第 27 卷 第 3 期
Vol. 27 No. 3

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 3 月
Mar. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 03-0419-06

一类非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波

严志国[1,2], 张国山[1]

(1. 天津大学 电气与自动化工程学院，天津 300072；2. 山东轻工学院 电气工程与自动化学院，济南 250353)

摘 要: 研究一类具有时变、有界干扰的非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波问题. 首先, 给出了非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波问题的定义; 其次, 通过构造 Lyapunov-Krasoviskii 函数, 并结合线性矩阵不等式 (LMI) 方法, 给出了非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波器存在的充分条件; 再次, 将该问题简化为具有 LMI 约束的优化问题, 并给出了相应的求解算法; 最后, 通过数值算例表明了所提出设计方法的有效性.

关键词: 非线性随机不确定系统；有限时间 H_∞ 滤波；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Finite-time H_∞ filtering for a class of nonlinear stochastic uncertain systems

YAN Zhi-guo[1,2], *ZHANG Guo-shan*[1]

(1. School of Electrical Engineering and Automation，Tianjin University，Tianjin 300072，China；2. School of Electrical Engineering and Automatation，Shandong Polytechnic University，Ji'nan 250353，China. Correspondent：YAN Zhi-guo，E-mail：yanzg500@sina.com)

Abstract: The finite-time H_∞ filtering problem for a class of nonlinear stochastic uncertain systems with norm bounded exogenous disturbance is considered. Firstly, the definition of finite-time H_∞ filtering of a class of nonlinear stochastic uncertain systems is given. Then, by constructing Lyapunov-Krasoviskii function and using linear matrix inequality approach, a sufficient condition for finite-time H_∞ filter of a class of nonlinear stochastic uncertain systems is presented. Furthermore, this problem is simplified to the optimization under the constraint of linear matrix inequality, the corresponding solving algorithm is given. Finally, an example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear stochastic uncertain systems；finite-time H_∞ filtering；linear matrix inequality(LMI)

1 引 言

近年来, 随机系统的 H_∞ 滤波问题越来越受到众多学者的关注, 已成为控制理论界热门的研究方向之一[1-3]. 文献 [1] 研究了一般连续时间线性随机系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题, 并以线性矩阵不等式的形式给出了 H_∞ 滤波器存在的充分必要条件, 同时给出了混合 H_2/H_∞ 滤波器设计方法. [2] 对线性随机系统 (连续和离散) 设计了降阶 H_∞ 滤波器, 给出了该滤波器存在的充分必要条件. [3] 以哈密尔顿-雅可比不等式的形式给出了一般的非线性连续时间随机系统 H_∞ 滤波器存在的充分条件, 并且利用 LMI 方法给出了一类非线性随机系统的 H_∞ 滤波器设计的数值算法. 然而, 目前对于这类问题的研究成果大部分是基于 Lyapunov 意义下的随机稳定性. 基于 Lyapunov 意义的稳定性是刻划系统无限时间上的渐近行为, 即稳态性能, 它并不反映系统的暂态性能. 但是, 在实际工业过程中, 除了系统的稳态性能外, 暂态性能有时尤其重要, 如要求控制系统的轨迹不能超过某一个给定的界限. 实际上, 在 Lyapunov 意义下的稳定系统可能具有很坏的暂态性能 (如振荡剧烈), 无法满足工业生产要求.

文献 [4-5] 针对解决系统的暂态性能问题, 首次提出了有限时间稳定性的概念, 并利用 Lyapunov 函数方法给出了该问题存在解的充分条件. 近年来, 线性矩阵不等式理论的发展促进了有限时间稳定性的研究. [6] 重新给出了有限时间稳定性的概念; [7] 又提出了使得闭环系统为有限时间有界的动态输出反馈控制器设计方法, 并以线性矩阵不等式的形式给出了

收稿日期: 2010-09-23；**修回日期:** 2011-03-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674019, 61074088).

作者简介: 严志国(1981–), 男, 博士生, 从事随机系统、广义系统的研究；张国山(1961–), 男, 教授, 博士生导师, 从事广义系统、非线性系统等研究.

充分条件. 随后, 有限时间稳定性的概念被推广到了随机系统[8]、Markov 跳变系统[9]等. 最近, [10] 进一步提出了有限时间 (c_1, c_2)-稳定性, 并给出了判别准则以及镇定控制器存在的充分条件. 然而, 对于随机伊藤系统, 基于有限时间稳定性的滤波问题还较为少见.

