文章编号: 1001-0920 (2012) 02-0237-06

Delta 算子不确定系统的滑模变结构控制

张彩虹[1a,2], 刘云龙[1b,3], 高存臣[1], 唐述宏[1b,3], 孟 波[1b]

(1. 中国海洋大学 a. 数学科学学院，b. 信息科学与工程学院，山东 青岛 266100；2. 青岛大学自动化工程学院，山东 青岛 266071；3. 潍坊学院 信息与控制工程学院，山东 潍坊 261061)

摘 要: 研究 δ 算子系统滑模变结构控制的综合问题. 首先, 利用线性矩阵不等式方法给出了切换面存在的充分条件, 分析了 δ 算子变结构控制系统的到达条件, 将连续系统和离散系统统一到 δ 算子系统. 基于指数趋近律, 给出滑模变结构控制一般方法. 其次, 给出一类 δ 算子不确定系统的滑模控制器设计, 分析了准滑动模态的渐近稳定性, 使得系统具有良好的动态性能. 最后, 用一个仿真实例说明在采样周期取值非常小的前提下, 该方法设计的滑模变结构控制仍具有可行性和有效性.

关键词: δ 算子；变结构控制；趋近律；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Sliding mode variable structure control for uncertain Delta operator systems

ZHANG Cai-hong[1a,2], *LIU Yun-long*[1b,3], *GAO Cun-chen*[1], *TANG Shu-hong*[1b,3], *MENG Bo*[1b]

(1a. School of Mathematics Science，1b. College of Information Science and Engineering，Ocean University of China，Qingdao 266100，China；2. College of Automation Engineering，Qingdao University，Qingdao 266071，China; 3. College of Information and Control Engineering，Weifang University，Weifang 261061，China. Correspondent：GAO Cun-chen，E-mail：ccgao@ouc.edu.cn)

Abstract: The synthesis problem of designing sliding mode variable structure control(VSC) is considered for Delta operator systems. First of all, a sufficient condition for the existence of linear sliding surface in terms of linear matrix inequality(LMI) approach is given, and the proposed approach brings previous related conclusions of continuous systems and discrete-time systems into unified Delta operator systems. Sliding mode VSC strategy for Delta operator systems is obtained by employing exponential reaching law. Then, variable structure controller for a class of uncertain Delta operator systems with internal parameter perturbation and external disturbance is designed, and the asymptotic stability of quasi-sliding mode is proved. Good dynamic properties can be obtained at the same time. Finally, under the premise of the very small sampling period, the simulation result shows the feasibility and effectiveness of the proposed approach.

Key words: delta operator；variable structure control(VSC)；reaching law；linear matrix inequality(LMI)

1 引 言

δ 算子是一种新离散化方法, 可统一描述连续时间系统和离散时间系统[1]. δ 算子采样周期是显式参数, 便于观察和分析, 在有限字长特性、系数灵敏度等方面具有良好的数字特性[2]. 当采样周期趋于零时, δ 算子系统模型趋于相应的连续时间系统. δ 算子理论在自动控制和信号处理等领域取得了许多成果[3-4].

滑模变结构控制是一种非线性反馈控制, 在一定条件下对系统内部参数摄动和外部干扰均具有完全鲁棒性. 滑模变结构控制的理论取得了很大进展, 所研究领域已涉及离散系统[5]、滞后随机系统[6]、混沌系统[7]等复杂系统. 同时, 变结构控制广泛应用于卫星姿态控制[8]、经济系统[9]等实际问题. 趋近律方法是设计滑模变结构控制的常用方法, 文献 [5] 给出了设计离散变结构控制的指数趋近律方法, 实现简单, 鲁棒性强; [10] 修正了 [5] 的离散趋近律; [11] 给出了比例-等速-变速控制的趋近律, 理论分析系统最终稳定于原点, 但进入切换带之前抖振幅度较大; [12] 采

收稿日期: 2010-09-12；**修回日期:** 2011-04-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974025).

作者简介: 张彩虹(1981−), 女, 博士, 从事变结构控制、智能控制等研究；高存臣(1956−), 男, 教授, 博士生导师, 从事变结构控制、广义系统理论等研究.

取指数趋近律系数为时变参数, 提出了两个改进方案; [13]给出了离散时变趋近律, 改善了系统动态品质. 基于δ算子控制理论和滑模变结构控制的研究已经取得了一些成果: [14]研究了单输入δ算子系统变结构控制; [15]给出了有关δ算子系统的控制理论和H_∞控制; [16]设计了δ算子系统的全程滑模变结构控制; [17]研究了δ算子系统滑模变结构控制的状态观测器设计问题.

