文章编号: 1001-0920 (2012) 02-0232-05

一类时滞分布参数切换系统的鲁棒容错控制

董学平, 温 锐, 刘红亮
(合肥工业大学 电气与自动化工程学院，合肥 230009)

摘 要: 研究一类时滞分布参数切换系统的容错控制问题. 当执行器失效或部分失效时, 建立了系统容错控制的数学模型. 通过构造 Lyapunov 函数, 运用 Green 公式和 Poincare 不等式, 获得了容错控制器存在的充分条件, 该条件用一组线性矩阵不等式表示, 从而将分布参数切换系统的容错控制问题转化为一组线性矩阵不等式的可行解问题. 最后通过数值算例, 验证了该方法的有效性.

关键词: 分布参数系统；切换系统；容错控制；时滞
中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust fault-tolerant control for a class of distributed parameter switched system with time-delay

DONG Xue-ping, *WEN Rui*, *LIU Hong-liang*
(School of Electrical Engineering and Automation，Hefei University of Technology，Hefei 230009，China. Correspondent：DONG Xue-ping，E-mail：hfdxp@126.com)

Abstract: Fault-tolerant control for a class of distribution parameter switched system with time-delay is studied. Under actuator failures or partial failures, the mathematics model of fault-tolerant control for its system is researched. By constructing Lyapunov functions and employing Green formula and Poincare inequality, a number of sufficient conditions for a class of distributed parameter switch systems(DPSS) with constant time-delay of fault-tolerant control are derived. These conditions are described by a group of linear matrix inequalities, so the design of fault-tolerant controllers of DPSS is transformed into the feasible problem of some certain LMI system. Finally, a numerical example illustrates the effectiveness of the proposed design method.

Key words: distributed parameter systems；switched systems；fault-tolerant control；time-delay

1 引 言

近年来, 切换系统容错控制问题的研究已取得了不少成果[1-4]. 但是它的研究是在集中参数系统环境下进行的, 而现实世界中的系统是分布参数系统. 随着对控制精度要求的不断提高, 讨论分布参数切换系统的容错控制问题更具有实际意义.

目前, 分布参数切换系统的控制问题的研究处于起步阶段. 文献 [5] 仅研究了由两个指数稳定子系统所组成的分布参数切换系统的稳定性问题. [6] 运用空间计划执行器和有限时间 LQR 最优控制方法研究了分布参数切换系统的最优控制问题. 现有相关文献所采用的研究方法与 [5-6]相同, 主要是依据算子半群理论或者矩阵范数理论[6-9], 所得出的结论难以应用[10]. 同时, 也难于建立容错系统模型, 致使很难开展分布参数系统容错控制问题的研究.

本文以实际工程系统中常见的偏微分方程为系统模型, 对系统的容错控制问题进行了研究.

2 问题描述

考虑如下具有 n 个子系统的分布参数切换系统:

$$\begin{aligned}&\partial W(x,t)/\partial t=\\&D_i\Delta W(x,t)+(A_i+\delta A_i)W(x,t)+\\&T_iW(x,t-\tau)+(B_i+\delta B_i)U(x,t),\\&\qquad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\tag{1}$$

其中: $(x,t)\in\Omega\times R^{+}$,$D_i>0$ 为常数; $A_i=(a_{ij})$, $T_i=(t_{ij})$, $B_i=(b_{ij})$ 为具有相应阶的常数矩阵; $\Omega=\{x, ||x||<l<\infty\}\in R^m$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 且 $\Omega>0$; 状态函数 $W(x,t)=\mathrm{col}(w_1(x,t),$

收稿日期: 2010-09-04；**修回日期:** 2011-04-29.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60974022).
作者简介: 董学平(1965−), 男, 副教授, 从事分布参数系统等研究；温锐(1986−), 女, 硕士生, 从事计算机控制系统的研究.