本文研究一类非线性随机不确定系统的有限时间 H_∞ 滤波问题, 即寻求一个滤波器使得误差系统是有限时间随机有界的, 并且满足从干扰输入到估计输出的增益小于一个给定的正常数. 以矩阵不等式的形式给出了非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波器存在的充分条件, 进一步说明了该充分条件与无限水平 H_∞ 滤波器存在的充分条件之间的关系.

2 问题描述

记号: A' 为矩阵或向量 A 的转置; $A > 0\,(A \geqslant 0)$ 为正定或半正定矩阵; $I_{n\times n}$ 为 n 阶单位矩阵; $\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$ 为矩阵的最大或最小特征值; $\mathrm{E}x(t)$ 为随机过程 $x(t)$ 的数学期望. $L_F^2([0,T],R^n) = \Big\{y(\cdot)$ 为定义在区间 $[0,T]$ 上, 关于 F_t 适应的、属于 R^n 且满足 $\mathrm{E}\int_0^T \|y(t)\|^2\mathrm{d}t < +\infty$ 的随机过程$\Big\}$.

考虑如下非线性随机不确定系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t) = [(A_0+\Delta A)x(t) + (B_0+\Delta B)v(t) + \\ \qquad f(x(t))+h(v(t))]\mathrm{d}t + (C_0+\Delta C)x(t)\mathrm{d}w_0(t), \\ \mathrm{d}y(t) = [A_1x(t) + B_1v(t)]\mathrm{d}t + C_1x(t)\mathrm{d}w_1(t), \\ z(t) = Mx(t).\end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统的状态; $v(t) \in L_F^2([0,T],R^n)$ 为外界干扰信号并且满足 $\mathrm{E}\int_0^T v'(s)v(s)\mathrm{d}s < d,\ d > 0$, $y(t) \in R^r$ 为量测输出信号; $z(t) \in R^m$ 为待估计输出; $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, M$ 为适当维数的常数矩阵; $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ 为范数一致有界的, 且满足如下匹配条件:

$$[\Delta A\ \ \Delta B\ \ \Delta C] = GF(t)[H_0\ \ H_1\ \ H_2],$$
$$F'(t)F(t) \leqslant I,\ \forall t \leqslant 0,$$

G, H_0, H_1, H_2 为适当维数的常数矩阵, $F(t)$ 的各个元素是 Lebesgue 可测的; $f(x(t))$ 和 $h(v(t))$ 为光滑函数且 $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, 同时存在 $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$ 满足

$$\begin{aligned}&\|f(x(t))\| \leqslant \kappa_1\|x(t)\|,\\ &\|h(x(t))\| \leqslant \kappa_2\|x(t)\|;\end{aligned} \tag{2}$$

$w_0(t)$, $w_1(t)$ 为定义于概率空间 (Ω, F, F_t, P) 上相互独立的、一维标准 Brown 运动, 有

$$F_t = \sigma\{(w_0(s),\ w_1(s)) :\ 0 \leqslant s \leqslant t\}.$$

取如下形式的滤波器方程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\widehat{x}(t) = A_f\widehat{x}(t) + B_f\mathrm{d}y(t),\\ \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0,\\ \widehat{z}(t) = M_f\widehat{x}(t).\end{cases} \tag{3}$$

其中: $\widehat{x}(t) \in R^n$, $\widehat{z}(t) \in R^m$; A_f, B_f, M_f 为待定的适当维数的矩阵.

令状态误差 $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, 由系统 (1) 和滤波器 (3), 得到滤波状态误差方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}e(t) = \\ &[(A_0+\Delta A - B_fA_1 - A_f)x(t) + A_fe(t) + \\ &(B_0+\Delta B - B_fB_1)v(t) + f(x(t)) + h(v(t))]\mathrm{d}t + \\ &(C_0+\Delta C)x(t)\mathrm{d}w_0 - B_fC_1x(t)\mathrm{d}w_1.\end{aligned}$$

