

文章编号: 1001-0920(2012)01-0152-04

基于平均速度的混合自适应粒子群算法

高 哲, 廖晓钟

(北京理工大学 a. 自动化学院, b. 复杂系统智能控制与决策教育部重点实验室, 北京 100081)

摘 要: 针对传统粒子群寻优速度慢和局部收敛等缺点, 提出一种基于平均速度的混合粒子群优化算法. 给出了粒子群平均速度的定义, 用来表征粒子群的活跃程度, 并作为粒子群惯性系数和学习因子调节的依据, 加快了粒子群的寻优速度. 设计了基于平均速度的切换模拟退火算法和退火温度的更新公式, 使得粒子群在保持较快的寻优速度条件下, 仍能很容易地跳出局部极小点. 对 3 个典型测试函数的寻优问题进行实验, 所得结果表明了该算法的有效性.

关键词: 粒子群优化; 平均速度; 模拟退火; 混合优化

中图分类号: TP18

文献标识码: A

Hybrid adaptive particle swarm optimization based on average velocity

GAO Zhe, LIAO Xiao-zhong

(a. School of Automation, b. Key Laboratory of Complex System Intelligent Control and Decision of Ministry of Education, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China. Correspondent: GAO Zhe, E-mail: gaozhe2@yahoo.cn)

Abstract: In order to deal with the problems of the low convergence rate and tending to jump into the local optimum in the traditional particle swarm optimization, a hybrid particle swarm optimization is proposed based on the average velocity. A definition of average velocity is presented to characterize the degree of the activity of particle swarm. The inertial weight and acceleration factors are adjusted by the definition. A switching simulated annealing algorithm and the updating equations of annealing temperature are designed, such that all the particles can converge into the global optimum faster and jump out of the local minimum easily. The experiment of searching optimization of three typical functions is given, and the results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: particle swarm optimization; average velocity; simulated annealing; hybrid optimization

1 引 言

自 Kennedy 和 Eberhart^[1]提出粒子群算法(PSO)以来, 粒子群在很多优化问题上得到了广泛的应用. 由于粒子群优化方法不需要提供目标函数的导数信息, 也不需要对待求解问题进行编码, 更适用于非线性、多极点和不可微多变量复杂优化问题的求解^[2]. 文献[3-4]讨论了使粒子群收敛的参数取值范围, 通过自适应调节粒子群的参数可加快粒子群的收敛速度, 减少寻优的迭代次数. 文献[5-8]给出了惯性系数自适应调节方法, 如线性递减方法^[5]、模糊自适应方法^[6]、指数调节方法^[7]以及距离信息方法^[8]等, 同时通过适当地改变学习因子也可以加快粒子群的寻优速度^[9].

对于复杂的多极点目标函数的优化问题, 使用粒子群优化方法寻优可能会出现“早熟”现象, 即所有粒

子过早地陷入某个局部极值点, 在加快粒子群收敛速度的同时更容易出现“早熟”现象. 为了解决粒子群收敛速度的提高与“早熟”现象的矛盾, 一般采用各种混合粒子群优化方法来减小粒子群陷入局部极值点的机会, 如微分进化^[10]、混沌算法^[11]以及模拟退火算法^[12]等.

本文提出一种基于平均速度的粒子群参数调节方法, 该方法只需计算各个粒子本身的速度信息, 运算量小, 收敛速度快. 为了避免粒子群“早熟”, 还设计了基于粒子群平均速度信息的混合模拟退火粒子群优化方法, 在提高粒子群寻优速度的同时, 减小了粒子陷入局部极小的机会.

2 标准粒子群算法

在标准粒子群优化方法中, 每一个粒子代表优化

收稿日期: 2010-09-09; 修回日期: 2010-11-11.

作者简介: 高哲(1983—), 男, 博士生, 从事智能优化、非线性控制的研究; 廖晓钟(1962—), 女, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、运动控制等研究.

