

文章编号: 1001-0920(2012)02-0252-07

控制增益符号未知的不确定非线性系统鲁棒自适应控制

王坚浩, 胡剑波

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

摘要: 针对一类控制增益函数及符号均未知的不确定非线性系统, 基于反推滑模设计方法, 提出一种鲁棒自适应神经网络控制方案. 结合 Nussbaum 增益设计技术和神经网络逼近能力, 取消了控制增益函数及符号已知的条件, 应用积分型 Lyapunov 函数避免了控制器奇异性问题, 并通过引入神经网络逼近误差和不确定干扰上界的自适应补偿项消除了建模误差和不确定干扰的影响. 理论分析证明了闭环系统所有信号半全局一致终结有界, 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词: 不确定非线性系统; 反推滑模控制; 神经网络; 鲁棒自适应控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Robust adaptive control for uncertain nonlinear systems with unknown control gain signs

WANG Jian-hao, HU Jian-bo

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China. Correspondent: WANG Jian-hao, E-mail: hamilton.wang@sina.com)

Abstract: A robust adaptive neural network control scheme for a class of uncertain nonlinear systems with unknown control gain function and its signs is proposed based on backstepping sliding mode control design. The control scheme eliminates the condition that a priori knowledge of the control gain function and its signs to be known by combination of Nussbaum gain design technique and the approximation capability of neural networks. The controller singularity problem is avoided by employing the integral Lyapunov functions, and the influence of modeling error and uncertain disturbances is minimized by introducing the adaptive compensation term for the upper bound of both neural networks approximation error and uncertain disturbances. By theoretical analysis, all the signals in the closed loop systems are guaranteed to be semi-globally uniformly ultimately bounded. Finally, the simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: uncertain nonlinear systems; backstepping sliding mode control; neural networks; robust adaptive control

1 引言

近年来, 随着反推(backstepping)设计方法的发展^[1,2], 基于非线性 backstepping 设计技术的自适应神经网络控制问题引起了众多学者的关注^[3-7]. 自适应神经网络 backstepping 控制不要求非线性函数与不确定参数具有线性关系, 而且解决了一般自适应神经网络控制要求非线性系统必须满足匹配条件的限制. 然而, 在实际应用中仍然存在一些问题, 例如: 文献[3-5]为了避免控制器奇异性问题, 要求控制增益 $g_i(\cdot)$ 为常数或已知函数; [6-7]取消了上述限制, 针对一类具有未知非线性函数 $f_i(\cdot)$ 及控制增益函数 $g_i(\cdot)$ 未知的严格反馈非线性系统, 基于 backstepping 设计方

法提出了自适应神经网络控制方案, 但要求控制增益 $g_i(\cdot)$ 的一阶导数上界已知; [8-9]针对一类控制增益 $g_i(\cdot)$ 为未知非线性函数的严格反馈非线性系统, 利用一种积分型 Lyapunov 函数取消了对控制增益 $g_i(\cdot)$ 的一阶导数上界已知的要求, 并避免了控制器奇异性问题.

然而, 文献[3-9]都是针对控制增益符号已知情况, 若控制增益符号未知, 则控制器的设计便显得较为困难, 而[10]提出的 Nussbaum 增益技术为处理控制增益符号未知系统提供了一种有效的设计方法. 在此基础上, [11]针对一类控制增益为未知定常数的不确定非线性系统, 利用神经网络逼近未知非线性函

收稿日期: 2010-09-11; 修回日期: 2010-12-12.

基金项目: 空军工程大学科研创新基金项目(XS0901008).

作者简介: 王坚浩(1982-), 男, 博士生, 从事先进控制理论与应用的研究; 胡剑波(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事先进控制理论与应用、飞行控制等研究.

数 $f_i(\cdot)$, 并结合 Nussbaum 增益和 backstepping 设计技术, 提出了鲁棒自适应神经网络控制方案; [12] 研究了一类具有未知函数控制增益的非线性时滞系统的自适应神经网络控制问题。

本文在文献 [11] 的基础上, 针对一类控制增益为未知非线性函数且控制增益符号未知的不确定非线性系统, 基于反推滑模设计方法, 提出了一种鲁棒自适应神经网络控制方案. 与文献 [11] 相比, 该方案结合 Nussbaum 增益技术和神经网络逼近能力处理未知控制增益函数及符号, 应用积分型 Lyapunov 函数避免控制器奇异性问题, 并通过引入神经网络逼近误差和不确定干扰上界的自适应补偿项消除建模误差和不确定干扰的影响. 采用 Lyapunov 综合方法, 证明了闭环系统所有信号半全局一致终结有界, 跟踪误差收敛到原点附近的一个小领域内。

2 问题描述

考虑如下严格反馈型不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \Delta_i(t, x), \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(x) + g_n(x)u + \Delta_n(t, x); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 为可测状态向量; $u, y \in \mathbf{R}$ 分别为系统控制输入和输出; $f_i(\cdot), g_i(\cdot)$ 为未知光滑非线性函数; $\Delta_i(t, x)$ 为未知外界扰动不确定项。

假设 1 对于 $1 \leq i \leq n$, 存在未知正常数 p_i^* , 使得 $\forall(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$, 有

$$|\Delta_i(t, x)| \leq p_i^* \phi_i(\bar{x}_i),$$

其中 $\phi_i(\bar{x}_i)$ 为已知非负光滑函数。

假设 2 对于 $\forall \bar{x}_i \in \mathbf{R}^i, 1 \leq i \leq n$, 控制增益 $g_i(\bar{x}_i)$ 及其符号均未知, 但存在未知常数 g_{i0}, g_{i1} , 使得 $0 < g_{i0} \leq |g_i(\bar{x}_i)| \leq g_{i1}$ 。

定义参考轨迹向量 $\bar{x}_{d(i+1)} = [y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(i)}]^T, i = 1, 2, \dots, n-1, y_d^{(i)}$ 为参考轨迹 y_d 的第 i 阶导数。

假设 3 参考轨迹向量 $\bar{x}_{di}(i = 2, 3, \dots, n)$ 光滑可测且 $\bar{x}_{di} \in \Omega_{di} \in \mathbf{R}^i, \Omega_{di}$ 为已知有界紧集。