本文研究了一类含有系统内部参数摄动和外部干扰的δ算子滑模变结构控制系统综合问题. 首先, 利用LMI方法给出了δ算子滑模变结构控制系统切换面存在的充分条件, 并分析了δ算子滑模变结构控制系统的到达条件. 基于δ算子滑模变结构控制系统的指数趋近律, 给出了滑模变结构控制设计的一般方法. 其次, 给出了δ算子不确定系统滑模控制器设计, 分析了系统准滑动模态的渐近稳定性, 有效地削弱了系统抖振, 改善了系统动态品质. 最后, 用一个仿真实例说明了在采样周期取值非常小的前提下, 该方法设计的滑模变结构控制没有引起病态问题, 仍然是有效的.

2 δ算子系统描述及准备知识

δ算子也称增量差分算子, 定义如下:

$$\delta x(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t),\ T=0;\\ \dfrac{x(t+T)-x(t)}{T},\ T\neq 0.\end{cases}$$

其中: T为采样周期, $T=0$时为连续系统, $T\neq 0$时为离散系统. δ算子将连续系统和离散系统统一起来.

在控制理论中, δ算子又称Euler算子, 定义如下:

$$\delta=\frac{q-1}{T},$$

其中q为前向移位算子, 即$qx(k)=x(k+1)$.

考虑如下δ算子不确定系统:

$$\delta\bar{x}(k)=(\bar{A}+\Delta\bar{A}(k))\bar{x}(k)+\bar{B}(u(k)+d(k)).\qquad(1)$$

其中: $\bar{x}(k)\in\boldsymbol{R}^n$为状态向量; $u(k)\in\boldsymbol{R}^m$为控制输入; $d(k)\in\boldsymbol{R}^m$为外部干扰; $\bar{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\bar{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$为常值矩阵; $\Delta\bar{A}(k)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$为非匹配系统内部参数摄动.

规定: $P\geqslant Q$, 其中$P=(p_{ij})_{m\times n}$, $Q=(q_{ij})_{m\times n}$, 表示$p_{ij}\geqslant q_{ij}$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$.

假设 1 $(\bar{A}\ \bar{B})$可控, $\mathrm{rank}(\bar{B})=m<n$.

假设 2 外部干扰$d(k)$有界, 即存在$M>0$, 使得$\|d(k)\|<M$. 若无特别说明, $\|*\|$表示$*$的2-范数.

假设 3 非匹配项$\Delta\bar{A}(k)$有界, 满足$\Delta\bar{A}(k)=\bar{E}F(k)\bar{G}$. 其中: $F(k)\in\varGamma=\{F(k)|\ F^{\mathrm{T}}(k)F(k)\leqslant I\}$, $k=0,1,\cdots$, I为$n\times n$维单位矩阵; $\bar{E},\bar{G}$为适维常值矩阵. 假定所有元素Lebesgue可测, 且矩阵$\bar{A}$满秩.

由假设1知, 存在非奇异矩阵H, 使得$H\bar{B}=B=[0_{(n-m)\times m}\ B_m]^{\mathrm{T}}$, 其中$\mathrm{rank}(B_m)=m$. 利用非奇异变换$x(k)=H\bar{x}(k)$, 系统(1)可化为

$$\delta x(k)=Ax(k)+Bu(k)+g(k).\qquad(2)$$

其中: $g(k)\triangleq\Delta A(k)x(k)+Bd(k)$为不确定项, 而

$$\delta x(k)=\begin{bmatrix}\delta x_1(k)\\ \delta x_2(k)\end{bmatrix},\ x(k)=\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix},$$

$$A=H\bar{A}H^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\ A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0_{(n-m)\times m}\\ B_m\end{bmatrix},$$

$$\Delta A(k)=H\Delta\bar{A}(k)H^{-1}=\begin{bmatrix}\Delta A_{11}(k)&\Delta A_{12}(k)\\ \Delta A_{21}(k)&\Delta A_{22}(k)\end{bmatrix}.$$

令$E=H\bar{E},G=\bar{G}H^{-1}$, 有

$$\Delta A=EF(k)G,\ F^{\mathrm{T}}(k)F(k)\leqslant I.$$

系统(2)的标称系统如下:

$$\delta x(k)=Ax(k)+Bu(k).\qquad(3)$$

引理 1 (PBH判据[2]) 系统(3)可控的充分必要条件是, $\forall s\in\boldsymbol{C}$, 且$s$为有限数, $\boldsymbol{C}$为复数域, 有

$$\mathrm{rank}(sI-A\ B)=n.$$

引理 2 (Lyapunov间接法[2]) δ算子线性时不变系统$\delta x(k)=Ax(k)$渐近稳定的充分必要条件是, 所有极点在以$(-1/T,\mathrm{j}0)$为圆心, 以$1/T$为半径的左复平面的稳定圆域D_δ内.

