

文章编号: 1001-0920(2012)01-0129-06

## 基于均差滤波与高斯和的非线性非高斯系统滤波算法

李振华<sup>1</sup>, 宁磊<sup>1</sup>, 徐胜男<sup>2</sup>

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061; 2. 济南广播电视大学信息技术学院, 济南 250001)

**摘要:** 针对一类非线性非高斯系统的滤波问题, 在分析均差滤波算法和高斯和滤波算法的基础上, 提出一种基于均差滤波的高斯和滤波算法, 适于处理非线性非高斯系统的滤波问题. 对于似然密度位于条件转移概率密度拖尾处的情况, 与传统的粒子滤波算法相比, 所提算法能提高滤波的精度和实时性. 仿真实验验证了新算法的有效性.

**关键词:** 非线性非高斯滤波; 贝叶斯统计; 均差滤波; 高斯和滤波

中图分类号: TP242

文献标识码: A

## Nonlinear non-Gaussian system filtering based on Gaussian sum and divided difference filter

LI Zhen-hua<sup>1</sup>, NING Lei<sup>1</sup>, XU Sheng-nan<sup>2</sup>

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Ji'nan 250061, China; 2. School of Information Technolohg, Ji'nan Radio and TV University, Ji'nan 250001, China. Correspondent: LI Zhen-hua, E-mail: zhenhua.li@sdu.edu.cn)

**Abstract:** Based on analyzing divided difference filter(DDF) and Gaussian sum filter(GSF), a GSF-based DDF algorithm is developed for nonlinear dynamic state space(DSS) models with non-Gaussian noise, which is suitable for the filtering problem of nonlinear/non-Gaussian systems. When the likelihood function appears at the tail of the transfer probability density, the proposed algorithm can improve the precision of nonlinear/non-Gaussian filtering compared with the traditional particle filter(PF). Experiments show that the proposed method works well in the filtering for DSS models with non-Gaussian noise.

**Key words:** nonlinear non-Gaussian filtering; Bayesian estimation; divided difference filter; Gaussian sum filter

### 1 引言

滤波问题广泛存在于自动控制、信号处理、金融统计、导航、目标跟踪、信息融合、故障检测等领域, 在过去的半个世纪中得到了较为深入的研究. 其基本方法是通过含有噪声的观测值来递推估计系统的未知状态, 这种方法中的系统模型被称为动态状态空间模型(DSSM). 根据贝叶斯统计理论, 后验密度包含了状态变量的全部统计信息, 因此, 滤波问题可转变为在每次获得新的量测值后, 如何根据现有的全部量测信息递推地估计状态变量的后验密度.

当 DSSM 是线性的且与之相关的噪声满足高斯分布时, 卡尔曼滤波算法(KF)<sup>[1]</sup>是贝叶斯递推估计问题的最优解. 当 DSSM 变为非线性非高斯时, 最优滤波便失去了吸引力, 因此需要寻找新的次优滤波算法

来替代 KF. 非线性非高斯滤波算法大致可分为两类: 一类是将后验密度视为高斯分布的局部逼近方法. 例如文献 [1] 中提到的利用一阶或二阶 Taylor 级数展开的扩展卡尔曼滤波算法(EKF); [2-3] 提到的应用无味变换(UT)的无味卡尔曼滤波算法(UKF); [4-6] 提到的利用 Stirling 内插公式的均差滤波算法(DDF); [7] 提到的利用 Gauss-Hermite 积分的 Gauss-Hermite 滤波算法(GHQ-KF)等. 由于这些算法都假定后验密度为高斯分布, 它们又被称为高斯滤波器. 另一类是直接对后验密度进行分析的全局逼近方法. 例如 [8-10] 提到的综合 Monte Carlo 数值积分理论和序贯重要性采样(SIS)重采样思想的粒子滤波算法(PF); [11] 提到的用一簇高斯分布之和来近似逼近后验密度的高斯和滤波算法(GSF)等. 因为概率密度函数(PDF)

收稿日期: 2010-09-07; 修回日期: 2010-12-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60904097); 教育部留学回国人员科研启动基金项目; 国防基础科研计划项目(B1420080209-08).