采用 RBF 神经网络 (RBFNN) 逼近系统未知非线性函数, RBF 神经网络是一个线性参数化的神经网络, 并可表示为

$$h_{nn}(Z) = W^T \xi(Z).$$

其中: 输入向量 $Z \in \Omega_Z \subset \mathbf{R}^n, n$ 为神经网络的输入维数, $W = [W_1, \dots, W_l]^T \in \mathbf{R}^l$ 为神经网络权值向量, $l > 1$ 为网络节点数, $\xi(Z) = [\xi_1(Z), \dots, \xi_l(Z)]^T \in \mathbf{R}^l$ 为基函数向量。

引理 1 $h(Z)$ 为紧集 $\Omega_Z \subset \mathbf{R}^n$ 内任意连续函数, 则 $\forall \varepsilon^* > 0$ 存在上述 RBF 神经网络使得

$$\sup_{Z \in \Omega_Z} |h(Z) - W^{*T} \xi(Z)| \leq \varepsilon^*.$$

式中 $h(Z) - W^{*T} \xi(Z) = \varepsilon$ 为神经网络逼近误差, 最优权值向量 W^* 定义如下:

$$W^* = \arg \min_{W \in \mathbf{R}^l} \left\{ \sup_{Z \in \Omega_Z} |h(Z) - W^T \xi(Z)| \right\}.$$

为了处理未知控制增益符号, 引入 Nussbaum 函数^[10]。

定义 1 如果连续函数 $N(\zeta) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足条件:

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{k} \int_0^k N(\zeta) d\zeta = +\infty, \\ 2) & \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \frac{1}{k} \int_0^k N(\zeta) d\zeta = -\infty, \end{aligned}$$

则称 $N(\zeta)$ 为 Nussbaum 函数。

引理 2 已知 $V(\cdot), \zeta(\cdot)$ 都是 $[0, t_f]$ 上的光滑函数, 且 $V(t) \geq 0, \forall t \in [0, t_f], N(\cdot)$ 是 Nussbaum 函数, 如果下列不等式成立:

$$V(t) \leq c_0 + e^{-c_1 t} \int_0^t (gx(\tau)N(\zeta) + 1) \dot{\zeta} e^{c_1 \tau} d\tau, \quad (2)$$

则 $V(t), \zeta(t)$ 和 $\int_0^t gx(\tau)N(\zeta)\dot{\zeta}d\tau$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有界. 其中: 常数 $c_1 > 0, gx(t)$ 为一个取值在未知闭区间 $I := [l^-, l^+], 0 \notin I$ 上的函数, c_0 为适当的常数。

在反推设计过程中, 虚拟控制函数要保证至少是 C^1 连续的函数. 此外, 滑模变结构控制的不连续性是由不连续的符号函数引起的, 从而使得控制系统存在高频抖振现象, 为了削弱抖振, 通常采用连续但不可导的饱和函数来近似表示符号函数. 在本文控制器设计过程的每一步需要对虚拟控制函数求导, 必须保证虚拟控制函数连续且可导. 因此, 引入如下—类连续且可导的平滑函数^[13]

$$[g(\omega)]_{cd} = \frac{1 - \exp(-v\omega)}{1 + \exp(-v\omega)}, \quad \forall v > 0.$$

引理 3 对于 $\forall v > 0$, 且 $\omega \in \mathbf{R}$, 连续可导函数 $[g(\omega)]_{cd}$ 满足如下不等式:

$$0 \leq |\omega| - \omega \frac{1 - \exp(-v\omega)}{1 + \exp(-v\omega)} \leq \frac{1}{v}.$$

控制目标: 针对不确定非线性系统 (1), 在满足假设 1~假设 3 的条件下, 利用神经网络构造反推滑模鲁棒自适应控制器和自适应律, 使得闭环系统所有信号半全局一致终结有界, 且系统跟踪误差 $e = y - y_d$ 收敛到原点附近的一个小领域内。

文中: $\|\bullet\|$ 表示 \bullet 的 2-范数, $\hat{\bullet}$ 表示 \bullet 的估计值, $\tilde{\bullet} = \hat{\bullet} - \bullet, \lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A)$ 分别表示矩阵 A 的最大和最小特征值. 此外, 取 $N(\zeta) = e^{\zeta^2} \cos((\pi/2)\zeta)$ 。

3 控制器设计及稳定性分析

定义系统 (1) 的状态跟踪误差为 $e_1 = x_1 - y_d$,

$e_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i(\bar{x}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. $\alpha_i(\bar{x}_i)$ 为第 i 阶子系统的期望虚拟控制. 反推滑模鲁棒自适应控制器设计包含 n 步, 在设计过程中, 由于神经网络的逼近特性只在某一紧集内成立, 因此本文得到的稳定性结论是半全局意义下的. 具体设计步骤如下:

Step 1 由闭环系统(1)的第1阶子系统和状态跟踪误差 $e_1 = x_1 - y_d$, $e_2 = x_2 - \alpha_1$, 则 e_1 的动态系统

$$\dot{e}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)(e_2 + \alpha_1) + \Delta_1(t, x) - \dot{y}_d. \quad (3)$$

由积分 Lyapunov 设计方法^[8], 令 $\beta_1(x_1) = 1/|g_1(x_1)|$, 选择如下的积分型 Lyapunov 函数:

$$V_{e_1} = \int_0^{e_1} \sigma \beta_1(\sigma + y_d) d\sigma. \quad (4)$$

通过变量替换 $\sigma = \theta e_1$, V_{e_1} 可转化为

$$V_{e_1} = e_1^2 \int_0^1 \theta \beta_1(\theta e_1 + y_d) d\theta. \quad (5)$$

由假设 2 可知, $1/g_{11} \leq \beta_1(\theta e_1 + y_d) \leq 1/g_{10}$, 则有

$$e_1^2/2g_{11} \leq V_{e_1} \leq e_1^2/2g_{10}. \quad (6)$$

对 V_{e_1} 沿着式(3)求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_1} = & e_1 \beta_1(x_1) \dot{e}_1 + \int_0^{e_1} \sigma \frac{\partial \beta_1(\sigma + y_d)}{\partial y_d} \dot{y}_d d\sigma = \\ & e_1 \beta_1(x_1) [f_1(x_1) + g_1(x_1)(e_2 + \alpha_1) + \Delta_1 - \\ & \dot{y}_d] + \dot{y}_d \left[\sigma \beta_1(\sigma + y_d) \Big|_0^{e_1} - \int_0^{e_1} \beta_1(\sigma + y_d) d\sigma \right] = \\ & e_1 \beta_1(x_1) [f_1(x_1) + g_1(x_1)(e_2 + \alpha_1) + \Delta_1] - \\ & e_1 \dot{y}_d \int_0^1 \beta_1(\theta e_1 + y_d) d\theta = \\ & e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) e_2 + e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) \alpha_1 + \\ & e_1 \beta_1(x_1) \Delta_1 + e_1 h_1(Z_1). \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$h_1(Z_1) = \beta_1(x_1) f_1(x_1) - \dot{y}_d \int_0^1 \beta_1(\theta e_1 + y_d) d\theta,$$