令 $\tilde{z}(t) = z(t) - \widehat{z}(t)$, $\tilde{x}(t) = [x'(t)\ \ e'(t)]$, 得到滤波误差系统的增广系统如下:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\tilde{x}(t) = [\tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}v(t) + \tilde{E}f(\tilde{x}(t)) + \\ \qquad \tilde{F}h(v(t))]\mathrm{d}t + \tilde{C}\tilde{x}(t)\mathrm{d}w_0 + \tilde{D}\tilde{x}(t)\mathrm{d}w_1,\\ \tilde{z}(t) = \tilde{M}\tilde{x}(t).\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0+\Delta A & 0 \\ (A_0+\Delta A) - B_fA_1 - A_f & A_f\end{bmatrix},$$
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0+\Delta B \\ B_0+\Delta B - B_fB_1\end{bmatrix},$$
$$f(\tilde{x}(t)) = \begin{bmatrix} f(x(t)) \\ f(e(t))\end{bmatrix},\ \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0+\Delta C & 0 \\ C_0+\Delta C & 0\end{bmatrix},$$
$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_fC_1 & 0\end{bmatrix},\ \tilde{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix},$$
$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix},\ \tilde{M} = \begin{bmatrix} M - M_f & M_f\end{bmatrix}.$$

定义 1[9] 系统 (4) $(v(t) = 0)$ 关于 (c_1, c_2, T, R) 是有限时间随机稳定的, 如果

$$\tilde{x}'(0)R\tilde{x}(0) \leqslant c_1 \Rightarrow E\tilde{x}'(t)R\tilde{x}(t) < c_2,\ \forall t \in [0,T].$$

其中: $c_1 > 0, c_2 > c_1, R > 0, T > 0$.

定义 2[9] 系统 (4) 关于 (c_1, c_2, T, R, d) 是有限时间随机有界的, 如果

$$\tilde{x}'(0)R\tilde{x}(0) \leqslant c_1 \Rightarrow E\tilde{x}'(t)R\tilde{x}(t) < c_2,\ \ \forall t \in [0,T].$$

其中: $c_1 > 0, c_2 > c_1, R > 0, T > 0$.

注 1 从定义 1 和定义 2 可以看出, 有限时间随机稳定是有限时间随机有界的特殊情况 $(v(t) = 0)$.

下面给出本文要研究的有限时间 H_∞ 滤波问题. 给定一个正数 γ, 设计滤波器 (3) 使得:

1) 滤波误差增广系统 (4) 是有限时间随机有界的;

2) 在 0 初始条件下, 估计输出 $\tilde{z}(t)$ 满足下列约束

条件:

$$\mathrm{E}\int_0^T \tilde{z}'(t)\tilde{z}(t)\mathrm{d}t < \gamma^2\mathrm{E}\int_0^T v'(t)v(t)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

注 2 仅考虑条件 2), 即为有限水平 H_∞ 滤波问题[11]. 由于没有考虑滤波误差系统瞬态响应, 可能导致有限水平 H_∞ 滤波器在实际中不能应用. 例如在电子线路系统中, 可能由于滤波误差系统产生的瞬态响应过大, 致使系统中电子元件损坏. 条件 1) 考虑了滤波误差系统在给定时间段上的瞬态响应. 将两者相结合的意义是: 既考虑了滤波误差系统在给定时间段上的响应小于某个给定的值, 又考虑了滤波误差系统对外界干扰的抑制效果.

3 主要结果

本文将解决系统 (1) 有限时间 H_∞ 滤波问题, 并给出充分条件. 为此, 先给出如下引理.

引理 1 如果存在标量 $\alpha \geqslant 0$ 和 $\gamma > 0$, 及正定矩阵 Q, 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} - \alpha\tilde{Q} & \tilde{Q}\tilde{B} \\ * & -\gamma^2 I + \kappa_2^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(Q)}\mathrm{e}^{\alpha T}[\lambda_{\max}(Q)c_1 + \gamma^2 d] < c_2, \tag{7}$$

则滤波误差增广系统 (4) 关于 (c_1, c_2, T, R, d) 是有限时间随机有界的. 其中: $\tilde{Q} = R^{1/2}QR^{1/2}$, $\Pi_{11} = \tilde{A}'\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{Q}\tilde{C} + \tilde{D}'\tilde{Q}\tilde{D} + \tilde{Q}\tilde{E}\tilde{E}'\tilde{Q} + \kappa_1^2 I + \tilde{Q}\tilde{F}\tilde{F}'\tilde{Q}$.