作者简介: 李振华(1976-), 男, 副教授, 博士, 从事多传感器信息融合、图像处理等研究; 宁磊(1986-), 男, 硕士生, 从事非线性滤波估计的研究.

通常维数高且不对称,用高斯分布来逼近后验密度会产生较大误差,所以局部逼近方法不精确甚至会发散;而全局逼近方法精度高,但需要较大的计算量,尤其是粒子滤波。

针对非线性非高斯滤波算法中局部逼近方法精度低而全局逼近方法中粒子滤波算法计算量大,并且当似然密度位于先验转移密度的尾部时粒子滤波估计不精确的问题,本文提出一种基于DDF的高斯和滤波算法,用一簇高斯分布之和来逼近后验密度,对每一个高斯分量分别采用DDF算法进行时间更新和量测更新;针对高斯和滤波算法中高斯分量数目呈指数增长的问题,给出了一种简单的减少分量的方法,在减小计算量的同时保证估计精度。

## 2 问题描述

考虑如下非线性非高斯的离散DSSM系统:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = g(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k. \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$  分别为  $n$  维状态向量,  $q$  维观测向量,  $n$  维非高斯过程噪声以及  $q$  维非高斯观测噪声;  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  分别为已知的非线性状态函数和观测函数. 不失一般性,假设  $\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{x}_k$  相互独立,且  $\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$  和初始状态  $\mathbf{x}_0$  的概率密度函数(PDF)均已知.

滤波的目的是利用已知的观测量  $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$  来求解后验密度  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ , 从而求得  $k$  时刻对  $\mathbf{x}_k$  的估计值

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k] = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) d\mathbf{x}_k, \quad (3)$$

其估计误差协方差

$$\mathbf{P}_{k|k} = \int (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (4)$$

根据贝叶斯理论,假设  $\mathbf{x}_k$  服从一阶 Markov 过程且量测序列  $\mathbf{Z}_k$  之间相互独立,则有如下结论:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (5)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) = c_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k), \quad (6)$$

$$c_k = p(\mathbf{z}_k | \mathbf{Z}_{k-1})^{-1} = \left( \int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}) d\mathbf{x}_k \right)^{-1}. \quad (7)$$

其中: 式(5)被称为时间更新,式(6)被称为量测更新,  $c_k$  为归一化常数.

在DSSM为非线性但噪声服从高斯分布的情况下,文献[4]提出了一种利用差分思想的一阶次优滤波算法,该算法与UKF有相似的估计形式,但精度略低于UKF.在文献[4]的基础上,[5-6]提出了二阶均差滤波算法,其主要思想是用斯特林内插公式取代

Taylor级数,对非线性状态过程和量测过程在条件均值邻域内展开并截取一阶项和二阶项.与EKF相比,该算法无需计算Jacobian矩阵且具有更高的估计精度;而与UKF相比,只需使用一个参数  $h$ ,算法较为简单.

首先给出二阶斯特林内插公式,即

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = g(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{S}_x \boldsymbol{\xi}) \triangleq \tilde{g}(\boldsymbol{\xi}) \approx \\ &\tilde{g}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \sum_{l=1}^n \Delta \xi_l \frac{\tilde{g}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + h\mathbf{e}_l) - \tilde{g}(\hat{\boldsymbol{\xi}} - h\mathbf{e}_l)}{2h} + \\ &\sum_{l=1}^n \Delta \xi_l^2 \frac{\tilde{g}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + h\mathbf{e}_l) + \tilde{g}(\hat{\boldsymbol{\xi}} - h\mathbf{e}_l) - 2\tilde{g}(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{2h^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{S}_x$  满足  $\mathbf{P}_x = \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x^T$ ,  $\mathbf{P}_x$  为对  $\mathbf{x}$  估计值的方差;  $\mathbf{e}_l$  为单位矩阵的第  $l$  列;  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  为对  $\boldsymbol{\xi}$  的估计值;  $\Delta \xi_l$  为  $\Delta \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}$  的第  $l$  个元素;  $h$  为差分步长,在高斯假设下,  $h$  的最佳选择是  $\sqrt{3}^{[6]}$ .