$$Z_1 = [x_1, y_d, \dot{y}_d]^T \in \Omega_{Z_1} \subset \mathbf{R}^3,$$

Ω_{Z_1} 为一个紧集.

在紧集 $\Omega_{Z_1} \subset \mathbf{R}^3$ 上, 应用 RBF 神经网络来逼近未知非线性函数 $h_1(Z_1)$, 且由引理 1, 令 $|\varepsilon_1| \leq \varepsilon_1^*$, ε_1^* 为未知正常数, 并利用假设 1 和假设 2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_1} \leq & e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) e_2 + e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) \alpha_1 + \\ & e_1 W_1^{*T} \xi_1(Z_1) + |e_1| (\varepsilon_1^* + p_1^* \phi_1(x_1)/g_{10}) \leq \\ & e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) e_2 + e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) \alpha_1 + \\ & e_1 W_1^{*T} \xi_1(Z_1) + |e_1| \delta_1^* \bar{\phi}_1(x_1). \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $\delta_1^* = \max\{\varepsilon_1^*, p_1^*/g_{10}\}$ 为未知的正常数, $\bar{\phi}_1(x_1) = 1 + \phi_1(x_1)$ 为已知光滑函数.

定义第1阶子系统的 Lyapunov 函数为

$$V_1 = V_{e_1} + \frac{1}{2} \tilde{W}_1^T \Gamma_1^{-1} \tilde{W}_1 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\delta}_1^2. \quad (9)$$

式中: $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$ 为自适应增益矩阵, $\gamma_1 > 0$ 为自适应增益系数.

对 V_1 求导, 并将式(8)代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) e_2 + e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) \alpha_1 + \\ & e_1 W_1^{*T} \xi_1(Z_1) + |e_1| \delta_1^* \bar{\phi}_1(x_1) + \\ & \tilde{W}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{W}}_1 + \Gamma_1^{-1} \tilde{\delta}_1 \dot{\tilde{\delta}}_1. \end{aligned} \quad (10)$$

选取如下虚拟控制函数和自适应律:

$$\begin{cases} \alpha_1 = N(\zeta_1) \left[k_1 e_1 + \hat{W}_1^T \xi_1 + \right. \\ \quad \left. \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 \frac{1 - \exp(-v_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 e_1)}{1 + \exp(-v_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 e_1)} \right], \\ \dot{\zeta}_1 = k_1 e_1^2 + \hat{W}_1^T \xi_1 e_1 + \\ \quad e_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 \frac{1 - \exp(-v_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 e_1)}{1 + \exp(-v_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 e_1)}, \\ \dot{\hat{W}}_1 = e_1 \Gamma_1 \xi_1 - \sigma_1 \Gamma_1 \hat{W}_1, \\ \dot{\hat{\delta}}_1 = \Gamma_1 |e_1| \bar{\phi}_1 - \tau_1 \gamma_1 \hat{\delta}_1. \end{cases} \quad (11)$$

式中: $k_1 > 0, v_1 > 0, \sigma_1 > 0, \tau_1 > 0$ 为设计参数.

将虚拟控制函数 α_1 代入式(10), 并在其右边同时加减 $\dot{\zeta}_1$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) e_2 + \beta_1(x_1) g_1(x_1) N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 - \\ & k_1 e_1^2 + |e_1| \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 - e_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 \frac{1 - \exp(-v_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 e_1)}{1 + \exp(-v_1 \hat{\delta}_1 \bar{\phi}_1 e_1)} + \\ & \tilde{W}_1^T \Gamma_1^{-1} (\dot{\tilde{W}}_1 - e_1 \Gamma_1 \xi_1) + \gamma_1^{-1} \tilde{\delta}_1 (\dot{\tilde{\delta}}_1 - \gamma_1 |e_1| \bar{\phi}_1). \end{aligned} \quad (12)$$

将自适应律 $\dot{\hat{W}}_1$ 和 $\dot{\hat{\delta}}_1$ 代入式(12), 并由引理 3 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & e_1 \beta_1(x_1) g_1(x_1) e_2 + \beta_1(x_1) g_1(x_1) N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \\ & \dot{\zeta}_1 - k_1 e_1^2 + \frac{1}{v_1} - \sigma_1 \tilde{W}_1^T \tilde{W}_1 - \tau_1 \tilde{\delta}_1 \dot{\tilde{\delta}}_1. \end{aligned} \quad (13)$$

配平方可得如下 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$-\sigma_1 \tilde{W}_1^T \tilde{W}_1 \leq \frac{\sigma_1}{2} \|\tilde{W}_1^*\|^2 - \frac{\sigma_1}{2} \|\tilde{W}_1\|^2, \quad (14)$$

$$-\tau_1 \tilde{\delta}_1 \dot{\tilde{\delta}}_1 \leq \frac{\tau_1}{2} \|\delta_1^*\|^2 - \frac{\tau_1}{2} \|\tilde{\delta}_1\|^2. \quad (15)$$

将不等式(14)和(15)及 Young's 不等式 $e_1 \beta_1 g_1 e_2 \leq \frac{1}{4} e_1^2 + \beta_1^2 g_1^2 e_2^2 = \frac{1}{4} e_1^2 + e_2^2$ 代入式(13), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & e_2^2 + \beta_1(x_1) g_1(x_1) N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 - \\ & k_1^* e_1^2 - \frac{\sigma_1}{2} \|\tilde{W}_1\|^2 - \frac{\tau_1}{2} \|\tilde{\delta}_1\|^2 + C_{10} \leq \\ & -C_{11} V_1 + C_{10} + e_2^2 + \\ & (\beta_1(x_1) g_1(x_1) N(\zeta_1) + 1) \dot{\zeta}_1. \end{aligned} \quad (16)$$