引理 3 (Lyapunov方程[15]) 系统$\delta x(k)=Ax(k)$渐近稳定的充分必要条件是, 对给定的任一个对称正定矩阵Q, 都存在唯一的对称正定矩阵P, 满足如下Lyapunov方程:

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+TA^{\mathrm{T}}PA+Q=0.\qquad(4)$$

引理 4 (Lyapunov直接法[15]) δ算子非线性系统$\delta x(k)=f(x(k))$, 其中$f(0)=0$. 若存在正定函数$V(x(k))$, 对任意$x(k)$满足

$$\delta V(x(k))=\frac{V(x(k+1))-V(x(k))}{T}<0,\qquad(5)$$

则系统平衡态渐近稳定.

引理 5 (Schur补引理[18]) 假设$(n+m)$维对称矩阵F的分块表示为

$$F=\begin{bmatrix}A&B^{\mathrm{T}}\\ B&C\end{bmatrix}.$$

其中: $A=A^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{n\times n},B\in\boldsymbol{R}^{m\times n},C=C^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$. 若$C$非奇异, 则$F<0$的充分必要条件是$C<0$, $A-B^{\mathrm{T}}C^{-1}B<0$; 若$A$非奇异, 则$F<0$的充分必要条件是$A<0$, $C-B^{\mathrm{T}}A^{-1}B<0$.

3 滑模变结构控制综合问题

δ算子系统的滑模变结构控制设计可分为两步: 1) 选取切换函数$s(k)$, 使系统在切换带内的准滑动模

态渐近稳定; 2) 设计合适的滑模变结构控制律 $u(k)$, 保证从任意初始状态出发的系统运动轨线均能在有限时间内到达切换带内.

3.1 切换函数选取

在连续时间系统中, 切换函数一般选取为

$$s(x,t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda\right)\tilde{x},\ \ \lambda>0,$$

其中 $\tilde{x}$ 可以是误差向量或状态分量等. 通常取 $n=2$, $s(x,t)=\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x}$. 考虑标称系统 (3) 的滑模变结构控制, 相应地, 可选取切换函数

$$s(k)=Cx(k)=C_m x_1(k)+x_2(k). \tag{6}$$

其中: $C=[C_m\ I_{(m\times m)}], C_m\in \boldsymbol{R}^{m\times(n-m)}$. 切换面共有 m 个, 下面给出 δ 算子滑模变结构控制系统的准滑动模态定义.

设切换面 $S=\{x(k)|\ C_m x_1(k)+x_2(k)=0\}$; 切换带 $S_\Delta=\{x(k)|\ \|C_m x_1(k)+x_2(k)\|<\Delta\}$.

定义 1　从任意初态出发的系统运动轨线, 或者于有限时间内到达切换面, 并在其上滑动, 称之为理想准滑动模态; 或者于有限时间内到达切换带, 并在其内运动, 来回穿越切换面, 称之为非理想准滑动模态. 其数学表示: 存在正整数 N, 当 $k>N$ 时, 有

$$\begin{cases}\|C_m x_1(k)+x_2(k)\|<\Delta,\\ \mathrm{sgn}\delta s(k)=-\mathrm{sgn}s(k).\end{cases}$$

由切换面方程知, $x_2(k)=-C_m x_1(k)$, 得

$$\delta x_1(k)=(A_{11}-A_{12}C_m)x_1(k)\triangleq \mathring{A}x_1(k). \tag{7}$$

引理 6　若 $(\bar{A}\ \bar{B})$ 可控, 则 $(A_{11}\ A_{12})$ 可控.