问题的一组潜在解. 各个粒子通过对自身的“认知”和群体之间的“交流”来实现最优值的求解. 各个粒子通过如下迭代方程更新自己的速度和位置:

$$V_i(k+1) = w(k)V_i(k) + c_1(k)r_1(P_i(k) - x_i(k)) + c_2(k)r_2(P_g(k) - x_i(k)), \quad (1)$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k+1). \quad (2)$$

其中: k 为当前迭代次数; $V_i(k)$ 和 $x_i(k)$ 为第 i 个粒子的速度和位置; $w(k)$ 为粒子速度更新的惯性系数; $c_1(k)$ 和 $c_2(k)$ 为粒子的学习因子(也称加速因子); r_1 和 r_2 是介于 $[0, 1]$ 之间的随机数; $P_i(k)$ 为第 i 个粒子当前时刻自身的最优值, 即 $P_i(k) = \arg \min[f(P_i(k-1)), f(x_i(k))]$; $P_g(k)$ 为整个粒子群总体当前时刻的最优值, 即 $P_g(k) = \arg \min[f(P_1(k)), f(P_2(k)), \dots, f(P_N(k))]$; N 为粒子群的粒子个数; $f(x)$ 为粒子群的目标函数.

通过观察式(1)的粒子速度更新公式可知, 粒子速度的改变一般由3部分组成: 1) 前一时刻的速度信息, 表示对先前速度的信任; 2) 第 i 个粒子位置与自身最优的误差, 表示粒子对自身的“认知”; 3) 第 i 个粒子位置与整体全局最优的误差, 即粒子群的社会成分, 表示粒子间的信息共享与合作. 通常, 较大的惯性系数 $w(k)$ 有利于全局搜索, 加大寻优的迭代步长; 较小的惯性系数有利于局部探索, 但容易陷入局部最小, 出现“早熟”现象. 学习因子 $c_1(k)$ 和 $c_2(k)$ 代表了粒子自身的最优和全局最优的影响在速度更新所占的比重, 因此, 通过适当调节学习因子也可以改变粒子群的收敛速度.

3 基于平均速度的粒子群算法

3.1 平均速度指标

为了解决局部开发与全局搜索的矛盾, 一般选择惯性系数随着迭代次数线性减小的粒子群优化方法, 即 $w(k) = w_{\max} - (w_{\max} - w_{\min})k/M$. 其中: w_{\max} 和 w_{\min} 分别为最大和最小惯性系数, 一般选取 0.9 和 0.4; M 为总的迭代次数.

显然, 以迭代次数来衡量粒子群的收敛速度不能真实反映粒子群中各个粒子的运动收敛情况. 文献[8]提出了以各个粒子位置之间距离来判别粒子群的收敛情况代替以迭代次数作为惯性系数的调整标准. 假设粒子群的粒子个数 N 和维数 D 很大, 每一次迭代更新都要计算 N 个粒子与其他粒子的距离, 计算量将会很大. 因此, 本文提出了粒子群的平均速度指标以衡量粒子群的收敛速度. 文献[13]给出了粒子群的平均速度的概念. 但是用每个粒子速度各分量的绝对值之和表示粒子当前速度的大小并不能很好地表示粒子的实际速度大小. 粒子的速度实际上是一个矢

量, 用2范数来表示粒子速度的大小更贴近实际. 以维数为3的某个粒子速度为例, 图1给出了粒子速度和各个分量的关系.

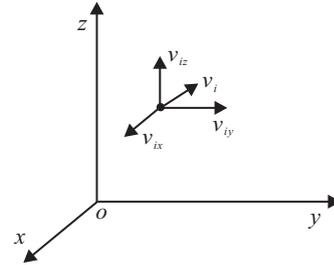


图1 粒子速度关系示意图

图1中: v_{ix} , v_{iy} 和 v_{iz} 为第 i 个粒子的各个分量; v_i 为第 i 个粒子的速度. 下面给出根据2范数的粒子群平均速度的定义.

定义1 假设每个粒子的维数为 D , 粒子个数为 N , 则第 k 次迭代时, 粒子群的平均速度为

$$\bar{V}(k) = \frac{\sum_{i=1}^N \|v_i(k)\|_2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^D v_{ij}(k)^2}}{N}, \quad (3)$$

其中 $v_{ij}(k)$ 为第 i 个粒子在第 j 维上的速度分量.

随着函数适应值的减小, 粒子群的平均速度也会逐渐减小. 可以这样理解这一现象: 在寻优的初始阶段, 粒子群处于全局搜索状态, 平均速度很大, 粒子群整体处于“活跃期”(期间会出现某个粒子的速度很小的现象); 随着迭代次数的增加, 函数的适应值减小到最优值, 粒子群处于局部开发阶段, 所以平均速度很小(最终所有的粒子的速度都将减小到零).