式中: k_1^*, C_{10}, C_{11} 为正常数, 定义如下:

$$k_1^* := k_1 - \frac{1}{4},$$

$$C_{10} := \frac{\sigma_1}{2} \|W_1^*\|^2 + \frac{\tau_1}{2} \|\delta_1^*\|^2 + \frac{1}{v_1},$$

$$C_{11} := \min \left\{ 2g_{10}k_1^*, \frac{\sigma_1}{\lambda_{\max}(T_1^{-1})}, \tau_1\gamma_1 \right\}.$$

定义 $\varphi_1 := C_{10}/C_{11}$, 对式(16)两边同乘以 $e^{C_{11}t}$, 再对 t 积分得

$$\begin{aligned} V_1(t) &\leq \varphi_1 + [V_1(0) - \varphi_1]e^{-C_{11}t} + \\ &e^{-C_{11}t} \int_0^t [(\beta_1(x_1)g_1(x_1)N(\zeta_1) + 1)e^{C_{11}\tau}] \dot{\zeta}_1 d\tau + \\ &e^{-C_{11}t} \int_0^t e_2^2 e^{C_{11}\tau} d\tau \leq \\ &\varphi_1 + V_1(0) + \\ &e^{-C_{11}t} \int_0^t [(\beta_1(x_1)g_1(x_1)N(\zeta_1) + 1)e^{C_{11}\tau}] \dot{\zeta}_1 d\tau + \\ &e^{-C_{11}t} \int_0^t e_2^2 e^{C_{11}\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

又由

$$\begin{aligned} &e^{-C_{11}t} \int_0^t e_2^2 e^{C_{11}\tau} d\tau \leq \\ &e^{-C_{11}t} \sup_{\tau \in [0,t]} [e_2^2(\tau)] \int_0^t e^{C_{11}\tau} d\tau \leq \\ &\frac{1}{C_{11}} \sup_{\tau \in [0,t]} [e_2^2(\tau)] \end{aligned} \quad (18)$$

可知, 若系统状态跟踪误差 e_2 有界, 则式(17)中的多余项 $e^{-C_{11}t} \int_0^t e_2^2 e^{C_{11}\tau} d\tau$ 亦有界. 则由引理2可知, $\zeta_1, V_1(t)$ 及 $\int_0^t \beta_1 g_1 N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 d\tau$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有界.

Step i ($2 \leq i \leq n-1$) 由闭环系统(1)的第 i 阶子系统和状态跟踪误差 $e_i = x_i - \alpha_{i-1}$, 得 e_i 的动态系统

$$\dot{e}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)(e_{i+1} + \alpha_i) + \Delta_i - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (19)$$

令 $\beta_i(\bar{x}_i) = 1/|g_i(\bar{x}_i)|$, 选择积分型 Lyapunov 函数如下:

$$V_{e_i} = \int_0^{e_i} \sigma \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \sigma + \alpha_{i-1}) d\sigma, \quad (20)$$

对 V_{e_i} 沿着式(19)求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_i} &= \frac{\partial V_{e_i}}{\partial e_i} \dot{e}_i + \frac{\partial V_{e_i}}{\partial \bar{x}_{i-1}} \dot{\bar{x}}_{i-1} + \frac{\partial V_{e_i}}{\partial \alpha_{i-1}} \dot{\alpha}_{i-1} = \\ &e_i \beta_i(\bar{x}_i) \dot{e}_i + \int_0^{e_i} \sigma \frac{\partial \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \sigma + \alpha_{i-1})}{\partial \bar{x}_{i-1}} \dot{\bar{x}}_{i-1} d\sigma + \\ &\int_0^{e_i} \sigma \frac{\partial \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \sigma + \alpha_{i-1})}{\partial \alpha_{i-1}} \dot{\alpha}_{i-1} d\sigma = \\ &e_i \left[\beta_i(\bar{x}_i) f_i(\bar{x}_i) + \beta_i(\bar{x}_i) g_i(\bar{x}_i) (e_{i+1} + \alpha_i) + \right. \\ &\left. \beta_i(\bar{x}_i) \Delta_i + e_i \dot{\bar{x}}_{i-1}^T \int_0^1 \theta \frac{\partial \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \theta e_i + \alpha_{i-1})}{\partial \bar{x}_{i-1}} d\theta - \right. \\ &\left. \dot{\alpha}_{i-1} \int_0^1 \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \theta e_i + \alpha_{i-1}) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha_{i-1} &= \alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{W}_{i-1}, \bar{\delta}_{i-1}, \bar{x}_{di}, \zeta_{i-1}), \\ \bar{W}_{i-1} &= [\hat{W}_1^T, \dots, \hat{W}_{i-1}^T]^T, \end{aligned}$$

$$\bar{\delta}_{i-1} = [\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{i-1}]^T.$$

虚拟控制函数 α_{i-1} 的导数为

$$\dot{\alpha}_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} [f_j(\bar{x}_j) + g_j(\bar{x}_j)x_{j+1} + \Delta_j] + \varpi_{i-1}. \quad (22)$$

式中 ϖ_{i-1} 是可以计算的中间变量, 可表示为

$$\begin{aligned} \varpi_{i-1} &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{W}_j} \dot{\hat{W}}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\delta}_j} \dot{\hat{\delta}}_j + \\ &\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \bar{x}_{di}} \dot{\bar{x}}_{di} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \zeta_{i-1}} \dot{\zeta}_{i-1}. \end{aligned}$$