证明　由引理 1 知, $\forall\lambda\in\boldsymbol{C}$, 且 λ 有限, 只需证明

$$\mathrm{rank}(\lambda I-A_{11}\ A_{12})=n-m.$$

由 $(\bar{A}\ \ \bar{B})$ 可控知, $\mathrm{rank}(\lambda I-\bar{A}\ \ \bar{B})=n$, 而

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}(\lambda I-\bar{A}\ \ \bar{B})=\\&\mathrm{rank}(\lambda I-H\bar{A}H^{-1}\ H\bar{B})=\\&\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_{n-m}-A_{11} & -A_{12} & 0\\ -A_{21} & \lambda I_m-A_{22} & B_m\end{bmatrix}=\\&\mathrm{rank}(\lambda I_{n-m}-A_{11}\ A_{12})+m.\end{aligned}$$

所以, $\mathrm{rank}(\lambda I-A_{11}\ A_{12})=n-m$. □

这表明选择合适的 C, 可使得系统 (7) 渐近稳定. 利用 LMI 方法, 给出满足极点配置要求的稳定切换面.

定理 1　系统 (7) 的极点全部配置到给定稳定圆域 D_δ 的充分条件是, 存在对称正定矩阵 P 和一般矩阵 O, 满足下面的 LMI:

$$\begin{bmatrix}-P & \mathring{A}_{12}^{\mathrm{T}}\\ \mathring{A}_{12} & -P\end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

其中 $\mathring{A}_{12}\triangleq T^2A_{11}P-T^2A_{12}O+(T+1)P$. 所求的切换面参数矩阵 $C=OP^{-1}$.

证明　给定稳定圆域 D_δ 在以 $(-1/T,\mathrm{j}0)$ 为圆心, 以 $1/T$ 为半径的左复平面内的圆盘内. 化简

$$\frac{\mathring{A}+\dfrac{1}{T}I}{\dfrac{1}{T}}=T\mathring{A}+I,$$

其中 $\mathring{A}$ 由式 (7) 给出. 而 Lyapunov 方程 (4) 等价于

$$(TA^{\mathrm{T}}+I)P(TA+I)-P+TQ=0. \tag{9}$$

由引理 2, 引理 3 知, 将式 (9) 中的 A 替换为 $T\mathring{A}+I$, 要保证系统 (7) 的所有极点位于稳定圆域 D_δ 内, 须满足

$$[T(T\mathring{A}+I)^{\mathrm{T}}+I]P[T(T\mathring{A}+I)+I]-P<0. \tag{10}$$

因 P 对称正定, 由 Schur 补引理, 得

$$\begin{bmatrix}-P^{-1} & [T^2\mathring{A}+(T+1)I]^{\mathrm{T}}\\ T^2\mathring{A}+(T+1)I & -P\end{bmatrix}<0. \tag{11}$$

用矩阵 $\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$ 左、右乘式 (11), 可得

$$\begin{bmatrix}-P & (T^2\mathring{A}P)^{\mathrm{T}}+(T+1)P\\ T^2\mathring{A}P+(T+1)P & -P\end{bmatrix}<0. \tag{12}$$

令 $O=CP$, 即得式 (8), 定理 1 得证. □

3.2 到达条件分析

连续滑模变结构控制系统基于不等式形式的到达条件一般为 $\dot{s}^{\mathrm{T}}(t)s(t)<0$, 由文献 [5] 分析, 将连续系统离散化后, 此到达条件不能保证系统准滑动模态具有良好的动态品质, 于是给出了基于等式形式的指数趋近律到达条件:

$$s(k+1)=(1-\mu T)s(k)-\varepsilon T\mathrm{sgn}s(k). \tag{13}$$

其中: $\varepsilon>0, 0<\mu T<1$. 本文从统一描述形式角度考虑, 给出 δ 算子滑模变结构控制系统的到达条件.

定理 2　对于系统 (3), 选取切换函数 (6), 若采用

$$u(k)=\begin{cases}u^+(k),\ s(k)>0;\\ u^-(k),\ s(k)<0.\end{cases}$$

这里 $u^+(k)\neq u^-(k)$. 则系统 (3) 平衡态渐近稳定的充分条件是

$$\delta s^{\mathrm{T}}(k)s(k)<-\frac{T}{2}\|\delta s(k)\|^2. \tag{14}$$

证明　选取正定函数

$$\begin{aligned}&V(x(k))=s^{\mathrm{T}}(k)s(k),\\&s^{\mathrm{T}}(k+1)s(k+1)=\\&(T\delta s(k)+s(k))^{\mathrm{T}}(T\delta s(k)+s(k))=\\&[I\ I]\begin{bmatrix}T\delta s^{\mathrm{T}}(k)\\ s^{\mathrm{T}}(k)\end{bmatrix}[T\delta s(k)\ s(k)]\begin{bmatrix}I\\ I\end{bmatrix}=\end{aligned}$$

$$[I\ I]\begin{bmatrix} T^2\delta s^{\mathrm T}(k)\delta s(k) & T\delta s^{\mathrm T}(k)s(k) \\ Ts^{\mathrm T}(k)\delta s(k) & s^{\mathrm T}(k)s(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ I\end{bmatrix}=$$
$$T^2\delta s^{\mathrm T}(k)\delta s(k)+T\delta s^{\mathrm T}(k)s(k)+$$
$$Ts^{\mathrm T}(k)\delta s(k)+s^{\mathrm T}(k)s(k).$$