证明 设 $Q > 0$ 是式 (6) 和 (7) 的解, 取 Lyapunov 函数 $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{x}(t)$, 设式 (4) 的无穷小生成元为 $\mathcal{L}$[12], 有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}V(\tilde{x}(t)) = \\
&[\tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}v(t) + \tilde{E}f(\tilde{x}(t)) + \\
&\tilde{F}h(v(t))]'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + \tilde{x}'(t)\tilde{Q}[\tilde{A}\tilde{x}(t) + \\
&\tilde{B}v(t) + \tilde{E}f(\tilde{x}(t) + \tilde{F}h(v(t))] + \\
&[C\tilde{x}(t)]'\tilde{Q}[C\tilde{x}(t)] + \tilde{x}'(t)\tilde{D}'\tilde{Q}\tilde{D}\tilde{x}(t) = \\
&\tilde{x}'(t)\tilde{A}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + v'(t)\tilde{B}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + \\
&f'(\tilde{x}(t)\tilde{E}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + h'(v(t))\tilde{F}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + \\
&\tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{B}v(t) + \\
&\tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{E}f(\tilde{x}(t)) + \tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{F}h(v(t)) + \\
&\tilde{x}'(t)\tilde{C}'\tilde{Q}\tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{x}'(t)\tilde{D}'\tilde{Q}\tilde{D}\tilde{x}(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

根据不等式

$$MF(t)N + N'F'(t)M' \leqslant MM' + N'N,$$

得

$$\begin{aligned}
&f'(\tilde{x}(t))\tilde{E}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + \tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{E}f(\tilde{x}(t)) \leqslant \\
&\tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{E}\tilde{E}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + f'(\tilde{x}(t))f(\tilde{x}(t)),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&h'(v(t))\tilde{F}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + \tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{F}h(v(t)) \leqslant \\
&\tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{F}\tilde{F}'\tilde{Q}\tilde{x}(t) + h'(v(t))h(v(t)).
\end{aligned} \tag{10}$$

由式 (2) 得

$$\begin{aligned}
&f'(\tilde{x}(t))f(\tilde{x}(t)) \leqslant \kappa_1^2\tilde{x}'(t)\tilde{x}(t), \\
&h'(v(t))h(v(t)) \leqslant \kappa_2^2 v'(t)v(t).
\end{aligned} \tag{11}$$

将式 (9) 和 (11) 代入 (8), 可得到

$$\mathcal{L}V(\tilde{x}(t)) \leqslant \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \tilde{Q}\tilde{B} \\ * & \kappa_2^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} = &\tilde{A}'\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{Q}\tilde{C} + \tilde{D}'\tilde{Q}\tilde{D} + \\
&\tilde{Q}\tilde{E}\tilde{E}'\tilde{Q} + k_1^2 I + \tilde{Q}\tilde{F}\tilde{F}'\tilde{Q}.
\end{aligned}$$

由式 (6) 和 (12), 可得到

$$\mathcal{L}V(\tilde{x}(t)) < \alpha V(\tilde{x}(t)) + \gamma^2 v'(t)v(t),$$

对上式两边从 0 到 T 积分, 然后取数学期望, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}V(\tilde{x}(t)) < &V(\tilde{x}(0)) + \alpha\int_0^t \mathrm{E}V(x(s))\mathrm{d}s + \\
&\gamma^2\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式, 得到

$$\mathrm{E}V(\tilde{x}(t)) < V(\tilde{x}(0))\mathrm{e}^{\alpha t} + \gamma^2\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s.$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}V(\tilde{x}(t)) = \mathrm{E}\tilde{x}'(t)R^{1/2}QR^{1/2}\tilde{x}(t) \geqslant \\
&\qquad \lambda_{\min}(Q)\mathrm{E}\tilde{x}(t)R\tilde{x}(t), \\
&V(\tilde{x}(0))\mathrm{e}^{\alpha t} = \tilde{x}'(0)R^{1/2}QR^{1/2}\tilde{x}(0)\mathrm{e}^{\alpha t} \leqslant \\
&\lambda_{\max}(Q)\tilde{x}'(0)R\tilde{x}(0)\mathrm{e}^{\alpha t} \leqslant \lambda_{\max}(Q)c_1\mathrm{e}^{\alpha t}, \\
&\gamma^2\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s \leqslant \gamma^2\mathrm{e}^{\alpha T}d,
\end{aligned}$$

则有

$$\mathrm{E}\tilde{x}'(t)R\tilde{x}(t) \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)}\mathrm{e}^{\alpha T}[\lambda_{\max}(Q)c_1 + \gamma^2 d].$$