式(21)可进一步表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_i} &= e_i \beta_i(\bar{x}_i) g_i(\bar{x}_i) e_{i+1} + e_i \beta_i(\bar{x}_i) g_i(\bar{x}_i) \alpha_i + \\ &e_i \beta_i(\bar{x}_i) \Delta_i + e_i h_i(Z_i). \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$h_i(Z_i) =$$

$$\begin{aligned} &\beta_i(\bar{x}_i) f_i(\bar{x}_i) - \dot{\alpha}_{i-1} \int_0^1 \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \theta e_i + \alpha_{i-1}) d\theta + \\ &e_i \dot{\bar{x}}_{i-1}^T \int_0^1 \theta \frac{\partial \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \theta e_i + \alpha_{i-1})}{\partial \bar{x}_{i-1}} d\theta, \end{aligned}$$

$$Z_i =$$

$$\left[\bar{x}_i^T, \alpha_{i-1}, \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{i-1}}, \varpi_{i-1} \right]^T \in \Omega_{Z_i} \subset \mathbf{R}^{2i+1}.$$

将式(23)和(7)相对照, 不难发现, 以下设计过程可参考 Step 1 的设计步骤和方法. 限于篇幅, 这里只给出主要结果:

设计如下虚拟控制律和自适应律:

$$\begin{cases} \alpha_i = N(\zeta_i) \left[k_i e_i + \hat{W}_i^T \xi_i + \hat{\delta}_i \bar{\phi}_i \frac{1 - \exp(-v_i \hat{\delta}_i \bar{\phi}_i e_i)}{1 + \exp(-v_i \hat{\delta}_i \bar{\phi}_i e_i)} \right], \\ \dot{\zeta}_i = k_i e_i^2 + \hat{W}_i^T \xi_i e_i + e_i \hat{\delta}_i \bar{\phi}_i \frac{1 - \exp(-v_i \hat{\delta}_i \bar{\phi}_i e_i)}{1 + \exp(-v_i \hat{\delta}_i \bar{\phi}_i e_i)}, \\ \dot{\hat{W}}_i = e_i \Gamma_i \xi_i - \sigma_i \Gamma_i \hat{W}_i, \\ \dot{\hat{\delta}}_i = \gamma_i |e_i| \bar{\phi}_i - \tau_i \gamma_i \hat{\delta}_i. \end{cases} \quad (24)$$

式中: $k_i > 0, v_i > 0, \sigma_i > 0, \tau_i > 0$ 为设计参数; $\hat{\delta}_i$ 为未知正常数 $\delta_i^* = \max\{\varepsilon_i^*, p_i^*/g_{i0}\}$ 的估计值; $\bar{\phi}_i(\bar{x}_i) = 1 + \phi_i(\bar{x}_i)$ 为已知光滑函数; $\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$ 为自适应增益矩阵; $\gamma_i > 0$ 为自适应增益系数.

定义第 i 阶子系统的 Lyapunov 函数为

$$V_i = V_{e_i} + \frac{1}{2} \hat{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \hat{W}_i + \frac{1}{2\gamma_i} \hat{\delta}_i^2. \quad (25)$$

对 V_i 求导, 并将虚拟控制律和自适应律(24)代入, 类似于 Step 1 中设计步骤和方法, 可得

$$\begin{aligned} V_i(t) &\leq \varphi_i + V_i(0) + \\ &e^{-C_{i1}t} \int_0^t [(\beta_i(\bar{x}_i)g_i(\bar{x}_i)N(\zeta_i) + 1)e^{C_{i1}\tau}] \dot{\zeta}_i d\tau + \end{aligned}$$

$$e^{-C_{i1}t} \int_0^t e_{i+1}^2 e^{C_{i1}\tau} d\tau. \quad (26)$$

式中

$$\varphi_i = C_{i0}/C_{i1}, \quad C_{i0} = \frac{\sigma_i}{2} \|W_i^*\|^2 + \frac{\tau_i}{2} \|\delta_i^*\|^2 + \frac{1}{v_i},$$

$$C_{i1} = \min \left\{ 2g_{i0}k_i^*, \frac{\sigma_i}{\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}, \tau_i\gamma_i \right\}, \quad k_i^* = k_i - \frac{1}{4}.$$

类似 Step 1, 若状态跟踪误差 e_{i+1} 有界, 则式 (26) 中的多余项 $e^{-C_{i1}t} \int_0^t e_{i+1}^2 e^{C_{i1}\tau} d\tau$ 亦有界. 则由引理 2 可知, $\zeta_i, V_i(t)$ 及 $\int_0^t \beta_i g_i N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i d\tau$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有界.

经过上述 $n-1$ 步设计过程, 得到 $n-1$ 个期望虚拟控制 $\alpha_i, i=1, 2, \dots, n-1$. 根据标准反推控制算法可设计最终的控制律 $u = \alpha_n$. 然而, 控制器长期频繁地执行控制任务, 极易给系统引入附加的扰动和不确定性. 因此, 本文在前 $n-1$ 步反推设计的基础上结合滑模变结构控制以提高系统的鲁棒性.

Step n 由闭环系统 (1) 的第 n 阶子系统 and 状态跟踪误差 $e_n = x_n - \alpha_{n-1}$, 有 e_n 的动态系统

$$\dot{e}_n = f_n(x) + g_n(x)u + \Delta_n(t, x) - \dot{\alpha}_{n-1}. \quad (27)$$

定义滑模面 $s = c_1 e_1 + \dots + c_{n-1} e_{n-1} + e_n$.

选择系数 c_1, c_2, \dots, c_{n-1} , 使得多项式 $p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \dots + c_2p + c_1$ 为 Hurwitz 稳定.

对 s 求导得

$$\dot{s} = f_n(x) + g_n(x)u + \Delta_n + \psi, \quad (28)$$

$$\text{式中 } \psi = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i - \dot{\alpha}_{n-1}.$$

令 $\beta_n(x) = 1/|g_n(x)|$, 选择如下积分型 Lyapunov 函数:

$$V_s = \int_0^s \sigma \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \psi_1) d\sigma, \quad (29)$$

$$\text{式中 } \psi_1 = \alpha_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i.$$

对 V_s 沿着式 (28) 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= \frac{\partial V_s}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial V_s}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} + \frac{\partial V_s}{\partial \psi_1} \dot{\psi}_1 = \\ &= s\beta_n(x)\dot{s} + \int_0^s \sigma \frac{\partial \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \psi_1)}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} d\sigma + \\ &+ \int_0^s \sigma \frac{\partial \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \psi_1)}{\partial \psi_1} \dot{\psi}_1 d\sigma. \end{aligned} \quad (30)$$