记  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  为利用前一时刻滤波估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  对  $\mathbf{x}_{k+1}$  所作的一步预测,其估计误差协方差记为  $\mathbf{P}_{k+1|k}$ . 在二阶斯特林内插公式的基础上,给出DDF的详细算法<sup>[12]</sup>.

1) 时间更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \frac{h^2 - n}{h^2} f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{l=1}^n \mathbf{a}_{k,l}, \quad (9)$$

其估计误差协方差为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k} &= \frac{1}{4h^2} \sum_{l=1}^n \mathbf{b}_{k,l} \mathbf{b}_{k,l}^T + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \times \\ &\sum_{l=1}^n [\mathbf{a}_{k,l} - 2f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})][\mathbf{a}_{k,l} - 2f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})]^T. \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{a}_{k,l} = f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}}\right)_l\right) + f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}}\right)_l\right),$$

$$\mathbf{b}_{k,l} = f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}}\right)_l\right) - f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}}\right)_l\right),$$

$(\mathbf{M})_l$  表示矩阵  $\mathbf{M}$  的第  $l$  列.

2) 量测更新

记  $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$  为利用估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  对  $\mathbf{z}_{k+1}$  所作预测,其估计误差协方差记为  $\mathbf{P}_{z,k+1|k}$ , 则有

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \frac{h^2 - n}{h^2} g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{l=1}^n \mathbf{c}_{k+1,l}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z,k+1|k} &= \\ &\frac{1}{4h^2} \sum_{l=1}^n \mathbf{d}_{k+1,l} \mathbf{d}_{k+1,l}^T + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \times \end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^n [c_{k+1,l} - 2g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})][c_{k+1,l} - 2g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})]^T. \quad (12)$$

$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$  与  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  的估计误差协方差为

$$\mathbf{P}_{xz,k+1|k} = \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^n \left( \sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}} \right)_l \mathbf{d}_{k+1,l}^T. \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} c_{k+1,l} &= g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}}\right)_l\right) + \\ &g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}}\right)_l\right), \\ d_{k+1,l} &= g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}}\right)_l\right) - \\ &g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}}\right)_l\right). \end{aligned}$$

因此, 得到  $k+1$  时刻对  $\mathbf{x}_{k+1}$  的估计值及其估计误差协方差为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}), \\ \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{z,k+1|k} \mathbf{K}_{k+1}^T, \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{xz,k+1|k} (\mathbf{P}_{z,k+1|k})^{-1}. \end{aligned}$$

### 3 主要结论

由于 DDF 是一种高斯滤波器, 在解决噪声为非高斯情形的系统滤波问题时, 只能将噪声近似为高斯分布, 滤波的精度大大降低. 为解决此类非高斯滤波问题, 首先给出如下引理<sup>[1]</sup>:

**引理 1** 对于任意的概率密度  $p(\mathbf{x})$ , 都可以通过一个形式为

$$\bar{p}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_x} \alpha^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(i)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(i)})$$

的函数来近似, 并且近似误差  $\int |p(\mathbf{x}) - \bar{p}(\mathbf{x})| dx$  可以任意小. 在  $\bar{p}(\mathbf{x})$  的高斯和形式中,  $N_x$  为足够大的整数;  $\alpha^{(i)}$  为各高斯分量的加权值且满足  $\alpha^{(i)} \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{N_x} \alpha^{(i)} = 1$ ;

$$\mathcal{N}(\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(i)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)})^T (\boldsymbol{\Sigma}^{(i)})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)})\right]$$

是均值为  $\mathbf{x}^{(i)}$ , 方差为  $\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}$  的高斯分布函数; 当  $N_x \rightarrow \infty$  时,  $\bar{p}(\mathbf{x})$  一致收敛于  $p(\mathbf{x})$  且  $\mathbf{x}^{(i)}$  和  $\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}$  均趋于 0.