3.2 改进的粒子群优化

粒子群的平均速度可以表征系统的活跃程度, 即粒子群的收敛情况. 因此可以定义如下的基于平均速度信息的粒子群惯性权重调节公式:

$$w(k) = \frac{\bar{V}(k)}{V_{\max}}. \quad (4)$$

其中: $V_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^D V_{j\max}^2}$, $V_{j\max}$ 为粒子第 j 维上速度的限幅值. 本文提出的惯性权重 $w(k)$ 介于 $[0, 1]$ 之间, 并且随着平均速度 $\bar{V}(k)$ 的减小而减小.

根据文献[14]可知, 基于粒子群优化方法的每个粒子位置 x_i 最终收敛于 $(c_1 P_i + c_2 P_g)/(c_1 + c_2)$, 即粒子的最终位置将位于全局最优和局部最优的连线上, 通常选择 $c_1 = c_2$. 为使所有粒子都收敛于全局最优值 P_g , 这里选择 c_1 从一个常值 C 减小到 0, c_2 从 0 增加到一个常数 C , 即 $c_1 \rightarrow 0$, $c_2 \rightarrow C$, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \lim_{c_1 \rightarrow 0, c_2 \rightarrow C} \frac{c_1 P_i + c_2 P_g}{c_1 + c_2} = P_g.$$

从促进粒子群收敛速度的角度出发, 在粒子群寻

优的初始阶段, 粒子自身的最优值尤为重要, 而此刻的全局最优值一般不是粒子群实际的全局最优值, 所以这个阶段 c_1 应很大, c_2 则很小; 粒子群寻优即将结束时, 应突出全局最优的作用, 忽略自身最优值的影响, 所以这时 c_1 应很小, c_2 则很大, 这样不但可以使各个粒子收敛于最优值, 而且加快了粒子群整体的收敛速度. 因此, 本文设计了如下基于平均速度的学习因子变化律:

$$c_1(k) = C \frac{\bar{V}(k)}{V_{\max}}, \quad (5)$$

$$c_2(k) = C - C \frac{\bar{V}(k)}{V_{\max}}. \quad (6)$$

即随着平均速度的减小, 学习因子 c_1 逐渐变小, c_2 逐渐变大.

3.3 基于模拟退火方法的混合优化

利用粒子群平均速度信息调节惯性系数和学习因子, 能更真实地反映粒子群实际的寻优过程, 加快粒子群的寻优速度, 与常规粒子群寻优方法相比, 收敛速度更快, 所以更容易过早地进入局部极小点. 为了避免“早熟”现象, 本文设计了基于模拟退火算法(SA)的粒子群混合优化.

在粒子群寻优过程中, 如果有个别粒子陷入局部极小点, 则有可能使得其他邻近的粒子也陷入局部极小点, 所以在极小点处加上一定的摄动, 可以提高每个粒子跳出局部极小点的机会. 在粒子优化的初始阶段, 粒子自身的最优值 $P_i(k)$ 起主要作用, 此时粒子群的平均速度较大, 所以应对 $P_i(k)$ 进行模拟退火. 当粒子群寻优即将结束时, 粒子群的平均速度几乎为零, 所以此时应对 $P_g(k)$ 进行模拟退火.

本文提出的基于平均速度的切换模拟退火算法如下:

当平均速度 $\bar{V}(k)/V_{\max}$ 较大时, 局部最优值起较大作用, 此时选择对各个粒子自身的最优进行模拟退火, 即

$$P'_i(k) = P_i(k) + R_1 r_3, \\ P_i(k) = \begin{cases} P'_i(k), f(P'_i(k)) < f(P_i(k)) \text{ or} \\ \exp\left(-\frac{f(P'_i(k)) - f(P_i(k))}{T_1(k)}\right) > r_4; \\ P_i(k), \text{ otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

当平均速度 $\bar{V}(k)/V_{\max}$ 小于某一个阈值时, 即 $\bar{V}(k) < \lambda$, $0 < \lambda < 1$, 此时全局最优值起主要作用, 应对全局最优进行模拟退火, 即

$$P'_g(k) = P_g(k) + R_2 r_5,$$

$$P_g(k) = \begin{cases} P'_g(k), f(P'_g(k)) < f(P_g(k)) \text{ or} \\ \exp\left(-\frac{f(P'_g(k)) - f(P_g(k))}{T_2(k)}\right) > r_6; \\ P_g(k), \text{ otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

其中: R_1, R_2 为摄动半径; $f(x)$ 为目标函数; $T_1(k)$ 和 $T_2(k)$ 为退火温度; r_3, r_4, r_5, r_6 为 $[0, 1]$ 之间的随机数.