由于

$$(\delta s^{\mathrm T}(k)s(k))^{\mathrm T}=s^{\mathrm T}(k)\delta s(k)=\delta s^{\mathrm T}(k)s(k),$$

则

$$\delta V(x(k)) = \frac{V(x(k+1))-V(x(k))}{T}= T\|\delta s(k)\|^2+2\delta s^{\mathrm T}(k)s(k).$$

由式 (14) 及以上分析, 可得 $\delta V(x(k)) < 0$. 由引理 4 知, 系统 (3) 平衡态渐近稳定. □

注 1 若 $T=0$, 此时 $\delta s(k)=\dot s(t)$, 式 (14) 即为连续滑模变结构控制系统的到达条件 $\dot s^{\mathrm T}(t)s(t)<0$.

注 2 若 $T\neq 0$, 将 $\delta=(q-1)/T$ 代入式 (14), 得移位算子 q 满足 $|q|<1$, 进一步可得离散滑模变结构控制系统的到达条件 $\|s(k+1)\|<\|s(k)\|$.

推论 1 在定理 2 的条件下, 系统 (3) 平衡态渐近稳定的充分条件是

$$\delta s^{\mathrm T}(k)s(k)<-\frac{(1-q)^2}{2T}\|s(k)\|^2. \tag{15}$$

其中: q 为移位算子, $|q|<1$. 式 (15) 称为 δ 算子滑模变结构控制系统的到达条件.

证明 因 $\|\delta s(k)\|^2=\left(\dfrac{q-1}{T}\right)^2\|s(k)\|^2$, 可得式 (14) 等价于式 (15). 由 $|q|<1$ 和定理 2 知, 若式 (15) 成立, 则可保证系统 (3) 平衡态渐近稳定. □

3.3 趋近律设计

趋近律是一种期望的滑模动态轨线, 自身不应有抖振. 由于系统中存在着各种不确定性, 这种理想滑动模态无法实现, 总会产生以抖振为主要特征的准滑动模态. 趋近律设计应满足变结构控制系统的到达条件. 因此它必须满足: 1) 有限时间可达切换面; 2) 趋近切换面. 根据式 (13), 给出 δ 算子系统的指数趋近律

$$\delta s(k)=-\mu s(k)-\varepsilon\mathrm{sgn}s(k). \tag{16}$$

要求 $\mu T<1$, 保证任意运动轨线首先趋近于切换面, 然后转为准滑动模态. 切换带带宽 $\varDelta=\varepsilon T$, T 越小, 趋近速度 $\delta s(k)|_{s(k)\approx 0}=\varepsilon$ 越小, 切换带带宽 $\varDelta$ 越小.

3.4 滑模控制器设计

定理 3 若 $(A_{11}\ A_{12})$ 可控, 则存在控制 $u(k)=L_1x_1(k)+L_2x_2(k)$, 使得系统 (3) 平衡态渐近稳定.

证明 $(A_{11}\ A_{12})$ 可控, 存在 $K_1\in\boldsymbol{R}^{m\times(n-m)}$, 得

$$\sigma(A_{11}+A_{12}K_1)\subset D_\delta, \tag{17}$$

其中 $\sigma(*)$ 表示矩阵 $*$ 的特征值集合. 令 $z(k)=x_2(k)-K_1x_1(k)$, 则系统 (3) 可化为

$$\begin{bmatrix}\delta x_1(k)\\ \delta z(k)\end{bmatrix}= \begin{bmatrix} A_{11}+A_{12}K_1 & A_{12}\\ \mathring{A}_{21} & \mathring{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ z(k)\end{bmatrix}+B_mu(k). \tag{18}$$

$$\mathring{A}_{21}\triangleq A_{21}+A_{22}K_1-K_1A_{11}-K_1A_{12}K_1,$$
$$\mathring{A}_{22}\triangleq A_{22}-K_1A_{12}.$$