基于引理 1, 通过对每一个高斯分量分别应用高斯滤波器, 便可得到高斯和滤波算法. 文献[11]通过 EKF 更新各高斯分量, 不可避免地引入了 EKF 的一些缺点, 如需要计算 Jacobian 矩阵并且不能保证全局最优等; [13] 通过平方根 UKF 更新各高斯分量, 一般需要选取 2~3 个参数; [14] 通过 GHQ-KF 更新各高斯分量, 在状态维数为  $n$ , Gauss-Hermite 点为  $m \geq 3$  的情况下, GHQ-KF 共需选取  $m^n$  个采样点, 远大于

UKF 和 DDF 算法选取的  $2n+1$  个点, 计算复杂.

为避免上述缺点, 采用 DDF 更新各高斯分量, 得到一种新的高斯和滤波算法, 定义为 GS-DDF.

#### 1) 时间更新

根据引理 1, 在  $k$  时刻, 非高斯状态噪声  $\mathbf{v}_k$  和非高斯观测噪声  $\mathbf{w}_k$  的 PDF 可分别表示为

$$p(\mathbf{v}_k) \approx \sum_{i=1}^{N_v} \beta_k^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{v}_k : \mathbf{v}_k^{(i)}, \mathbf{Q}_k^{(i)}), \quad (14)$$

$$p(\mathbf{w}_k) \approx \sum_{i=1}^{N_w} \gamma_k^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{w}_k : \mathbf{w}_k^{(i)}, \mathbf{R}_k^{(i)}). \quad (15)$$

其中:  $\beta_k^{(i)}$  和  $\gamma_k^{(i)}$  分别为两者第  $i$  个高斯分量的加权值,  $\mathbf{v}_k^{(i)}$  和  $\mathbf{w}_k^{(i)}$  分别为两者第  $i$  个高斯分量的均值,  $\mathbf{Q}_k^{(i)}$  和  $\mathbf{R}_k^{(i)}$  分别为两者第  $i$  个高斯分量的方差,  $N_v$  和  $N_w$  以及各高斯分量的加权值、均值、方差可通过 EM (Expectation Maximization) 算法求得<sup>[13]</sup>. 此时后验密度可表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k) \approx \sum_{i=1}^G \alpha_{k|k}^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k : \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i)}), \quad (16)$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和  $\mathbf{P}_{k|k}$  为第  $k$  时刻对  $\mathbf{x}_k$  的估计值和估计误差协方差.

进而由式 (1) 和 (14) 得到条件转移密度

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \approx \sum_{i=1}^{N_v} \beta_k^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} : f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k^{(i)}, \mathbf{Q}_k^{(i)}). \quad (17)$$

从而根据式 (5), 预测密度为

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}_k) \approx \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{i=1}^G \alpha_{k|k}^{(i)} \beta_k^{(j)} \int \mathcal{N}(\mathbf{x}_k : \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i)}) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} : f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k^{(j)}, \mathbf{Q}_k^{(j)}) d\mathbf{x}_k. \quad (18)$$

式 (18) 的积分部分可近似看作高斯分布, 其均值和方差可通过 DDF 求得, 因此预测分布可近似为

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}_k) \approx \sum_{r=1}^{N_v G} \alpha_{k+1|k}^{(r)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} : \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(r)}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{(r)}). \quad (19)$$

其中

$$\alpha_{k+1|k}^{(r)} = \alpha_{k|k}^{(i)} \beta_k^{(j)},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(r)} = \frac{h^2 - n}{h^2} f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{l=1}^n \mathbf{a}_{k,l}^{(i)} + \mathbf{v}_k^{(j)},$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{(r)} =$$

$$\frac{1}{4h^2} \sum_{l=1}^n \mathbf{b}_{k,l}^{(i)} (\mathbf{b}_{k,l}^{(i)})^T + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \times$$

$$\sum_{l=1}^n [\mathbf{a}_{k,l}^{(i)} - 2f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)})][\mathbf{a}_{k,l}^{(i)} - 2f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)})]^T + \mathbf{Q}_k^{(j)},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{k,l}^{(i)} &= \\ f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}^{(i)}}\right)_l\right) + f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}^{(i)}}\right)_l\right), \\ \mathbf{b}_{k,l}^{(i)} &= \\ f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}^{(i)}}\right)_l\right) - f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k|k}^{(i)}}\right)_l\right). \end{aligned}$$