$w_2(x,t),\cdots,w_n(x,t)) \in R^n$, $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 为 Ω 上的 Laplace 扩散算子, 其边界条件满足

$$W(x,t) = \varphi(x,t),\ (x,t) \in \partial\Omega \times [-\tau,0], \quad (2)$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial n} = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times [-\tau,\infty), \quad (3)$$

或者

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial n} + C_iW(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times [-\tau,\infty). \quad (4)$$

C_i 为适当维数的矩阵, n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

对于子系统 i, δA_i 和 δB_i 为系统中的不确定实值矩阵, 且具有如下一般结构:

$$[\delta A_i, \delta B_i] = H_iF_i(t)[E_{1i}, E_{2i}]. \quad (5)$$

其中: H_i, E_1i, E_2i 为具有适当维数的常矩阵, $F_i(t)$ 为未知矩阵函数, 且满足

$$F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leqslant I. \quad (6)$$

对于子系统 i, 本文取反馈控制器为

$$U(x,t) = K_iW(x,t), \quad (7)$$

K_i 为具有相应阶的常数矩阵.

考虑到可能的执行器失效, 对于子系统 i 引入执行器连续故障矩阵 M_i, 其形式为[11-12]

$$M_i = \mathrm{diag}[m_{i1,}m_{i2},\cdots,m_{iq}].$$

记

$$\underline{M}_i = \mathrm{diag}[\underline{m}_{i1},\underline{m}_{i2},\cdots,\underline{m}_{iq}],$$

$$\overline{M}_i = diag[\overline{m}_{i1},\overline{m}_{i2},\cdots,\overline{m}_{iq}].$$

式中: $0 \leqslant \underline{m}_{ij} \leqslant m_{ij} \leqslant \overline{m}_{ij} \leqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant q)$, 显然, $\overline{M}_i$ 和 $\underline{M}_i$ 的对角元分别是矩阵 M_i 中相应元素的上、下界, 给定的子系统 $\underline{M}_i$ 和 $\overline{M}_i$ 是确定阵. 对于矩阵 M_i 中元素, 有

$$m_{ij} = \begin{cases} 0,\ \text{第}\ j\ \text{个执行器完全失效;} \\ (0,1),\ \text{第}\ j\ \text{个执行器部分失效;} \\ 1,\ \text{第}\ j\ \text{个执行器工作正常.} \end{cases}$$

在系统 (1) 中, 将 M_i 放在 $B_i+\delta B_i$ 和控制 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 之间, 这样, 含有执行器连续故障的控制器模型为

$$\boldsymbol{u}^f(x,t) = M_i\boldsymbol{u}(x,t).$$

记

$$M_{0i} = \mathrm{diag}[m_{0i1}, m_{0i2},\cdots,m_{0iq}],$$
$$m_{0ij} = (\underline{m}_{ij} + \overline{m}_{ij})/2;$$
$$J_i = \mathrm{diag}[j_{i1}, j_{i2},\cdots,j_{iq}],$$
$$j_{ij} = (\overline{m}_{ij} - \underline{m}_{ij})/(\overline{m}_{ij} + \underline{m}_{ij});$$
$$L_i = \mathrm{diag}[|l_{i1}|, |l_{i2}|,\cdots,|l_{iq}|],$$
$$l_{ij} = (m_{ij} - m_{0ij})/m_{0ij}.$$

容易验证

$$M_i = M_{0i}(I + L_i),\ L_i^{\mathrm{T}}L_i \leqslant J_i \leqslant I. \quad (8)$$

从式 (8) 可以看出, 对于子系统 i, 矩阵 M_{0i} 为确定阵, 矩阵 M_i 仅与 L_i 的变化有关. 本文讨论在允许的不确定矩阵 L_i 下, 切换系统 (1) 的稳定性问题. 此时, 包含执行器失效的闭环系统状态方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \ =\ & D_i\Delta W(x,t) + (A_{ci} + \delta A_{ci})W(x,t) + \\ & T_iW(x,t-\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$A_{ci} = A_i + B_iM_iK_i,$$
$$\delta A_{ci} = H_iF_i(t)(E_{1i} + E_{2i}M_iK_i).$$

边界条件为式 (3) 或 (4).