设矩阵 K_2 的所有特征值均落入 D_δ 内. 取控制

$$\begin{aligned} u(k) &= -B_m^{-1}[\mathring{A}_{21}x_1(k)+(\mathring{A}_{22}-K_2)z(k)]=\\ &-B_m^{-1}(A_{21}-K_1A_{11}+K_2K_1)x_1(k)-\\ &B_m^{-1}(A_{22}-K_1A_{12}-K_2)x_2(k).\end{aligned} \tag{19}$$

将式 (19) 代入 (18), 得

$$\delta z(k)=K_2z(k). \tag{20}$$

由式 (17), (20) 知, 当 $k\to+\infty$ 时, $x_1(k)\to 0$, $z(k)\to 0$, $x_2(k)=z(k)+K_1x_1(k)\to 0$.

令

$$L_1=A_{21}-K_1A_{11}+K_2K_1,$$
$$L_2=A_{22}-K_1A_{12}-K_2,$$

则在控制 $u(k)=L_1x_1(k)+L_2x_2(k)$ 作用下, 系统 (3) 平衡态渐近稳定. □

定理 4 对于系统 (3), 若 $(A_{11}\ A_{12})$ 可控, 选取切换函数 (6), 则存在变结构控制律

$$\begin{aligned} u=&-B_m^{-1}[(C_mA_{11}+A_{21})x_1(k)+\\ &(C_mA_{12}+A_{22})x_2(k)+\mu s(k)+\varepsilon\mathrm{sgn}s(k)],\end{aligned} \tag{21}$$

使得系统 (3) 在有限时间内到达切换带实现滑模运动.

证明 将式 (21) 代入 $\delta s(k)=CAx(k)+CBu(k)$, 即得式 (16), 到达条件成立, 系统 (3) 在有限时间内到达切换带实现滑模运动. □

定理 5 对于系统 (2), 若 $(A_{11}\ A_{12})$ 可控, 选取切换函数 (6), 则在切换面 S 上, 系统 (2) 平衡态渐近稳定.

证明 在切换面 S 上, 有 $\delta s(k)=0$, 得等效控制 u_{eq} 为

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{eq}} = &-B_m^{-1}[(C_mA_{11}+A_{21})x_1(k)+\\ &(C_mA_{12}+A_{22})x_2(k)+Cg(k)].\end{aligned} \tag{22}$$

由 $(A_{11}\ A_{12})$ 可控, 存在矩阵 K_1, 使得式 (17) 成立. 令 $z(k)=x_2(k)-K_1x_1(k)$. 由 $\delta s(k)=0$, 知

$$\begin{aligned}\delta z(k)&=-C_m\delta x_1(k)-K_1\delta x_1(k)=\\ &-(C_m+K_1)(A_{11}-A_{12}C_m)x_1(k).\end{aligned} \tag{23}$$

因 $(A_{11}\ A_{12})$ 可控, 选取合适 C_m, 使得

$$\sigma(A_{11}-A_{12}C_m)\subset D_\delta. \tag{24}$$

令 $K_2=A_{11}-A_{12}C_m$, 代入式 (23), 得 $\delta z(k)=$

$K_2z(k)$. 由此得理想准滑动模态方程

$$\begin{cases}\delta x_1(k)=A_{11}x_1(k)+A_{12}x_2(k),\\ \delta z(k)=K_2z(k),\\ z(k)=x_2(k)-K_1x_1(k),\\ C_mx_1(k)+x_2(k)=0.\end{cases}\tag{25}$$

由定理 3 证明, 理想准滑动模态渐近稳定. □

下面利用指数趋近律设计 δ 算子系统 (2) 的滑模变结构控制. 由式 (2), (6), (16), 得滑模变结构控制律

$$\begin{aligned}u\ =\ &-B_m^{-1}[(C_mA_{11}+A_{21})x_1(k)+\\ &(C_mA_{12}+A_{22})x_2(k)+Cg(k)+\\ &\mu s(k)+\varepsilon\mathrm{sgns}(k)].\end{aligned}\tag{26}$$

式 (26) 含有不确定项, 控制律不能实现. 为使控制律 (26) 能够实现, 由假设 2 和假设 3 知

$$\begin{aligned}\|g(k)\|\ \leqslant\ &\|E\|\,\|F(k)\|\,\|Gx(k)\|+\|Bd(k)\|\leqslant\\ &\|E\|\,\|Gx(k)\|+\|B\|M.\end{aligned}\tag{27}$$