## 2) 量测更新

在收到新的观测值  $\mathbf{z}_{k+1}$  后, 根据式 (15), 似然密度为

$$p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) \approx \sum_{i=1}^{N_w} \gamma_{k+1}^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{z}_{k+1} : h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{w}_{k+1}^{(i)}, \mathbf{R}_{k+1}^{(i)}). \quad (20)$$

根据式 (6), 后验密度为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{z}_{k+1}) &\approx \\ \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{i=1}^{N_v G} \gamma_{k+1}^{(j)} \alpha_{k+1|k}^{(i)} c_{k+1} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} : \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}) \times \\ \mathcal{N}(\mathbf{z}_{k+1} : h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{w}_{k+1}^{(j)}, \mathbf{R}_{k+1}^{(j)}). \end{aligned} \quad (21)$$

此时, 根据引理 1 中的一致收敛性, 归一化常数  $c_{k+1}$  满足

$$\begin{aligned} (c_{k+1})^{-1} &= p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{z}_k) = \\ \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{z}_k) p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1} = \\ \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{i=1}^{N_v G} \gamma_{k+1}^{(j)} \alpha_{k+1|k}^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{z}_{k+1} : \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{z,k+1|k}^{(i)}). \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(r)} &= \\ \frac{h^2 - n}{h^2} g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{l=1}^n c_{k+1,l}^{(i)} + \mathbf{w}_{k+1}^{(j)}, \\ \mathbf{P}_{z,k+1|k}^{(r)} &= \\ \frac{1}{4h^2} \sum_{l=1}^n \mathbf{d}_{k+1,l}^{(i)} (\mathbf{d}_{k+1,l}^{(i)})^T + \\ \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{l=1}^n [c_{k+1,l}^{(i)} - 2g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)})] \times \\ [c_{k+1,l}^{(i)} - 2g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)})]^T + \mathbf{R}_{k+1}^{(j)}, \\ c_{k+1,l}^{(i)} &= g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}}\right)_l\right) + \\ &g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}}\right)_l\right), \\ \mathbf{d}_{k+1,l}^{(i)} &= g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} + h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}}\right)_l\right) - \\ &g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} - h\left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}}\right)_l\right). \end{aligned}$$

同理, 将后验密度看成是高斯和的形式, 即

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{z}_{k+1}) \approx$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{i=1}^{N_v G} \alpha_{k+1|k+1}^{(r)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} : \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{(r)}, \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{(r)}) = \\ \sum_{r=1}^{N_w N_v G} \alpha_{k+1|k+1}^{(r)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} : \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{(r)}, \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{(r)}). \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{(r)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} + \mathbf{K}_{k+1}^{(r)} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(r)}), \\ \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{(r)} &= \mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)} - \mathbf{K}_{k+1}^{(r)} \mathbf{P}_{z,k+1|k}^{(r)} (\mathbf{K}_{k+1}^{(r)})^T, \\ \alpha_{k+1|k+1}^{(r)} &= \\ \frac{\alpha_{k+1|k}^{(i)} \gamma_{k+1}^{(j)} \mathcal{N}(\mathbf{z}_{k+1} : \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(r)}, \mathbf{P}_{z,k+1|k}^{(r)})}{\sum_{j=1}^{N_w} \sum_{i=1}^{N_v G} \alpha_{k+1|k}^{(i)} \gamma_{k+1}^{(j)} \mathcal{N}(\mathbf{z}_{k+1} : \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(r)}, \mathbf{P}_{z,k+1|k}^{(r)})}, \\ \mathbf{K}_{k+1}^{(r)} &= \mathbf{P}_{xz,k+1}^{(r)} (\mathbf{P}_{z,k+1|k}^{(r)})^{-1}, \\ \mathbf{P}_{xz,k+1|k}^{(r)} &= \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^n \left(\sqrt{\mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}}\right)_l (\mathbf{d}_{k+1,l}^{(i)})^T. \end{aligned}$$