3　主要结论

引理 1 (Green 公式)[13]　设 $\Omega \subset R^n$ 为边界 $\partial\Omega$ 光滑的有界区域, $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $G \subset \Omega$ 为一光滑子域, 若 $u, v \in C^2(\bar{G})$, 则

$$\int_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x.$$

引理 2[14]　给定适当维数矩阵 Y, D, E, 其中 Y 是对称阵, 则有 $Y + DFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} < 0$, 对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得 $Y + \varepsilon DD^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E < 0$.

引理 3 (Poincare 不等式)[13]　设 $u \in C_0^1(\Omega)$, 且 Ω 包含在闭区域 Ω_1: $0 \leqslant x_i \leqslant l (i = 1,2,\cdots,n)$, 则有

$$\int_\Omega u^2(x)\mathrm{d}x \leqslant c\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\mathrm{d}x = c\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

其中 $c = l^2/n$.

定理 1　对于分布参数切换系统 (1), 如果存在正定矩阵 X,Q, 以及矩阵 W_i 和常数 $\alpha_i > 0$, $i = 1,2,\cdots,n$, 使得如下线性矩阵不等式组:

$$\begin{bmatrix} \varXi & T_i & X^{\mathrm{T}} & 0 & W_i^{\mathrm{T}} \\ T_i^{\mathrm{T}} & -Q & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ W_i & 0 & 0 & 0 & -\alpha_iI \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

有可行解, 其中 $\varXi = A_iX + (A_iX)^{\mathrm{T}} + B_iM_{0i}W_i + (B_iM_{0i}W)^{\mathrm{T}} + \alpha_iB_iM_{0i}M_{0i}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}$, 则系统 (1) 在边界条件 (2) 和 (3) 及状态反馈 (7) 下, 对所有允许的不确定故障矩阵 M_i 稳定, 且反馈增益矩阵 $K_i = W_iX^{-1}$.

证明　设 P 为正定矩阵, 对定理中的正定矩阵 Q, 取 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(t,W(x,t)) \ =\ & \int_\Omega W^{\mathrm{T}}(x,t)PW(x,t)\mathrm{d}x + \\ & \int_\Omega\int_{t-\tau}^{t} W^{\mathrm{T}}(x,\theta)QW(x,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

对于子系统 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$, 有

$$\dot V(t,W(x,t))=$$
$$\int_\Omega[\dot W^{\rm T}(x,t)PW(x,t)+W^{\rm T}(x,t)P\dot W(x,t)]{\rm d}x+$$
$$\int_\Omega W^{\rm T}(x,t)QW(x,t){\rm d}x-$$
$$\int_\Omega W^{\rm T}(x,t-\tau)QW(x,t-\tau){\rm d}x=$$
$$2D_i\int_\Omega W^{\rm T}(x,t)P\Delta W(x,t){\rm d}x+$$
$$\int_\Omega\begin{bmatrix}W(x,t)\\W(x,t-\tau)\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}\Pi & PT_i\\T_i^{\rm T}P & -Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W(x,t)\\W(x,t-\tau)\end{bmatrix}{\rm d}x,\tag{11}$$

其中

$$\Pi=PA_i+A_i^{\rm T}P+PB_iM_iK_i+ K_i^{\rm T}M_iB_i^{\rm T}P+Q.\tag{12}$$

利用引理1和边界条件(3)可得

$$\int_\Omega W^{\rm T}(x,t)P\Delta W(x,t){\rm d}x=$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_\Omega p_{ij}w_i(x,t)\Delta w_j(x,t){\rm d}x=$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p_{ij}\Big[\int_{\partial\Omega}w_i\frac{\partial w_j}{\partial n}{\rm d}s-\int_\Omega\nabla w_i\nabla w_j{\rm d}x\Big]=$$
$$-\int_\Omega\nabla^{\rm T}W(x,t)P\nabla W(x,t){\rm d}x.\tag{13}$$

由式(11)~(13)及切换系统Lyapunov方法知, 若

$$\begin{bmatrix}\Pi & PT_i\\T_i^{\rm T}P & -Q\end{bmatrix}<0,\tag{14}$$

则系统(1)在边界条件(2)和(3)及状态反馈(7)下, 在任意切换律下均稳定.