设计校正控制为

$$u_c=-B_m^{-1}(\|CE\|\,\|Gx(k)\|+\|C_mB_m\|M)\mathrm{sgns}(k),$$

将控制中不确定项 $-B_m^{-1}Cg(k)$ 替换为 u_c, 得

$$\begin{aligned}&u=\\ &-B_m^{-1}[(C_mA_{11}+A_{21})x_1(k)+\\ &(C_mA_{12}+A_{22})x_2(k)+(\|CE\|\,\|Gx(k)\|+\\ &\|C_mB_m\|M)\mathrm{sgns}(k)+\mu s(k)+\varepsilon\mathrm{sgns}(k)].\end{aligned}\tag{28}$$

定理 6　对于系统 (2), 在定理 5 条件下, 若满足假设 1∼假设 3, 则存在滑模变结构控制律 (28), 使得系统 (2) 在有限时间内到达切换带实现滑模运动.

证明　选取正定函数 $V(x(k))=s^{\mathrm{T}}(k)s(k)$, 将滑模变结构控制律 (28) 代入系统 (2), 得

$$\begin{aligned}\delta s(k)\ =\ &-\mu s(k)-\varepsilon\mathrm{sgns}(k)-(\|CE\|\,\|Gx(k)\|+\\ &\|C_mB_m\|M)\mathrm{sgns}(k)+Cg(k).\end{aligned}$$

由式 (27) 知, 当 $s(k)>0$ 时, 有

$$-(\|CE\|\,\|Gx(k)\|+\|C_mB_m\|M)+Cg(k)\leqslant 0;$$

当 $s(k)<0$ 时, 有

$$\|CE\|\,\|Gx(k)\|+\|C_mB_m\|M+Cg(k)\geqslant 0.$$

所以

$$\begin{cases}\delta s(k)\leqslant-\mu s(k)-\varepsilon\mathrm{sgns}(k),\ s(k)>0;\\ \delta s(k)\geqslant-\mu s(k)-\varepsilon\mathrm{sgns}(k),\ s(k)<0.\end{cases}\tag{29}$$

这表明控制律取式 (28) 时, 系统 (2) 在有限时间内到达切换带实现滑模运动. □

4 仿真实例

考虑 δ 算子不确定系统 (2), 仿真参数如下:

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ C=[5\ 1],$$

$$g(k)=[0\ \ 0.02+0.01\sin(2\pi k/50)]^{\mathrm{T}},\ T=0.001,$$

$$\varepsilon=2,\ \mu=6,\ x(0)=[0.05\ \ -0.02].$$

利用 Matlab 作出的仿真曲线如图 1 和图 2 所示.

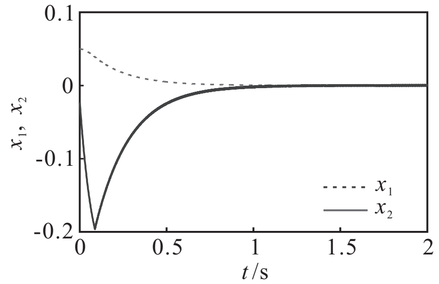

图 1　系统状态的变化曲线

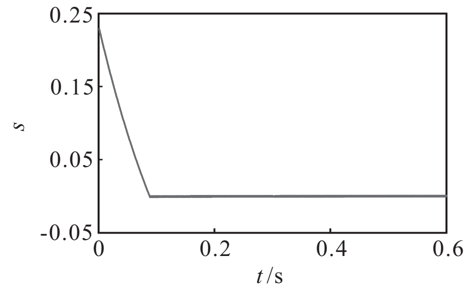

图 2　切换函数的变化曲线

将上述参数对应的连续控制系统, 进行 q 算子变换得到的离散滑模变结构控制系统的闭环极点趋近于单位圆周, 处于临界稳定状态, 引起了病态问题. 而进行 δ 算子变换得到的离散滑模变结构控制系统的闭环极点趋近于连续系统的闭环极点, 系统仍然稳定. 从仿真图中可以看出, 在采样周期取值非常小时, 采用指数趋近律 (16) 设计的 δ 算子滑模变结构控制系统原点稳定性好, 保持快速趋近, 系统抖振较小, 仍然具有较好的动态品质. 改变仿真实例中的不确定参数, 系统滑动模态过程几乎完全一样, 仅趋近过程有一定的偏差. 总之, 采用该方法设计的 δ 算子系统滑模变结构控制能够得到理想的仿真结果.