如果切换参数 λ 过小, 则对 $P_i(k)$ 进行模拟退火操作的比例将过大, 虽然能够增强粒子群的全局优化能力, 但同时会增加粒子群计算的复杂程度, 即除了对每一粒子速度和位置以及自身的最优 $P_i(k)$ 更新外, 还要增加对 $P_i(k)$ 模拟退火的操作. 反之, 如果增加对 $P_g(k)$ 进行模拟退火操作的比例, 则只在每一次粒子优化迭代结束后对 $P_g(k)$ 增加一次模拟退火, 所增加的计算量非常小, 但是会减弱粒子群全局优化的能力, 所以应根据优化问题的复杂程度选择合适的切换阈值 λ .

通常选择指数递减方式降温过程, 即 $T(k) = \eta T(k-1)$, η 为小于 1 的正数. 因本文提出的平均速度指标也可以描述粒子的活跃程度, 粒子越活跃, 所需的退火温度越高, 故采用如下退火温度:

$$T_1(k) = T_{10} \frac{\bar{V}(k)}{V_{\max}}, \quad (9)$$

$$T_2(k) = T_{20} \frac{\bar{V}(k)}{V_{\max}}. \quad (10)$$

其中: T_{10} 和 T_{20} 为温度控制参数; $T_1(k)$ 和 $T_2(k)$ 随着粒子平均速度减小而减小. 因为模拟退火算法是针对某次迭代粒子群的自身最优 $P_i(k)$ 或粒子群所有粒子的最优 $P_g(k)$ 进行操作, 它们也是某次意义下的最优, 所以 T_{10} 和 T_{20} 的取值是一个非常小的正数便可满足条件.

综上所述, 基于平均速度的混合粒子优化算法具体设计步骤如下:

Step 1: 初始化退火控制温度 T_{10} 和 T_{20} , 速度限幅值 V_{\max} , 切换阈值 λ , 以及粒子群的位置和速度的初始值, 计算初始平均速度.

Step 2: 按照式 (1) 更新粒子群的速度, 并对速度进行限幅.

Step 3: 按照定义 (3) 计算当前粒子群的平均速度 $\bar{V}(k)$, 并且更新惯性系数、学习因子和退火温度. 按照式 (2) 计算粒子的位置.

Step 4: 计算粒子当前位置的函数适应值, 计算各个粒子自身的最优点 $P_i(k)$.

Step 5: 判断 $\bar{V}(k)$ 是否小于 λ , 若是, 则转 Step 7.

Step 6: 按式 (7) 对 $P_i(k)$ 进行模拟退火运算.

Step 7: 计算粒子群当前的全局最优点 $P_g(k)$. 判

断 $\bar{V}(k)$ 是否大于 λ , 若是, 则转 Step 9.

Step 8: 按式 (8) 对 $P_g(k)$ 进行模拟退火运算.

Step 9: 若满足终止条件, 则结束; 否则, 转 Step 3.

4 数值算例

为了说明基于平均速度的混合粒子群优化方法具有快速性和全局搜索能力, 采用 3 种粒子群优化进行测试, 即: 1) 线性粒子群 (LPSO). 线性调节惯性权重和学习因子, 不加模拟退火, 即 $w(k) = 0.9 - 0.5k/M$, $c_1(k) = 2 - 2k/M$, $c_2(k) = 2k/M$. 2) 平均速度粒子群 (VPSO). 基于平均速度的方法调节惯性权重, 不加模拟退火. 3) 模拟退火-平均速度粒子群 (SA-VPSO). 基于平均速度的方法调节惯性权重, 加模拟退火.

选择二元标准测试函数分别为: 1) Sphere 函数, 只有一个极小值点; 2) Rastrigin 函数, 是一个多峰函数, 具有很多局部极小点; 3) Schaffer 函数, 原点为最小点, 极小点分布在一系列以原点为中心的同心圆上, 局部极小点并不是单个孤立的点. 测试函数具体情况如表 1 所示.