将式(12)代入(14), 并将左右两边同乘 ${\rm diag}\{P^{-1},I\}$, 且令 $X=P^{-1}$, $W_i=K_iX$, 即得

$$\begin{bmatrix}A_iX+XA_i^{\rm T}+B_iM_iW_i+(B_iM_iW_i)^{\rm T} & T_i\\T_i^{\rm T} & -Q\end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}X&0\\0&0\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}-Q&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X&0\\0&0\end{bmatrix}<0.$$

运用Schur补性质, 将 M_i 由式(8)代入并整理可得

$$\begin{bmatrix}\Sigma & T_i & X^{\rm T} & 0\\T_i^{\rm T} & -Q & 0 & 0\\X & 0 & -Q^{-1} & 0\\0&0&0&-I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_iM_{0i}\\0\\0\\0\end{bmatrix}L_i\Big[W_i\ \ 0\ \ 0\ \ 0\Big]+$$
$$\left\{\begin{bmatrix}B_iM_{0i}\\0\\0\\0\end{bmatrix}L_i\Big[W_i\ \ 0\ \ 0\ \ 0\Big]\right\}^{\rm T}<0,$$

其中

$$\Sigma=A_iX+(A_iX)^{\rm T}+B_iM_{0i}W_i+(B_iM_{0i}W_i)^{\rm T}.$$

由引理2知, 存在 $\alpha_i>0$, 使

$$\begin{bmatrix}\Sigma_1 & T_i & X^{\rm T} & 0\\T_i^{\rm T} & -Q & 0 & 0\\X & 0 & -Q^{-1} & 0\\0&0&0&-I\end{bmatrix}<0.$$

其中

$$\Sigma_1=A_iX+(A_iX)^{\rm T}+B_iM_{0i}W_i+(B_iM_{0i}W_i)^{\rm T}+ \alpha_iB_iM_{0i}M_{0i}^{\rm T}B_i^{\rm T}+\alpha_i^{-1}W_i^{\rm T}W_i.$$

即

$$\begin{bmatrix}\Xi & T_i & X^{\rm T} & 0\\T_i^{\rm T} & -Q & 0 & 0\\X & 0 & -Q^{-1} & 0\\0&0&0&-I\end{bmatrix}+\alpha_i^{-1}\begin{bmatrix}W_i^{\rm T}\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_i^{\rm T}\\0\\0\\0\end{bmatrix}^{\rm T}<0.$$

由Schur补性质可得式(10). 鉴于Schur补性质和引理2具有可逆性, 定理得证. □

注1 对式(14)进行上述处理是为了消除故障矩阵中的不确定性以及将其转化为线性矩阵不等式, 以便于运用Matlab中LMI工具箱求解. 证明过程中, $w_i\triangleq w_i(x,t)$, $w_j\triangleq w_j(x,t)$, p_{ij} 为矩阵 P 中 i 行 j 列元素.

对于具有边界条件(2)和(4), 有如下结论:

定理2 对于分布参数切换系统(1), 如果存在正定矩阵 X, Q, 以及矩阵 W_i 和常数 $\alpha_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 使得如下线性矩阵不等式组:

$$C_iX^{\rm T}+XC_i^{\rm T}>0,\tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}\Xi & T_i & X^{\rm T} & 0 & W_i^{\rm T}\\T_i^{\rm T} & -Q & 0 & 0 & 0\\X & 0 & -Q^{-1} & 0 & 0\\0&0&0&-I&0\\W_i&0&0&0&-\alpha_iI\end{bmatrix}<0\tag{16}$$

有可行解, 则系统(1)在边界条件(2)和(4)及状态反馈(7)下, 对所有允许的不确定故障矩阵 M_i 稳定, 且反馈增益矩阵 $K_i=W_iX^{-1}$.

