits_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j-\bar{x})}. \tag{4}$$

定理 2 由式 (3) 构成的 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 是可用状态变权向量表示的变权向量. 当 $\alpha>0$ 时, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 是惩罚型变权向量; 当 $\alpha<0$ 时, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 是激励型变权向量.

证明 显然 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 满足定义 1 中的连续性. 若

$$0<\alpha\leqslant\frac{1}{\max\limits_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j-\bar{x})},$$

则对于 $\boldsymbol{x}\in[0,1]^m$, 当 $\bar{x}-x_j\geqslant 0$ 时显然有 $w_j(\boldsymbol{x})=(1+\alpha(\bar{x}-x_j))w_j\geqslant 0$; 当 $\bar{x}-x_j<0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&w_j(\boldsymbol{x})=(1+\alpha(\bar{x}-x_j))w_j\geqslant\\&\Big(1+\frac{\bar{x}-x_j}{\max\limits_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j-\bar{x})}\Big)w_j\geqslant\\&\Big(1+\frac{\bar{x}-x_j}{x_j-\bar{x}}\Big)w_j=0.\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}w_j(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{m}(1+\alpha(\bar{x}-x_j))w_j=\\&\sum_{j=1}^{m}w_j+\alpha\Big(\bar{x}\sum_{j=1}^{m}w_j-\sum_{j=1}^{m}x_jw_j\Big)=1,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 满足定义 1 中的归一性. 又因为 $\partial w_j(\boldsymbol{x})/\partial x_j=\alpha(w_j-1)<0$, 所以 $w_j(\boldsymbol{x})$ 关于变量 x_j 单调递减, 即 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 满足惩罚性. 因此 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 是符合定义 1 的惩罚型变权向量. 另外, 显然

$$\frac{w_j(\boldsymbol{x})}{w_j}=1+\alpha\sum_{i\neq j}x_iw_i+\alpha(w_j-1)x_j$$

关于 x_j 单调递减, 满足定理 1 中的 1). 令

$$s_j(\boldsymbol{x})=\frac{1+\alpha(\bar{x}-x_j)}{m(1+\alpha\bar{x})-\sum\limits_{j=1}^{m}x_j},\ j=1,2,\cdots,m, \tag{5}$$

则由定理 1 可知, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})=(s_1(\boldsymbol{x}),s_2(\boldsymbol{x}),\cdots,s_m(\boldsymbol{x}))$ 即是 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 对应的惩罚型状态变权向量.

同样可证

$$\frac{1}{\min\limits_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j-\bar{x})}\leqslant\alpha<0$$

时, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 是符合定义 1 的激励型变权向量, 并且其对应的状态变权向量也具有式 (5) 的形式, 但此时状态变权向量为激励型的. □

从定理 2 可看出, 若 $\alpha<0$, 则 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为激励型变权向量; 若 $\alpha>0$, 则 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 为惩罚型变权向量; 当 $\alpha=0$ 时, 显然有 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{w}$ 为常权向量. 这说明, 只要对 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 中的参数 α 作适当选取, 便能得到不同类型的变权向量, 这给实际应用带来了很大的方便. 经计算, 式 (3) 的变权向量 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 对 x_j 的相对调节度为 $v_j(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))=\alpha(\bar{x}-x_j)$, 总相对调节度为

$$\bar{v}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))=|\alpha|\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}-x_j)^2},$$

这正是 $\boldsymbol{x}$ 的加权方差的 $|\alpha|$ 倍. 显然它是由参数 α 和 $\boldsymbol{x}$ 两部分构成, 这二者对变权向量的变权水平均有影响. 首先, 不难看出 $\boldsymbol{x}$ 的均衡性对相对调节度的影响规律: 当 $\boldsymbol{x}$ 绝对均衡时 (即 $x_1=x_2=\cdots=x_m$), 总相对调节度 $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))=0$, 此时变权向量不改变 $\boldsymbol{x}$ 的权重分配, 即 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{w}$; 当 $\boldsymbol{x}$ 均衡性很差时, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))$ 的取值将很大, 此时变权向量对权重的改变量也较大, 这正符合变权思想的初衷. 其次, 对于固定的 $\boldsymbol{x}\in[0,1]^m$, 要想获得相对调节度较大的变权向量 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$, 只需要取使 $|\alpha|$ 较大的参数 α. 通常取

$$\alpha=\frac{1}{\min\limits_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j-\bar{x})}$$

时, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 是具有最大相对调节度的激励型变权向量; 取

$$\alpha=\frac{1}{\max\limits_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^m}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j-\bar{x})}$$

时, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 是具有最大相对调节度的惩罚型变权向量.