考虑到条件 (7), 易得 $\mathrm{E}\tilde{x}'(t)R\tilde{x}(t) < c_2, t \in [0, T]$. □

引理 2 如果存在两个标量 $\alpha \geqslant 0$ 和 $\gamma > 0$ 及正定矩阵 Q, 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} - \alpha\tilde{Q} & \tilde{Q}\tilde{B} & \tilde{M}' \\ * & -\gamma^2 I + \kappa_2^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(Q)}\mathrm{e}^{\alpha T}[\lambda_{\max}(Q)c_1 + \gamma^2 d] < c_2, \tag{14}$$

则滤波误差增广系统 (4) 关于 (c_1, c_2, T, R, d) 是有限时间随机有界的, 并且满足条件 (5). 其中

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q} = R^{1/2}QR^{1/2}, \\
&\Pi_{11} = \tilde{A}'\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{Q}\tilde{C} + \tilde{D}'\tilde{Q}\tilde{D} + \\
&\qquad \tilde{Q}\tilde{E}\tilde{E}'\tilde{Q} + k_1^2 I + \tilde{Q}\tilde{F}\tilde{F}'\tilde{Q}.
\end{aligned}$$

证明 注意到 $\begin{bmatrix} \tilde{M}'\tilde{M} & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \geqslant 0$, 因此式 (13) 意味着

$$\begin{bmatrix} \varPi_{11}-\alpha\tilde{Q} & \tilde{Q}\tilde{B} \\ * & -\gamma^2 I+\kappa_2^2 I \end{bmatrix}<0.$$

根据引理1, 式(13)和(14)保证了误差系统(4)是有限时间随机有界的. 下面证明式(14)能保证(7)成立. 设 $Q>0$ 是式(13)和(14)的解, 取Lyapunov函数 $V(\tilde{x}(t))=\tilde{x}'(t)\tilde{Q}\tilde{x}(t)$, 设式(4)的无穷小生成元为 $\mathcal{L}$, 利用与引理1相同的方法, 得到

$$\mathcal{L}V(\tilde{x}(t))\leqslant\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ v(t)\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\varPi_{11} & \tilde{Q}\tilde{B}\\ * & \kappa_2^2 I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ v(t)\end{bmatrix}. \tag{15}$$

由式(13)和(15)得到

$$\mathcal{L}V(\tilde{x}(t))<\alpha V(\tilde{x}(t))+\gamma^2 v'(t)v(t)-\tilde{z}'(t)\tilde{z}(t).$$

在0初始条件下, 对上式从0到 T 积分, 然后取数学期望, 根据Gronwall不等式, 得到

$$\mathrm{E}V(\tilde{x}(t))<\mathrm{e}^{\alpha t}\Big[\gamma^2\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s-\mathrm{E}\int_0^t\tilde{z}'(s)\tilde{z}(s)\mathrm{d}s\Big].$$

由上式可知

$$\mathrm{E}\int_0^t\tilde{z}'(s)\tilde{z}(s)\mathrm{d}s<\gamma^2\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s. \qquad \square$$

基于上面的引理, 下面给出本文的主要定理.

定理 1 给定干扰抑制水平 $\gamma>0$, 如果存在一个标量 $\alpha\geqslant 0$ 和正定矩阵 $\tilde{Q}_{11}$ 和 $\tilde{Q}_{22}$, 以及矩阵 X, Y, M_f 满足下列矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}\varLambda_{11} & \varLambda_{12} & \varLambda_{13} & \varLambda_{14}\\ * & \varLambda_{22} & 0 & 0\\ * & * & \varLambda_{33} & 0\\ * & * & * & \varLambda_{44}\end{bmatrix}<0, \tag{16}$$

$$I<\mathrm{diag}\{Q_{11},Q_{22}\}<\lambda I, \tag{17}$$

$$\lambda c_1+\gamma^2 d-c_2\mathrm{e}^{-\alpha T}<0. \tag{18}$$

其中

$$\varLambda_{11}=\begin{bmatrix}\varPsi_{11} & \varPsi_{12}\\ * & \varPsi_{22}\end{bmatrix},\ \varLambda_{12}=\begin{bmatrix}\kappa_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\varLambda_{13}=\begin{bmatrix}C_0'\tilde{Q}_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\varLambda_{14}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\tilde{Q}_{11}G & 0 & 0 & C_1'X & \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{22}\\ \sqrt{2}\tilde{Q}_{22}G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{bmatrix}\tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11}B_0 & \varPsi_{1,15}\\ \tilde{Q}_{22} & \varPsi_{2,14} & M_f'\end{bmatrix},$$