证明 同定理1至式(12), 由引理1和式(4), 有

$$\int_\Omega W^{\rm T}(x,t)P\Delta W(x,t){\rm d}x=$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_\Omega p_{ij}w_i(x,t)\Delta w_j(x,t){\rm d}x=$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p_{ij}\Big[\int_{\partial\Omega}w_i\frac{\partial w_j}{\partial\mathbf n}{\rm d}s-\int_\Omega\nabla w_i\nabla w_j{\rm d}x\Big]=$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_{\partial\Omega}p_{ij}w_i\Big(-\sum_{k=1}^n c_{jk}^{(i)}w_k\Big){\rm d}s-$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_\Omega p_{ij}\nabla w_i\nabla w_j{\rm d}x=$$

$$-\int_{\partial\Omega} W^{\mathrm{T}}(x,t)PC_iW(x,t)\mathrm{d}s-$$
$$\int_{\Omega}\nabla^{\mathrm{T}}W(x,t)P\nabla W(x,t)\mathrm{d}x, \tag{17}$$

因此

$$\dot V(t,x(t))\leqslant$$
$$-2D_i\int_{\partial\Omega}W^{\mathrm{T}}(x,t)PC_iW(x,t)\mathrm{d}s+$$
$$\int_{\Omega}\begin{bmatrix}W(x,t)\\W(x,t-\tau)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Pi & PT_i\\T_i^{\mathrm{T}}P & -Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W(x,t)\\W(x,t-\tau)\end{bmatrix}\mathrm{d}x.$$

如果

$$PC_i+C_i^{\mathrm{T}}P>0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi & PT_i\\T_i^{T}P & -Q\end{bmatrix}<0, \tag{19}$$

则系统 (1) 在边界条件 (2) 和 (4) 及状态反馈 (7) 下是稳定的. 为便于 Matlab 求解, 对式 (18), (19) 进行与定理 1 相同的处理, 即得式 (15), (16). □

符号说明: 定理证明中 $c_{ij}^{(i)}$ 为矩阵 C_i 中 i 行 j 列元素, 其余记号同注 1.

为减少系统设计的保守性, 有如下结论:

定理 3 　对于分布参数切换系统 (1), 如果存在正定矩阵 X, Q, 以及矩阵 W_i 和常数 $\alpha_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 使得如下线性矩阵不等式组:

$$C_iX^{\mathrm{T}}+XC_i^{\mathrm{T}}>0, \tag{20}$$

$$Q-\frac{2mD_i\lambda_{\max}(X)}{l^2}>0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}\Xi & T_i & X^{\mathrm{T}} & 0 & W_i^{\mathrm{T}}\\ T_i^{\mathrm{T}} & -Q & 0 & 0 & 0\\ X & 0 & -\Big(Q-\dfrac{2mD_i\lambda_{\max}(X)}{l^2}\Big)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -I & 0\\ W_i & 0 & 0 & 0 & -\alpha_iI\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

有可行解, 其中 $\lambda_{\min}(X)$ 和 $\lambda_{\max}(X)$ 分别为矩阵 X 的最小、最大特征值, 则系统 (1) 在边界条件 (2) 和 (4) 及状态反馈 (7) 下, 对所有允许的不确定故障矩阵 M_i 稳定, 且反馈增益矩阵 $K_i=W_iX^{-1}$.

证明 　同定理 2 至式 (17), 由引理 3, 有

$$\int_{\Omega}\nabla^{\mathrm{T}}W(x,t)P\nabla W(x,t)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\lambda_{\min}(P)\int_{\Omega}\nabla^{\mathrm{T}}W(x,t)\nabla W(x,t)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{m\lambda_{\min}(P)}{l^2}\int_{\Omega}W^{\mathrm{T}}(x,t)W(x,t)\mathrm{d}t,$$

从而

$$\dot V(t,x(t))\leqslant$$
$$-2D_i\int_{\partial\Omega}W^{\mathrm{T}}(x,t)PC_iW(x,t)\mathrm{d}s-$$
$$\frac{2D_im\lambda_{\min}(P)}{l^2}\int_{\Omega}W^{\mathrm{T}}(x,t)W(x,t)\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\Omega}\begin{bmatrix}W(x,t)\\W(x,t-\tau)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Pi & PT_i\\T_i^{\mathrm{T}}P & -Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W(x,t)\\W(x,t-\tau)\end{bmatrix}\mathrm{d}x.$$

如果

$$PC_i+C_i^{\mathrm{T}}P>0, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi-\dfrac{2D_im\lambda_{\min}(P)}{l^2} & PT_i\\ T_i^{\mathrm{T}}P & -Q\end{bmatrix}<0, \tag{24}$$

则系统 (1) 在边界条件 (2) 和 (4) 及状态反馈 (7) 下稳定.