由 $\psi = -\psi_1, \frac{\partial \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \psi_1)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \psi_1)}{\partial \psi_1}$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^s \sigma \frac{\partial \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \psi_1)}{\partial \psi_1} \dot{\psi}_1 d\sigma = \\ & - s\psi\beta_n(x) + \psi \int_0^s \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \psi_1) d\sigma, \end{aligned} \quad (31)$$

则式 (30) 可进一步表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= \\ & s[\beta_n(x)f_n(x) + \beta_n(x)g_n(x)u + \beta_n(x)\Delta_n + \\ & \beta_n(x)\psi] + s^2 \dot{\bar{x}}_{n-1}^T \int_0^1 \theta \frac{\partial \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \theta s + \psi_1)}{\partial \bar{x}_{n-1}} d\theta - \\ & s\psi\beta_n(x) + s\psi \int_0^1 \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \theta s + \psi_1) d\theta = \\ & s\beta_n(x)g_n(x)u + s\beta_n(x)\Delta_n + s\dot{h}_n(Z_n). \end{aligned} \quad (32)$$

式中

$$h_n(Z_n) = \beta_n(x)f_n(x) + \psi \int_0^1 \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \theta s + \psi_1) d\theta + s\dot{\bar{x}}_{n-1}^T \int_0^1 \theta \frac{\partial \beta_n(\bar{x}_{n-1}, \theta s + \psi_1)}{\partial \bar{x}_{n-1}} d\theta.$$

$$Z_n = [x^T, s, \psi, \psi_1]^T \in \Omega_{Z_n} \subset \mathbf{R}^{n+3}.$$

在紧集 $\Omega_{Z_n} \subset \mathbf{R}^{n+3}$ 上, 应用 RBF 神经网络来逼近未知非线性函数 $h_n(Z_n)$, 且由引理 1, 令 $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon_n^*$, ε_n^* 为未知正常数, 并利用假设 1 和假设 2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &\leq s\beta_n(x)g_n(x)u + sW_n^{*T} \xi_n(Z_n) + \\ & |s|(\varepsilon_n^* + p_n^* \phi_n(x)/g_{n0}) \leq \\ & s\beta_n(x)g_n(x)u + sW_n^{*T} \xi_n(Z_n) + |s|\delta_n^* \bar{\phi}_n(x). \end{aligned} \quad (33)$$

式中: $\delta_n^* = \max\{\varepsilon_n^*, p_n^*/g_{n0}\}$ 为未知的正常数, $\bar{\phi}_n(x) = 1 + \phi_n(x)$ 为已知光滑函数.

定义第 n 阶子系统的 Lyapunov 函数为

$$V_n = V_s + \frac{1}{2} \tilde{W}_n^T \Gamma_n^{-1} \tilde{W}_n + \frac{1}{2\gamma_n} \tilde{\delta}_n^2. \quad (34)$$

式中: $\Gamma_n = \Gamma_n^T > 0$ 为自适应增益矩阵, $\gamma_n > 0$ 为自适应增益系数.

设计如下实际控制律和自适应律:

$$\begin{cases} u = N(\zeta_n) \left[k_n s + \hat{W}_n^T \xi_n + \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n \frac{1 - \exp(-v_n \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n s)}{1 + \exp(-v_n \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n s)} \right], \\ \dot{\zeta}_n = k_n s^2 + \hat{W}_n^T \xi_n s + s \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n \frac{1 - \exp(-v_n \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n s)}{1 + \exp(-v_n \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n s)}, \\ \dot{\hat{W}}_n = s \Gamma_n \xi_n - \sigma_n \Gamma_n \hat{W}_n, \\ \dot{\hat{\delta}}_n = \gamma_n |s| \bar{\phi}_n - \tau_n \gamma_n \hat{\delta}_n. \end{cases} \quad (35)$$

式中: $k_n > 0, v_n > 0, \sigma_n > 0, \tau_n > 0$ 为设计参数.

对 V_n 求导, 并将式 (33) 和实际控制律 u 代入, 在式 (34) 右边同时加减 $\dot{\zeta}_n$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq \\ & -k_n s^2 + \beta_n(x)g_n(x)N(\zeta_n)\dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \\ & |s|\hat{\delta}_n \bar{\phi}_n - s\hat{\delta}_n \bar{\phi}_n \frac{1 - \exp(-v_n \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n s)}{1 + \exp(-v_n \hat{\delta}_n \bar{\phi}_n s)} + \\ & \tilde{W}_n^T \Gamma_n^{-1} (\dot{\hat{W}}_n - s \Gamma_n \xi_n) + \gamma_n^{-1} \tilde{\delta}_n (\dot{\hat{\delta}}_n - \gamma_n |s| \bar{\phi}_n). \end{aligned} \quad (36)$$

将自适应律 \dot{W}_n 和 $\dot{\delta}_n$ 代入式 (36), 并由引理 3 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_n s^2 + \beta_n(x)g_n(x)N(\zeta_n)\dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \\ & \frac{1}{v_n} - \sigma_n \tilde{W}_n^T \hat{W}_n - \tau_n \tilde{\delta}_n \hat{\delta}_n. \end{aligned} \quad (37)$$

应用类似 Step 1 中的 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_n^* s^2 + \beta_n(x)g_n(x)N(\zeta_n)\dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n - \\ & \frac{\sigma_n}{2} \|\tilde{W}_n\|^2 - \frac{\tau_n}{2} \|\tilde{\delta}_n\|^2 + C_{n0} \leq \\ & -C_{n1}V_n + C_{n0} + (\beta_n(x)g_n(x)N(\zeta_n) + 1)\dot{\zeta}_n. \end{aligned} \quad (38)$$

式中: k_n^*, C_{n0}, C_{n1} 为正常数, 定义如下:

$$\begin{aligned} k_n^* &:= k_n, \quad C_{n0} := \frac{\sigma_n}{2} \|W_n^*\|^2 + \frac{\tau_n}{2} \|\delta_n^*\|^2 + \frac{1}{v_n}, \\ C_{n1} &:= \min \left\{ 2g_{n0}k_n^*, \frac{\sigma_n}{\lambda_{\max}(\Gamma_n^{-1})}, \tau_n \gamma_n \right\}. \end{aligned}$$