因此, 得到状态变量的滤波估计值<sup>[14]</sup>

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \sum_{r=1}^{N_w N_v G} \alpha_{k+1|k+1}^{(r)} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{(r)}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \\ \sum_{r=1}^{N_w N_v G} \alpha_{k+1|k+1}^{(r)} [\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{(r)} + \\ (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{(r)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}) (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^{(r)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1})^T]. \end{aligned} \quad (25)$$

**注 1** 在计算中可以看到, 高斯和算法的高斯分量数目随时间呈指数增长, 但其中存在大量系数极小的分量, 对非高斯噪声的逼近帮助不大, 却会使计算量增加, 因此可以将高斯分量进行合并以减少分量数. 在文献 [15] 中, Salmond 提出了一种合并的方法, 即首先定义一个 Mahalanobis 距离

$$d_{ij}^2 = \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_j)^T (\boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_j).$$

其中:  $\alpha_i, \bar{\mathbf{x}}_i, \alpha_j, \bar{\mathbf{x}}_j$  分别为高斯分量的系数和均值,  $\boldsymbol{\Sigma}$  为合并后的方差. 然后依次将距离最小的两个分量进行合并, 直到得到所要求的分量数  $G$ . 合并后的系数、均值以及方差分别为<sup>[14]</sup>

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \alpha_i + \alpha_j, \\ \bar{\mathbf{x}}_c &= \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j} (\alpha_i \bar{\mathbf{x}}_i + \alpha_j \bar{\mathbf{x}}_j), \\ \boldsymbol{\Sigma}_c &= \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j} \left[ \alpha_i \boldsymbol{\Sigma}_i + \alpha_j \boldsymbol{\Sigma}_j + \right. \\ &\left. \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_j) (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_j)^T \right]. \end{aligned}$$

针对高斯分量个数  $G$  的选取问题, 人们更多地把研究焦点放在如何将高斯分量个数降低的方法上, 而针对粒子个数的选取, 正如粒子滤波算法一样, 在理

论上还无法给出一个精确的表示方法,只能在计算复杂度和性能精确度之间作出一个折中. 根据仿真经验,  $G$  的个数随着状态变量维数的增大而增加,因此  $G$  取 20~100 之间的数可以在保证精确度的同时降低复杂度. 尽管  $G$  的值取得越大越好,但  $G$  的值过大时,意味着计算量更大,计算更复杂,反倒得不偿失.

### 4 仿真实验

下面通过两个例子对 GS-DDF, GS-EKF 和 PF 三种算法进行 Monte Carlo 仿真, 根据均方根误差 (RMSE) 比较滤波性能. RMSE 的计算公式为

$$RMSE_{x_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_k(i) - \hat{x}_{k|k}(i))^2 / N}.$$

其中:  $N$  为 Monte Carlo 的仿真次数,  $\hat{x}_{k|k}(i)$  为第  $i$  次 Monte Carlo 仿真时对  $x_k(i)$  的估计值.

下面的例 1 是状态噪声为有拖尾的 gamma 分布的一维非平稳 DSSM. 在用 GSF 算法时需通过 EM 算法将 gamma 分布近似成高斯和的形式. 例 2 是量测噪声为闪烁噪声的目标跟踪实例. 闪烁噪声可以用高斯噪声和具有拖尾特性的叠加噪声之和来表示, 在本例中, 采用两个高斯噪声表示闪烁噪声, 其中用方差较大的高斯分布表示拖尾.

**例 1** 一维非线性非高斯 DSSM 为

$$\begin{cases} x_k = 0.2x_{k-1} + 0.01x_{k-1}^2 + 8 \cos(1.2k) + v_k, \\ y_k = x_k^2 + w_k. \end{cases}$$

其中:  $v_k \sim \Gamma(3, 2)$ ,  $w_k \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$ , 用于 Monte Carlo 仿真的数据点个数为 100, 仿真次数为 200. 在每次仿真时, 真实初始状态  $x_0$  取为区间  $[0, 1]$  内的随机数, 用于估计的初始状态满足  $x_{0|0} \sim \mathcal{N}(0.5, 2)$ . PF 仿真时选取的粒子数为 500, GS-DDF 和 GS-EKF 仿真时选取的高斯分量个数  $G = 90$ . 通过 EM 算法将 gamma 分布近似为 3 个高斯分布和的形式<sup>[13]</sup>, 即  $p(v_k) = 0.29\mathcal{N}(2.14, 0.72) + 0.18\mathcal{N}(7.45, 8.05) + 0.53 \times \mathcal{N}(4.31, 2.29)$ . 图 1 为 3 种方法的 RMSE 比较. 从该图可以看出, GS-EKF 的仿真效果最差, GS-DDF 算法的 RMSE 小于 PF 算法的 RMSE, 即当似然密度位于条件转移概率密度拖尾处时, GS-DDF 的估计效果优于 PF 算法.