对式 (23) 左右两边同时乘 diag$\{P^{-1},I\}$, 且令 $X=P^{-1}$, 可得出式 (20) 成立.

对式 (24) 进行同样处理并代入式 (12), 得

$$\begin{bmatrix}\Pi_1 & T_i\\T_i^{\mathrm{T}} & -Q\end{bmatrix}<0.$$

其中

$$\Pi_1=A_iX+XA_i^{\mathrm{T}}+B_iM_iK_iX+XK_i^{\mathrm{T}}M_iB_i^{\mathrm{T}}+$$
$$X\Big(Q-\frac{2mD_i\lambda_{\min}(X^{-1})}{l^2}\Big)X,$$

注意到 $\lambda_{\min}(X^{-1})=\lambda_{\max}(X)$, 即

$$\begin{bmatrix}A_iX+XA_i^{\mathrm{T}}+B_iM_iK_iX+XK_i^{\mathrm{T}}M_iB_i^{\mathrm{T}} & T_i\\ T_i^{\mathrm{T}} & -Q\end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}X&0\\0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-\Big(Q-\dfrac{2mD_i\lambda_{\max}(X)}{l^2}\Big) & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X&0\\0&0\end{bmatrix}<0,$$

则令 $W_i=K_iX$, 由定理 3 的条件 (21), 运用 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix}\Theta & T_i & X^{\mathrm{T}} & 0\\ T_i^{\mathrm{T}} & -Q & 0 & 0\\ X & 0 & -\Big(Q-\dfrac{2mD_i\lambda_{\max}(X)}{l^2}\Big)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0,$$

其中

$$\Theta=A_iX+(A_iX)^{\mathrm{T}}+B_iM_iW_i+(B_iM_iW_i)^{\mathrm{T}}.$$

将 M_i 由式 (8) 代入, 进行与定理 1 相同的处理, 即得式 (22). □

4　算例分析

考虑由两个子系统组成的分布参数切换系统, 子系统为一维热传导问题, 在数学物理方程和热处理领域中具有广泛应用. 为此, 在系统 (1) 中, 取 $0\leqslant x\leqslant 1$, $W(x,t)=[w_1(x,t)\quad w_2(x,t)]^{\mathrm{T}}$, $Q=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$.

对于子系统 1, 取 $A_1=\begin{bmatrix}-2&0\\1&-3\end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}$, $C_1=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{bmatrix}$, $T_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $D_1=0.24$, 边界条件如式 (4).

对于子系统 2, 取 $A_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.8 & -1\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, $C_2=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}$, $T_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $D_2=0.34$, 边界条件如式 (4).

取 $\overline{M_i}=\mathrm{diag}[1,1]$, $\underline{M_i}=\mathrm{diag}[0,0]$, $i=1,2$, 则 $M_{01}=M_{02}=\mathrm{diag}[0.5,0.5]$, $J_1=J_2=I$, 从而故障矩阵 M_1, M_2 中元素可取 $[0,1]$ 间任意值. 当 $\alpha_1=\alpha_2=0.9$ 时, 不等式 (15) 和 (16) 有可行解, 从而满足定理 2 的条件.