定义 $\varphi_n := C_{n0}/C_{n1}$, 对式 (38) 两边同乘 $e^{C_{n1}t}$, 再对 t 积分得

$$\begin{aligned} V_n(t) \leq & \varphi_n + [V_n(0) - \varphi_n]e^{-C_{n1}t} + \\ & e^{-C_{n1}t} \int_0^t [(\beta_n(x)g_n(x)N(\zeta_n) + 1)e^{C_{n1}\tau}] \dot{\zeta}_n d\tau \leq \\ & \varphi_n + V_n(0) + \\ & e^{-C_{n1}t} \int_0^t [(\beta_n(x)g_n(x)N(\zeta_n) + 1)e^{C_{n1}\tau}] \dot{\zeta}_n d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

将式 (39) 应用引理 2 可知, $\xi_n, V_n(t)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有界, 则 $s, \tilde{W}_n, \tilde{\delta}_n$ 在区间 $[0, t_f]$ 上半全局一致终结有界. 由 s 有界, 则 $e_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均有界; 由 e_n 有界, 则式 (26) 中的多余项 $e^{-C_{n-1,1}t} \int_0^t e_n^2 e^{C_{n-1,1}\tau} d\tau$ 亦有界. 因此, 如此应用引理 2, 向前 $(n-1)$ 次可知, $V_i(t), e_i, \tilde{W}_i, \tilde{\delta}_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 在区间 $[0, t_f]$ 均为半全局一致终结有界.

基于以上设计过程, 可以提出如下定理:

定理 1 在假设 1~假设 3 的条件下, 考虑一类具有未知控制增益函数及符号的不确定非线性系统 (1), 对于给定的有界初始条件, 基于反推滑模设计方法, 设计鲁棒自适应神经网络控制律和自适应律 (11), (24) 和 (35), 使得闭环系统所有信号半全局一致终结有界, 并且对于任意给定的 $\kappa > 0$ 和选择适当的设计参数, 跟踪误差最终收敛到 $\lim_{t \rightarrow \infty} |e| \leq \kappa$, 向量 $Z = [Z_1^T, Z_2^T, \dots, Z_n^T]$ 收敛到紧集 $\Omega_Z = \Omega_{Z_1} \cup \Omega_{Z_2} \cup \dots \cup \Omega_{Z_n} := \{Z \mid |e_i| \leq \rho_i, |s| \leq \rho_n, \|\tilde{W}_i\|^2 \leq \frac{2C_i}{\lambda_{\min}(\Gamma_i^{-1})}, \|\tilde{\delta}_i\|^2 \leq 2\gamma_i C_i, \bar{x}_{di} \in \Omega_{di}\}$. 其中 $\rho_i > 0, C_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 依赖于初始条件且可通过选择适当的设计参数进行调节.

证明 由式 (39) 应用引理 2 可知, 存在上界 c_{β_n} 为

$$\int_0^t |\beta_n(x)g_n(x)N(\zeta_n) + 1| \dot{\zeta}_n e^{-C_{n1}(t-\tau)} d\tau \leq c_{\beta_n}. \quad (40)$$

由式 (39) 和 (40) 可得

$$\frac{1}{2g_{n1}} s^2 \leq V_n(t) \leq \varphi_n + c_{\beta_n} + V_n(0) = C_n, \quad (41)$$

$$\|\tilde{W}_n\|^2 \leq \frac{2C_n}{\lambda_{\min}(\Gamma_n^{-1})}, \quad \|\tilde{\delta}_n\|^2 \leq 2\gamma_n C_n. \quad (42)$$

由式 (41) 和 (42) 可知 $V_n(t)$ 有界, 则 $s, \tilde{W}_n, \tilde{\delta}_n$ 有界. 由 s 有界, 则 $e_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均有界, 定义上界 c_{β_i} 为

$$\begin{aligned} \int_0^t |\beta_i(\bar{x}_i)g_i(\bar{x}_i)N(\zeta_i) + 1| \dot{\zeta}_i e^{-C_{i1}(t-\tau)} d\tau + \\ \int_0^t |e_{i+1}^2| e^{-C_{i1}(t-\tau)} d\tau \leq c_{\beta_i}. \end{aligned} \quad (43)$$

由式 (25), (26) 和 (43) 可得

$$\frac{1}{2g_{i1}} e_i^2 \leq V_i(t) \leq \varphi_i + c_{\beta_i} + V_i(0) = C_i, \quad (44)$$

$$\|\tilde{W}_i\|^2 \leq \frac{2C_i}{\lambda_{\min}(\Gamma_i^{-1})}, \quad \|\tilde{\delta}_i\|^2 \leq 2\gamma_i C_i. \quad (45)$$

由式 (44) 和 (45) 可知 $V_i, \tilde{W}_i, \tilde{\delta}_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 有界.

令 $\rho_i = \sqrt{2g_{i1}(\varphi_i + c_{\beta_i} + V_i(0))} = \sqrt{2g_{i1}C_i}, i = 1, 2, \dots, n$, 则有 $|e_i| \leq \rho_i, i = 1, 2, \dots, n-1, |s| \leq \rho_n$.

由 $e_1 = x_1 - y_d$ 和 y_d 有界, 可知状态 x_1 有界, 根据式 (11) 可知 α_1 为有界信号 $e_1, \tilde{W}_1, \tilde{\delta}_1$ 的函数, 则 α_1 有界; 又根据式 $e_2 = x_2 - \alpha_1$ 有界, 可知状态 x_2 有界, 以此类推, 闭环系统所有状态均有界.