表 2 测试函数

函数	表达式	最优值
Sphere	$f_1 = x_1^2 + x_2^2$	0
Rastrigin	$f_2 = \sum_{i=1}^2 (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$	0
Schaffer	$f_3 = 0.5 + \frac{\sin(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - 0.5}{[1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)]^2}$	0

设置搜索范围为 $x_1, x_2 \in [-5, 5]$, 粒子个数 $N = 50$, $C = 2$, $V_{\max} = 0.5$, $T_{01} = 0.02$, $T_{02} = 0.2$, $R_1 = 0.2$, $R_2 = 0.3$, $\lambda = 0.15$. 进行 30 次实验, 平均测试函数适应值变化曲线如图 2 ~ 图 4 所示.

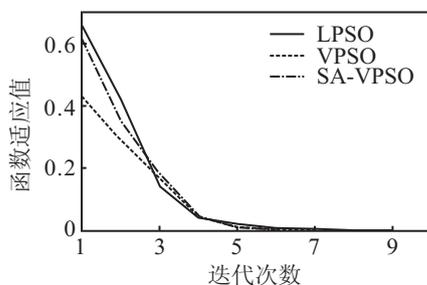


图 2 Sphere 函数适应值

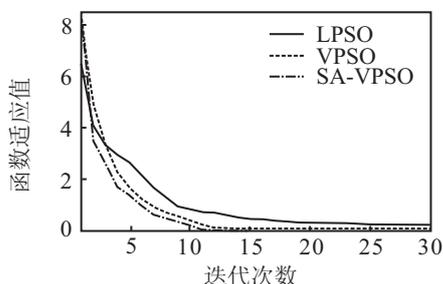


图 3 Rastrigin 函数适应值

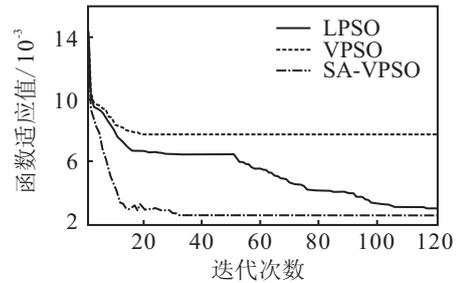


图 4 Schaffer 函数适应值

由图 2 可以看出, 对于只有一个最优点的 Sphere 函数, VPSO 以及 SA-VPSO 的寻优速度与 LPSO 相比区别不大, 并且都能找到最优值. 通过观察图 3 可知, 对于孤立多极值点的 Rastrigin 函数而言, VPSO 以及 SA-VPSO 的寻优速度都比 LPSO 快, 模拟退火的作用并不明显. 由图 4 可知, 对于非孤立多极小值点的 Schaffer 函数, VPSO 和 SA-VPSO 均比 LPSO 的寻优速度快, 但是 VPSO 方法由于强调寻优速度, 很容易陷入局部极小点. SA-PSO 方法由于采用模拟退火策略, 保持了寻优速度快的优点, 并减小了陷入局部极小的机会.

5 结 论

本文给出了粒子群平均速度的定义, 在此基础上提出了惯性系数、学习因子以及退火温度改进的更新形式, 进而设计了切换形式的模拟退火策略. 基于模拟退火的混合粒子群优化方法不但可以保持较快的寻优速度, 而且可以减小粒子陷入局部极小的机会, 从而减小了粒子群的“早熟”现象. 通过对 3 个典型函数的测试分析可知, 本文提出的基于平均速度的混合粒子群算法, 无论在寻优速度上还是在寻优的全局性上都有显著的提高.

参考文献(References)

- [1] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[C]. Proc of the 6th Int Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya: IEEE, 1995: 39-43.
- [2] Del Valle Y, Venayagamoorthi G K, Mohaheghi S, et al. Particle swarm optimization: Basic concepts, variants and applications in power systems[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2008, 12(2): 1971-1984.
- [3] Clerc M, Kenney J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in multidimensional complex space[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-73.
- [4] Kadirkamathan V, Selvarajah K, Feleming P J. Stability analysis of particle dynamics in particle swarm optimizer[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2006, 10(3): 245-255.

(下转第 160 页)