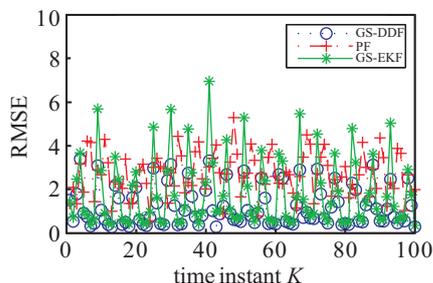


图 1 3 种算法的 RMSE 比较

### 例 2 带闪烁噪声的跟踪实例.

考虑如下模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{(\Delta T)^2}{2} & 0 \\ \Delta T & 0 \\ 0 & \frac{(\Delta T)^2}{2} \\ 0 & \Delta T \end{bmatrix} \mathbf{v}_k, \\ z_k = \begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \arctan(y_k/x_k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k. \end{cases}$$

其中:  $\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]$ ,  $x_k$  和  $y_k$  为目标位移,  $\dot{x}_k$  和  $\dot{y}_k$  为对应的速度分量; 采样时间  $\Delta T$  设为 0.5 s;  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$ ; 量测噪声为  $p(\mathbf{w}_k) = (1 - \beta)\mathcal{N}(0, \mathbf{R}_1) + \beta\mathcal{N}(0, \mathbf{R}_2)$ , 这里  $\beta$  为闪烁噪声概率, 此处取为 0.1; 初始状态为  $\mathbf{x}_0$ , 初始状态估计为  $\hat{\mathbf{x}}_0$ , 方差为  $\mathbf{P}_0$ .

各个参数值为

$$\mathbf{Q}_k = \text{diag}([1 \times 10^{-4} \text{ km}^2/\text{s}^4, 1 \times 10^{-4} \text{ km}^2/\text{s}^4]),$$

$$\mathbf{R}_1 = \text{diag}([0.25 \text{ km}^2, 1 \text{ mard}^2]),$$

$$\mathbf{R}_2 = \text{diag}([2.5 \text{ km}^2, 10 \text{ mard}^2]),$$

$$\mathbf{x}_0 = [10\text{km}, 0.3 \text{ km/m}, 10\text{km}, -0.04 \text{ km/m}],$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [10.2 \text{ km}, 0.285 \text{ km/m}, 9.9 \text{ km}, -0.035 \text{ km/m}],$$

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag}[4 \times 10^{-2} \text{ km}^2/\text{s}^2, 4 \times 10^{-4} \text{ km}^2/\text{s}^2, 1 \times 10^{-2} \text{ km}^2/\text{s}^2, 4 \times 10^{-2} \text{ km}^2/\text{s}^2].$$

用于 Monte Carlo 仿真的数据点个数为 100, 仿真次数为 100. 采用 PF 算法进行仿真时选取的粒子数为 300, GS-DDF 和 GS-EKF 进行仿真时选取的高斯分量个数  $G = 20$ . 图 2~图 5 分别表示基于 3 种算法得到的在  $x$  和  $y$  轴方向上位置和速度分量的 RMSE 结果比较.