利用 Matlab 的 LMI 工具箱, 可解得一个适合要求的反馈矩阵

$$K_1=\begin{bmatrix}-1.2732 & 1.0668\\ 1.9828 & -2.8849\end{bmatrix},$$

$$K_2=\begin{bmatrix}0.070872 & 0.29037\\ 0.32499 & 1.3806\end{bmatrix}.$$

5 结 论

本文运用切换系统的 Lyapunov 函数方法结合线性矩阵不等式, 研究了一类时滞分布参数切换系统的容错控制问题, 获得了对所有允许的不确定故障矩阵 M_i 系统稳定的充分条件. 该方法运用 Green 公式, 经过适当的数学处理, 将系统的容错控制问题转化为一组线性矩阵不等式的可行解问题, 大大降低了分布参数系统控制问题处理的难度. 本文方法在设计分布参数切换系统控制问题时, 结论很容易被检验, 为分布参数 (切换) 系统控制问题的研究提供了新途径.

参考文献(References)

[1] Wang R, Jin G, Zhao J. Robust fault-tolerant control for a class of switched nonlinear systems in lower triangular form[J]. Asian J of Control, 2007, 9(1): 68-72.

[2] 洪晓锋, 孙洪飞. 切换系统容错控制的研究[J]. 厦门大学学报, 2007, 46(2): 183-186.
(Hong X F, Sun H F. Study on fault-tolerant control of switched systems[J]. J of Xiamen University, 2007, 46(2): 183-186.)

[3] 赵军, 金刚. 一类不确定非线性切换系统的鲁棒容错控制[J]. 东北大学学报, 2004, 25(3): 209-211.
(Zhao J, Jin G. Robust fault-tolerant control for a class of uncertain switched nonlinear systems[J]. J of Northeastern University, 2004, 25(3): 209-211.)

[4] Rodrigues M, Theilliol D, Sauter D. Fault-tolerant control design for switched systems[C]. The 2nd IFAC Conf on Analysis and Design of Hybrid Systems. Italy, 2006: 223-228.

[5] Amol S. Stability of switching infinite-dimensional systems[J]. Automatica, 2005, 41(1): 75-78.

[6] Orest V I, Michael A D. Optimal control of switched distributed parameter systems with spatially scheduled actuators[J]. Automatica, 2009, 45(2): 312-323.

[7] 董学平, 王执铨. 一类分布参数脉冲切换系统的稳定性分析及仿真研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2008, 38(3): 261-265.
(Dong X P, Wang Z Q. Stability analysis and simulation study of a class of distributed parameter impulsive switched systems[J]. J of University of Science and Technology of China, 2008, 38(3): 261-265.)

[8] 董学平, 王执铨. 一类分布参数混合系统的稳定性分析[J]. 系统工程学报, 2008, 23(5): 617-621.
(Dong X P, Wang Z Q. Stability analysis of a class of distributed Parameter hybrid systems[J]. J of Systems Engineering, 2008, 23(5): 617-621.)

[9] 董学平, 王执铨. 分布参数切换系统的稳定性分析[J]. 信息与控制, 2006, 35(4): 503-507.
(Dong X P, Wang Z Q. Stability Analysis on Distributed Param eter Switched Systems[J]. Information and Control, 2006, 35(4): 503-507.)

[10] 罗毅平, 邓飞其. 不确定时滞分布参数系统鲁棒控制LMI方法[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 217-224.
(Luo Y P, Deng F Q. LMI-based approach of robust control for uncertain distributed parameter control systems with time-delay[J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(2): 217-224.)

[11] 王福忠, 姚波, 张嗣瀛. 线性系统区域稳定的可靠控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 835-839.
(Wang F Z, Yao B, Zhang S Y. Reliable control of regional stabilizability for linear systems[J]. Control Theory & Applications, 2004, 21(5): 835-839.)

[12] Xie S, Xie L, Wang Y, et al. Decentralised control of multi-machine power systems with guaranteed performance[J]. IEE Proc of Control Theory & Applications, 2000, 147(3): 355-365.

[13] 崔宝同, 楼旭阳. 时滞分布参数系统理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009: 8-12.
(Cui B T, Lou X Y. Theory and applications of distributed parameter systems with time-delay[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009: 8-12.)

[14] Yang Y, Yang G H, Soh Y C. Reliable control of discrete-time systems with actuator failure[J]. IEE Proc of Control Theory & Applications, 2000, 147(4): 428-432.)