$$\varLambda_{22}=\begin{bmatrix}-I & \tilde{Q}_{11}G\\ * & -I\end{bmatrix},\ \varLambda_{33}=\begin{bmatrix}-\tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{22}G\\ * & -I\end{bmatrix},$$

$$\varLambda_{44}=\mathrm{diag}\{-I\ \ -\tilde{Q}_{22}\ \ -\tilde{Q}_{11}\ \ -\tilde{Q}_{22}\ \ -I\rightarrow$$
$$\leftarrow -I\ \ -I\ \ \varPsi_{14,14}\ \ -I\},$$

$$\tilde{Q}_{11}=R^{1/2}Q_{11}R^{1/2},\ \tilde{Q}_{22}=R^{1/2}Q_{22}R^{1/2},$$

$$\varPsi_{11}=H_0'H_0+2H_2'H_2+A_0'\tilde{Q}_{11}+\tilde{Q}_{11}A_0-\alpha\tilde{Q}_{11},$$

$$\varPsi_{12}=A_0'\tilde{Q}_{22}-A_1'X'-Y',\ \varPsi_{1,15}=M'-M_f',$$

$$\varPsi_{22}=Y'+Y-\alpha\tilde{Q}_{22},\ \varPsi_{2,14}=\tilde{Q}_{22}B_0-YB_1,$$

$$\varPsi_{14,14}=H_1'H_1-\gamma^2 I+\kappa_2^2 I,$$

则系统(4)是有限时间随机有界的, 并且在0初始条件下满足式(5). 此时, 滤波器方程为

$$\begin{cases}\mathrm{d}\widehat{x}(t)=\tilde{Q}_{22}^{-1}X\widehat{x}(t)+\tilde{Q}_{22}^{-1}Y\mathrm{d}y(t),\\ \widehat{x}(0)=\widehat{x}_0,\\ \widehat{z}(t)=M_f\widehat{x}(t).\end{cases} \tag{19}$$

证明 取 $\tilde{Q}=\mathrm{diag}\{\tilde{Q}_{11},\ \tilde{Q}_{22}\}$, 把 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$, $\tilde{M}$ 代入式(13), 根据Schur补, 式(13)等价于

$$\begin{bmatrix}\varTheta_{11} & \varTheta_{12}\\ * & \varTheta_{22}\end{bmatrix}<0. \tag{20}$$

其中

$$\varTheta_{11}=\begin{bmatrix}\varSigma_{11} & \varSigma_{12}\\ * & \varSigma_{22}\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_{12}=\begin{bmatrix}\kappa_1 & \varSigma_{14} & \varSigma_{15} & 0 & -C_1'B_f\tilde{Q}_{22} & \tilde{Q}_{11}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{bmatrix}\tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11} & \varSigma_{1,11} & \varSigma_{1,12}\\ 0 & \tilde{Q}_{22} & \varSigma_{2,11} & M_f'\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_{22}=\mathrm{diag}\{-I\ \ -\tilde{Q}_{11}\ \ -\tilde{Q}_{22}\ \ -\tilde{Q}_{11}\ \ -\tilde{Q}_{22}$$
$$-I\ \ -I\ \ -I\ \ \varSigma_{11,11}\ \ -I\},$$

$$\varSigma_{11}=A_0'\tilde{Q}_{11}+\tilde{Q}_{11}A_0+\Delta A'\tilde{Q}_{11}+\tilde{Q}_{11}\Delta A-\alpha\tilde{Q}_{11},$$

$$\varSigma_{12}=A_0'\tilde{Q}_{22}+\Delta A\tilde{Q}_{22}-A_1'B_f'\tilde{Q}_{22}-A_f'\tilde{Q}_{22},$$

$$\varSigma_{14}=C_0'\tilde{Q}_{11}+\Delta C'\tilde{Q}_{11},\ \varSigma_{15}=C_0'\tilde{Q}_{22}+\Delta C'\tilde{Q}_{22},$$

$$\varSigma_{1,11}=\tilde{Q}_{11}B_0+\tilde{Q}_{11}\Delta B,\ \varSigma_{1,12}=M'-M_f',$$