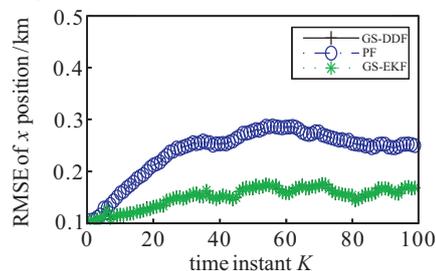


图 2  $x$  方向位置的 RMSE

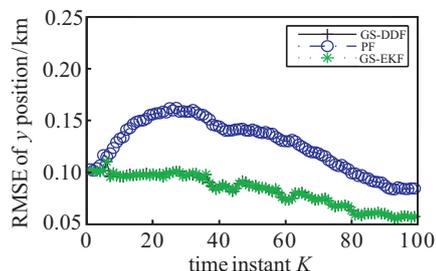
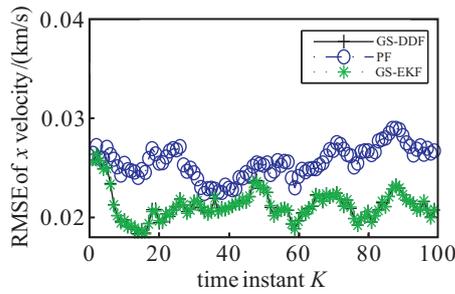
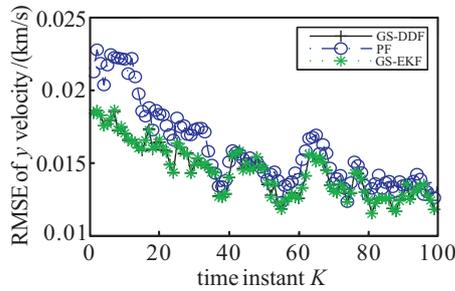


图 3  $y$  方向位置的 RMSE

图 4  $x$  方向速度的 RMSE图 5  $y$  方向速度的 RMSE

从仿真结果可以看出,因为非线性只存在于量测方程中,所以GS-EKF的跟踪性能和GS-DDF相差不大;而由于闪烁噪声的影响,PF的提议分布 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ 与似然密度 $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ 的吻合性较差,新的量测值的统计信息并没有完全被利用,同另两种算法相比较,PF算法的跟踪性能变差<sup>[3]</sup>;此外PF算法的计算量远大于高斯和算法.当然如果增加PF算法的粒子个数或采用改进的PF算法,跟踪效果可能会变得更好,但这样会增加滤波的复杂度和计算量.

## 5 结 论

在高斯和滤波框架下,本文提出了一种基于均差滤波的高斯和滤波算法,通过DDF完成每一步的时间更新和量测更新,从而可以处理噪声是非高斯分布的模型.针对高斯和滤波算法中高斯分量呈指数增长的问题,通过保留系数较大的分量,舍去系数较小的分量,从而减少了计算量,相较于传统的粒子滤波算法,提高了计算的实时性;并且针对似然密度在条件转移密度拖尾处的情况,滤波效果优于传统的粒子滤波.

## 参考文献(References)

[1] Anderson B D O, Moore J B. Optimal filtering[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979: 36-59.

[2] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of IEEE, 2004, 92(3): 401-422.

[3] Merwe R. Sigma-point filters for probabilistic inference in dynamic state space models[Online]. Available: <http://www.cse.ogi.edu/rudmerwe/pubs/index.htm>, 2004.

[4] Schei T S. A finite difference method for linearizing in nonlinear estimation algorithms[J]. Automatica, 1997, 33(11): 2051-2058.

[5] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation of nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.

[6] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems[R]. Lyngby: Department of Mathematical Modeling, Technical University of Denmark, 2000.

[7] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.

[8] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEE Proc - F: Radar and Signal, 1993, 140(2): 107-113.

[9] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.

[10] Cappe O, Godsill S J, Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo[J]. Proc of IEEE, 2007, 95(4): 899-924.

[11] Alspach D L, Sorenson H W. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17(4): 439-448.

[12] Simandl M, Duník J. Derivative-free estimation methods: New results and performance analysis[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1749-1757.

[13] Simandl M, Duník J. Sigma point Gaussian sum filter design using square root unscented filters[C]. Proc of the 16th IFAC World Congress. Prague, 2005: 1000-1005.

[14] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature[J]. Proc of IEEE, 2007, 95(5): 953-977.

[15] Salmond D J. Mixture reduction algorithms for uncertain tracking[R]. Farnborough: Royal Aerospace Establishment, 1988.