5 结　论

本文研究了一类 δ 算子不确定系统滑模变结构控制综合问题. 利用 LMI 方法给出了切换面存在的充分条件, 分析了 δ 算子变结构控制系统的到达条件. 基于 δ 算子系统的指数趋近律, 给出了滑模变结构控制一般方法, 分析了准滑动模态渐近稳定性, 提高了系统动态品质. 仿真实例说明了该方法的可行性. 另外, 具有滞后等情形下的 δ 算子系统滑模变结构控制有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Goodwin G C, Lozano Leal R, Mayne D Q, et al. Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control[J]. Automatica, 1986, 22(2): 199-207.

[2] Middleton R H, Goodwin G C. Digital control and estination: A unified approach[M]. NJ: Prentice Hall, 1990.

[3] Goodwin G C, Middleton R H, Poor H V. High-speed digital signal processing and control[J]. Proc of the IEEE, 1992, 80(2): 240-259.

[4] 张端金, 王忠勇, 吴捷. 系统控制和信号处理中的 Delta 算子方法[J]. 控制与决策, 2003, 18(4): 385-391.
(Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Survey on system control and signal processing using the delta operator[J]. Control and Decision, 2003, 18(4): 385-391.)

[5] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.

[6] Xing H L, Gao C C, Li D H. Sliding node variable structure control for parameter uncertain stochastic systems with time-varying delay[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 355(2): 689-699.

[7] Hosseinnia S H, Ghaderi R, Ranjbar N, et al. Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(5): 1637-1643.

[8] Patel T R, Kumar K D, Behdiman K. Variable structure control for satellite attitude stabilization in elliptic orbits using solar radiation pressure[J]. Acta Astronautica, 2009, 64(2): 359-373.

[9] Dadras S, Momeni H R. Control of a fractional-order economical system via sliding mode[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2010, 389(12): 2434-2442.

[10] Bartoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies[J].IEEE Trans on Industrial Electronics, 1998, 45(4): 633-637.

[11] 姚琼荟, 宋立忠, 温洪. 离散变结构控制系统的比例-等速-变速控制[J]. 控制与决策, 2000, 15(3): 329-332.
(Yao Q H, Song L Z, Wen H. Proportional-constant-variablerate control for discrete-time variable structure systems[J]. Control and Decision, 2000, 15(3): 329-332.)

[12] Zheng Y, Jing Y W. Approximation law for discrete-time variable structure control systems[J]. J of Control Theory & Applications, 2006, 23(3): 291-296.

[13] 刘涛, 刘贺平, 屈徽. 基于离散时变趋近律的准滑模控制[J]. 控制与决策. 2010, 25(5): 797-800.
(Liu T, Liu H P, Qu H. Quasi-sliding-mode control based on discrete time-variant reaching law[J]. Control and Decision, 2010, 25(3): 797-800.)

[14] 翟长连, 刘晓琰, 吴智铭. δ-算子描述离散系统的滑模变结构控制[J]. 上海交通大学学报, 1998, 32(8): 69-72.
(Zhai C L, Liu X Y, Wu Z M. Variable structure control discrete-time systems in Delta operator systems description[J]. J of Shanghai Jiaotong Uinversity, 1998, 32(8): 69-72.)

[15] 李惠光, 武波, 李国友, 等. Delta 算子控制及其鲁棒控制理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
(Li H G, Wu B, Li G Y, et al. Global Theory of Delta operator control and its robustness control[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005.)

[16] 徐勇, 陈增强, 袁著祉. Delta 算子系统的全程滑模变结构控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 686-693.
(Xu Y, Chen Z Q, Yuan Z Z. Global sliding-mode variable structure control for Delta operator formulated systems[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 686-693.)

[17] Yang H J, Xia Y Q, Shi P. Observer-based sliding mode control for a class of discrete systems via delta operator approach[J]. J of the Franklin Institute, 2010, 347(7): 1199-1213.

[18] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in systems and control theory[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

更 正

关于本刊第 27 卷第 1 期发表的 “基于平均速度的混合自适应粒子群算法” 一文的更正如下:

1. 公式 (1) 中, 变量 V_i 应为 v_i.
2. 公式 (7) 下面第二句话和 Step 5 以及 Step 7 中, $\bar{V}(k)$ 应为 $\bar{V}(k)/V_{\max}$.
3. 公式 (7) 和 (8) 中, r_3 和 r_5 应为 “各分量在 $[-1,1]$ 之间随机变化的 D 维向量”.