$$\varSigma_{22}=A_f'\tilde{Q}_{22}+\tilde{Q}_{22}A_f-\alpha\tilde{Q}_{22},$$

$$\varSigma_{2,11}=\tilde{Q}_{22}B_0+\tilde{Q}_{22}\Delta B-\tilde{Q}_{22}B_fB_1,$$

$$\varSigma_{11,11}=-\gamma^2 I+\kappa_2^2 I.$$

为了处理不确定项, 把式(20)分成两部分: 一部分不含不确定项, 记为 Z; 另一部分只含不确定项, 记为 Z_1, 因此式(20)变为

$$Z+Z_1=Z+TFR+R'F'T'<0.$$

根据不等式

$$MF(t)N+N'F'(t)M'\leqslant MM'+N'N,$$

得

$$Z+TFR+R'F'T'<Z+TT'+R'R.$$

其中

$$Z=\begin{bmatrix}\varGamma_{11} & \varGamma_{12}\\ * & \varSigma_{22}\end{bmatrix},\ Z_1=\begin{bmatrix}\varUpsilon' & \mathbf{0}_{10\times 12}'\end{bmatrix}',$$

$$T=\mathrm{diag}\{H_0'\ \ 0\ \ \tilde{Q}_{11}G\ \ \tilde{Q}_{22}G\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ H_1'\ \ 0\},$$

$$R=\begin{bmatrix}\varDelta\\ \mathbf{0}_{10\times 12}\end{bmatrix},\ \varGamma_{11}=\begin{bmatrix}\varXi_{11} & \varXi_{12}\\ * & \varSigma_{22}\end{bmatrix},$$

$$\varGamma_{12}=\begin{bmatrix}\kappa_1 & C_0'\tilde{Q}_{11} & C_0'\tilde{Q}_{22} & 0 & -C_1'B_f\tilde{Q}_{22}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{bmatrix}\tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11}B_0 & \varXi_{1,12}\\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{22} & \varXi_{2,11} & M_f'\end{bmatrix},$$

$$\varXi_{11}=A_0'\tilde{Q}_{11}+\tilde{Q}_{11}A_0-\alpha\tilde{Q}_{11},$$

$$\varXi_{12}=A_0'\tilde{Q}_{22}-A_1'B_f'\tilde{Q}_{22}-A_f'\tilde{Q}_{22},$$

$$\varXi_{2,11}=\tilde{Q}_{22}B_0-\tilde{Q}_{22}B_fB_1,$$

$$\varUpsilon=\begin{bmatrix}\Delta A'\tilde{Q}_{11}+\tilde{Q}_{11}\Delta A & \Delta A'\tilde{Q}_{22} & 0 & \Delta C'\tilde{Q}_{11}\\ \tilde{Q}_{22}'\Delta A & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{bmatrix}\Delta C'\tilde{Q}_{22} & \mathbf{0}_{1\times5} & \tilde{Q}_{11}\Delta B & 0\\ 0 & \mathbf{0}_{1\times5} & \tilde{Q}_{22}\Delta B & 0\end{bmatrix},$$

$$\varDelta=\begin{bmatrix}\tilde{Q}_{11}G & 0 & H_2' & H_2' & \mathbf{0}_{1\times6} & \tilde{Q}_{11} & 0\\ \tilde{Q}_{22}G & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times6} & \tilde{Q}_{22}G & 0\end{bmatrix},$$

经整理得

$$Z+TT'+R'R=\begin{bmatrix}\varPhi_{11} & \varPhi_{12}\\ * & \varPhi_{22}\end{bmatrix}.\tag{21}$$

其中

$$\varPhi_{11}=\begin{bmatrix}\varOmega_{11} & \varOmega_{12}\\ * & \varSigma_{22}\end{bmatrix},$$

$$\varPhi_{12}=\begin{bmatrix}\kappa_1 & C_0'\tilde{Q}_{11} & C_0'\tilde{Q}_{22} & 0 & -C_1'B_f\tilde{Q}_{22}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{bmatrix}\tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{11}B_0 & \varOmega_{1,12}\\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{22} & \varXi_{2,11} & M'_f\end{bmatrix},$$

$$\varPhi_{22}=\mathrm{diag}\{\varOmega_{33}\ \varOmega_{44}\ -\tilde{Q}_{22}\ -\tilde{Q}_{11}\ -\tilde{Q}_{22}\rightarrow$$

$$\leftarrow -I\ -I\ -I\ \varOmega_{11,11}\ -I\},$$

$$\varOmega_{11}=\varXi_{11}+H_0'H_0+2\tilde{Q}_{11}GG'\tilde{Q}_{11}+2H_2'H_2,$$