4 实例分析

选取文献 [8] 中的学院评估问题来验证式 (3) 中变权向量的变权效果.

学院评估问题　某大学对其各下属学院进行评估, 采用教学 (w_1), 科研 (w_2) 和服务 (w_3) 3 个目标作为评估指标, 有 A, B, C, D, E 共 5 个学院参加评估, 表 1 和表 2 分别给出了各考核目标的权重和决策矩阵.

表 1　目标权重

目标	教学	科研	服务
权重	0.36	0.31	0.33

表 2　决策矩阵

学院	教学	科研	服务
A	0.214	0.166	0.184
B	0.206	0.220	0.182
C	0.195	0.192	0.220
D	0.181	0.195	0.185
E	0.175	0.193	0.201

采用常权综合方法求解, 由其集结函数 $M_0(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{3}(x_j w_j)$ 计算各学院的评估值, 分别为 $M_0(\mathrm{A}) = 0.189\,2$, $M_0(\mathrm{B}) = 0.202\,4$, $M_0(\mathrm{C}) = 0.202\,3$, $M_0(\mathrm{D}) = 0.186\,7$, $M_0(\mathrm{E}) = 0.189\,2$. 相应的排序为 B $\succ$ C $\succ$ A $\sim$ E $\succ$ D. 采用文献 [8] 中的基于理想点的变权综合方法所得的排序为 B $\sim$ C $\succ$ A $\succ$ E $\succ$ D.

下面用式 (3) 中的变权向量来求解该问题, 此时变权集结函数为

$$M(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{3}(x_j w_j(\boldsymbol{x})). \tag{6}$$

由决策矩阵, 根据式 (4) 估算得 $-70.621 \leqslant \alpha \leqslant 40.355$. 取 $\alpha = 1$, 用式 (3) 计算, 得到表 3 所列的变权矩阵.

表 3　变权矩阵

学院	教学	科研	服务
A	0.351	0.317	0.332
B	0.359	0.304	0.337
C	0.363	0.313	0.324
D	0.362	0.307	0.331
E	0.365	0.309	0.326

表 4　变权矩阵

学院	教学	科研	服务
A	0.271	0.382	0.347
B	0.347	0.256	0.397
C	0.386	0.342	0.272
D	0.380	0.284	0.336
E	0.411	0.298	0.291

根据式 (6) 计算得到各学院的评估值分别为 $M(\mathrm{A}) = 0.188\,8$, $M(\mathrm{B}) = 0.202\,2$, $M(\mathrm{C}) = 0.202\,2$, $M(\mathrm{D}) = 0.186\,6$, $M(\mathrm{E}) = 0.189\,0$. 相应的排序为 C $\sim$ B $\succ$ E $\succ$ A $\succ$ D. 与常权综合方法相比, 排序结果出现了变化, 这说明变权综合方法考虑了数据的均衡性. 该排序结果与采用基本理想点变权综合方法所得结果相似. 通过计算, 该变权向量的总相对调节度为 $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{A})) = 0.034\,4$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{B})) = 0.027\,2$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{C})) = 0.021\,7$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{D})) = 0.010\,2$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{E})) = 0.018\,9$. 显然变权对 A 的考核目标的权重改变最大, 这说明 A 的评估数据在所有 5 个参评者中是最不均衡的. 经过计算比较, 变权向量对 A 的权重 w_1 的相对调节度最大, 为 -2.5%.

如果取 $\alpha = 10$, 则用式 (3) 计算得到表 4 所列的变权矩阵. 用式 (6) 计算得到各学院的评估值为 $M(\mathrm{A}) = 0.185\,2$, $M(\mathrm{B}) = 0.200\,0$, $M(\mathrm{C}) = 0.200\,8$, $M(\mathrm{D}) = 0.186\,3$, $M(\mathrm{E}) = 0.187\,9$. 相应的排序为 C $\succ$ B $\succ$ E $\succ$ D $\succ$ A. 与常权综合排序相比, 各学院的排序出现了很大变化, 这说明此时的变权向量更多地考虑了数据的均衡性. 这时变权向量的总相对调节度为 $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{A})) = 0.344$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{B})) = 0.272$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{C})) = 0.217$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{D})) = 0.102$, $\bar{v}(\boldsymbol{w}(\mathrm{E})) = 0.189$. 变权向量对 A 的权重 w_1 的相对调节度也最大, 为 -25%.

显然, 对于不同的参数取值, 得到了不同的决策结果, 这样的决策结果体现了决策者对数据均衡性的某种要求, 更符合实际情况, 也更加合理.