由式 (4), (6) 和 (44) 可得

$$e_1^2 \leq 2g_{11} \int_0^{e_1} \sigma \beta_1(\sigma + y_d) d\sigma \leq 2g_{11} V_1 \leq 2g_{11} C_1. \quad (46)$$

注意到 $k_i, v_i, \sigma_i, \Gamma_i, \tau_i$ 和 Γ_i 为给定的设计参数, 因此对于任意给定的 $\kappa > 0$, 可以通过选择适当的设计参数使得对于所有 $t \geq t_0 + T$ 和正常数 T , 跟踪误差 $e = y - y_d = x_1 - y_d = e_1$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} |e| \leq \kappa$. \square

4 仿真算例

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 e^{-0.5x_1} + (1 + x_1^2)x_2 + 0.7x_1^2 \sin(1.5t), \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2 + [3 + \cos(x_1 x_2)]u + 0.5(x_1^2 + x_2^2) \sin^3 t, \\ y = x_1. \end{cases}$$

仿真中选取径向基函数为如下的高斯函数:

$$\xi_i(Z) = e^{-(Z - \mu_i)^T (Z - \mu_i) / \eta_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

径向基函数中心和宽度的选择极大地影响自适应神经网络控制器的性能, 已知均匀分布在 \mathbf{R}^n 维空间的规则网格的高斯径向基函数能够充分逼近紧解上的光滑函数^[14]. 因此, 仿真中选择 RBF 神经网络为:

$\hat{W}_1^T \xi_1(Z_1)$ 包含 $l_1 = 27$ 个节点, 中心 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, l_1)$ 均匀分布于 $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 4]$, 宽度 $\eta_i = 2 (i = 1, 2, \dots, l_1)$; $\hat{W}_2^T \xi_2(Z_2)$ 包含 $l_2 = 243$ 个节点, 中心 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, l_2)$ 均匀分布于 $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 4] \times [-6, 6] \times [-6, 6]$, 宽度 $\eta_i = 2 (i = 1, 2, \dots, l_2)$.

系统参考轨迹 $y_d = 0.5[\sin t + \sin(0.5t)]$, 初始状态 $x_0 = [0, 0]^T$. 选择系统设计参数 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}[0.2]$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_1 = \tau_2 = 0.5$, $k_1 = k_2 = 1$, $v_1 = v_2 = 10$, $c_1 = 2.5$, 神经网络权值初值 $\hat{W}_1(0), \hat{W}_2(0)$ 和自适应参数初值 $\hat{\delta}_1(0), \hat{\delta}_2(0), \zeta_1(0), \zeta_2(0)$ 在区间 $[-0.5, 0.5]$ 随机选取. 仿真结果如图 1~图 5 所示. 图 1 为状态变量 x_1, x_2 和跟踪误差 e 有界轨迹, 可以看出, 当 $t = 2s$ 左右时, 跟踪误差

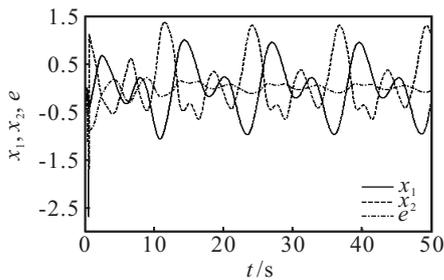


图 1 状态变量 x_1, x_2 和跟踪误差 e

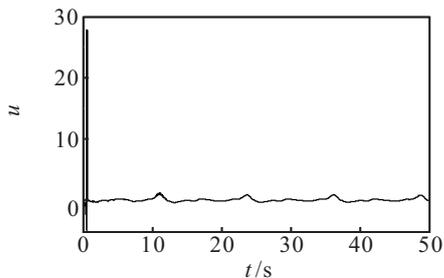


图 2 控制输入 u

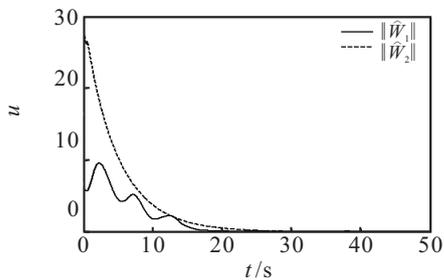


图 3 神经网络权值范数 $\|\hat{W}_1\|$ 和 $\|\hat{W}_2\|$

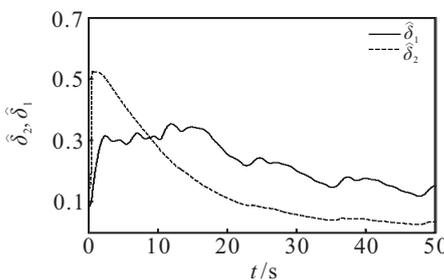


图 4 自适应参数 $\hat{\delta}_1$ 和 $\hat{\delta}_2$

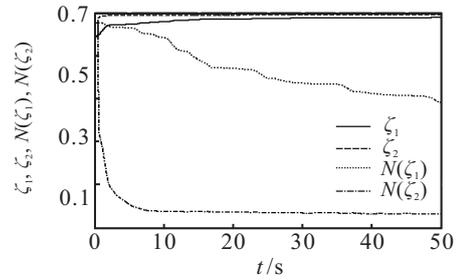


图 5 自适应参数 ζ_1, ζ_2 和 Nussbaum 增益 $N(\zeta_1), N(\zeta_2)$

达到稳态收敛, 且稳态跟踪误差较小, 达到了良好的跟踪效果. 图 2 为控制输入有界轨迹. 图 3 和图 4 分别为神经网络权值范数 $\|\hat{W}_1\|, \|\hat{W}_2\|$ 和自适应参数 $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2$ 有界轨迹. 图 5 为自适应参数 ζ_1, ζ_2 和 Nussbaum 增益 $N(\zeta_1), N(\zeta_2)$ 的有界轨迹.

5 结 论

本文基于反推滑模设计方法, 研究了一类具有未知控制增益函数及符号的不确定非线性系统自适应神经网络鲁棒跟踪问题. 结合 Nussbaum 增益技术和神经网络逼近能力处理未知控制增益函数及符号, 应用积分型 Lyapunov 函数避免了控制器奇异性问题, 并通过引入神经网络逼近误差和不确定干扰上界的自适应补偿项消除建模误差和不确定干扰的影响. 仿真结果表明, 本文所提控制方法对未知非线性和不确定干扰具有鲁棒性, 通过选择适当的设计参数, 跟踪误差可收敛到原点附近的一个小领域内.

参考文献(References)

- [1] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(11): 1241-1253.
- [2] Kristic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- [3] Kwan C, Lewis F L. Robust backstepping control of nonlinear systems using neural networks[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics-Part A, 2000, 30(6): 753-766.
- [4] Knohl T, Unbehauen H. ANNNAC-extension of adaptive backstepping algorithm with artificial neural networks[J]. IEE Proc of Control Theory and Applications, 2000, 147(2): 177-183.
- [5] Zhang Y P, Peng P Y, Jiang Z P. Stable neural controller design for unknown nonlinear systems using backstepping[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2000, 11(6): 1347-1360.