5　结　论

使用变权综合方法求解多目标决策问题时, 一个关键的步骤是构造出符合决策者对均衡性偏好要求的变权向量. 本文遵从变权思想的初衷, 根据定义直接构造了一个带参数的变权向量, 并证明了该变权向量可由状态变权向量和给定的常权向量表示, 同时计算了它的相对调节度. 通过理论分析和实例验证表明, 只要调整变权向量的参数取值, 它就会具有不同的变权效果. 因此该变权向量是一个具有变尺度、变类型的变权向量, 它能满足不同决策者对均衡性偏好的不同要求, 这给实际应用带来了很大的方便.

参考文献(References)

[1] 汪培庄. 模糊集与随机集落影[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985: 47-59.
(Wang P Z. Shadow of fuzzy sets and random sets[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1985: 47-59.)

[2] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(Ⅷ)[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1-9.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation(Ⅷ)[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1995, 9(3): 1-9.)

[3] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(Ⅸ)[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(2): 12-19.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of

knowledge representation(Ⅸ)[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1996, 10(2): 12-19.)
[4] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(Ⅹ)[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(4): 110-118.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation(Ⅹ)[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1996, 10(4): 110-118.)
[5] 朱勇珍, 李洪兴. 状态变权的公理化体系和均衡函数的构造[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 116-118.
(Zhu Y Z, Li H X. Axiomatic system of state variable weights and construction of balance functions[J]. Systems Engineering–Theory and Practice, 1999, 19(7): 116-118.)
[6] 李德清, 李洪兴. 状态变权向量的性质与构造[J]. 北京师范大学学报, 2002, 38(4): 455-461.
(Li D Q, Li H X. The properties and construction of state variable weight vectors[J]. J of Bejing Normal University, 2002, 38(4): 455-461.)
[7] 李德清, 谷云东, 李洪兴. 关于状态变权向量公理化定义的若干结果[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(5): 97-102.
(Li D Q, Gu Y D, Li H X. Results on axiomatic definition of state variable weight vector[J]. Systems Engineering–Theory and Practice, 2004, 24(5): 97-102.)
[8] 张丽娅, 李德清. 变权决策中确定状态变权向量的理想点法[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(6): 93-97.
(Zhang L Y, Li D Q. An ideal point approach of weights vector in determining state variable decision making[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(6): 93-97.)
[9] 李德清, 李洪兴. 变权效果分析与状态变权向量的确定[J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1241-1245.
(Li D Q, Li H X. Analysis of variable weights effect and selection of appropriate state variable weights vector in decision making[J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1241-1245.)
[10] 李德清, 郝飞龙. 状态变权向量的变权效果[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(6): 127-131.
(Li D Q, Hao F L. Weights transferring effect fo state variable weights vector[J]. Systems Engineering–Theory and Practice, 2009, 29(6): 127-131.)
[11] 李德清, 崔红梅, 李洪兴. 基于层次变权的多因素决策[J]. 系统工程学报, 2004, 19(3): 258-263.
(Li D Q, Cui H M, Li H X. Multifactor decision making based on hierarchical variable weights[J]. J of Systems Engineering, 2004, 19(3): 258-263.)
[12] 聂茂林. 供应链合作伙伴选择的层次分析多因素决策[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(3): 25-32.
(Nie M L. Hierarchy variable weight decision-making in the selection of supply chains cooperators[J]. Systems Engineering–Theory and Practice, 2006, 26(3): 25-32.)
[13] 李春好, 孙永河, 贾艳辉, 等. 变权层次分析法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(4): 724-731.
(Li C H, Sun Y H, Jia Y H, et al. Analytic hierarchy process based on variable weights[J]. Systems Engineering–Theory and Practice, 2010, 30(4): 724-731.)
[14] 徐则中. 一种新的变权向量及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(20): 134-138.
(Xu Z Z. The construction and application of a new variable weight vector[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008, 38(20): 134-138.)

(上接第81页)

[14] Wand M P, Jones M C. Kernel smoothing[M]. London: Chapman and Hall, 1995.
[15] Charles T Wolverton, Terry J Wagner. Asymptotically optimal discriminant fucntions for pattern classification[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1969, 15(2): 258-265.
[16] Suykens J A K, Van Gestel T, De Brabanter J, et al. Least squares support vector machines[M]. Singapore: World Scientific, 2002.
[17] Deng Zhaohong, Chung Fulai, Wang Shitong. FRSDE: Fast reduced set density estimator using minimal enclosing ball approximation[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(4): 1363-1372.
[18] Liu Zhenqiu, Lin Shili, Tan M T. Sparse support vector machines with $L\_\{p\}$ Penalty for Biomarker Identification[J]. IEEE Trans on Computational Biology and Bioinformatics, 2010, 7(1): 100-107.