$$\varOmega_{12}=\varXi_{12}+2\tilde{Q}_{11}GG'\tilde{Q}_{22},\ \varOmega_{1,12}=M'-M_f',$$

$$\varOmega_{33}=\tilde{Q}_{11}GG'\tilde{Q}_{11}-I,\ \varOmega_{44}=\tilde{Q}_{22}GG'\tilde{Q}_{22}-\tilde{Q}_{11},$$

$$\varOmega_{11,11}=H_1'H_1-\gamma^2I+\kappa_2^2I.$$

从上述证明过程可看出, 如果式 (21) 小于 0, 则式 (20) 必成立. 令 $X=\tilde{Q}_{22}A_f$, $Y=\tilde{Q}_{22}B_f$, 由 Schur 补, 式 (21) 可化为 (16). 另一方面, 式 (17) 和 (18) 意味着 (14) 成立, 根据引理 2, 显然有

$$\mathrm{E}\int_0^t\tilde{z}'(s)\tilde{z}(s)\mathrm{d}s<\gamma^2\mathrm{E}\int_0^t v'(s)v(s)\mathrm{d}s.\qquad\Box$$

注 3 　若当 $\alpha=0$ 且没有条件 (17) 和 (18), 则定理 1 退化为无限时间 H_∞ 滤波器存在的充分条件, 即式 (16) 能保证滤波误差增广系统 (4) 是均方渐近稳定的, 且满足

$$\mathrm{E}\int_0^\infty\tilde{z}'(s)\tilde{z}(s)\mathrm{d}s<\gamma^2\mathrm{E}\int_0^\infty v'(s)v(s)\mathrm{d}s.$$

若将本文的系统模型换作文献 [1] 的系统模型, 则可得到一致的结果.

注 4 　注意到定理 1 不是线性矩阵不等式, 然而一旦确定 α, 则可化为线性矩阵不等式问题处理.

算法 1 　定理 1 中条件 (16)~(18) 的求解算法.

Step 1: 给定 R, T, c_1 和 d.

Step 2: 利用线性搜索算法, 如果能够发现一系列 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 使得式 (16)~(18) 有可行解, 则转至 Step 3; 否则, 转至 Step 7.

Step 3: 令 $i=1$, 取 α_i.

Step 4: 解下列优化问题:

$$\min_{\mathrm{s.t.}(16)\sim(18)} c_2,$$

$$\min_{\mathrm{s.t.}(16)\sim(18)} \gamma^2.$$

Step 5: 令 $i=i+1$, 若 $i+1>n$, 则转至 Step 6; 否则, $\alpha_i=\alpha_{i+1}$, 转至 Step 4.

Step 6: 该问题有解, 打印数据, 停止.

Step 7: 该问题无解, 停止.

注 5 　在算法 1 中, 可通过搜索确定 α 的范围.

4 数值算例

考虑系统 (1) 的系数矩阵如下:

$$A_0=\begin{bmatrix}-2 & 0.7\\ 0.1 & -5\end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix}-0.3\\ -0.5\end{bmatrix},\ C_0=\begin{bmatrix}-0.4 & 0.1\\ 0 & -0.5\end{bmatrix},$$

$$f(x(t))=\begin{bmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}+\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\ \sin\sqrt{x_1^2+x_2^2}\end{bmatrix},\ d=1,\ T=1,\ R=I,$$

$$h(v)=\begin{bmatrix}0.5\sin v_1\\ 0.5\sin v_2\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}3 & 1.2\\ 0.6 & 1.5\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0.4\\ -0.25\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.4\\ 0.1 & -1.2\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}-0.05\\ 0.15\end{bmatrix},\ H_0=\begin{bmatrix}-0.05\\ 0.2\end{bmatrix}',\ H_1=-0.03,$$

$$H_2=[-0.01\ 0.04],\ M=[-1\ 1],\ F'(t)F(t)\leqslant I,$$

$$x(0)=[-0.7\ 0.6]',\ \kappa_1=1.5,\ \kappa_2=0.7,\ c_1=1.$$

首先, 利用定理 1, 在没有条件 (17) 和 (18) 的情况下, 令 $\alpha=0$, 此时线性矩阵不等式 (16) 无解, 说明系统 (1) 不存在无限水平 H_∞ 滤波器. 利用算法 1, 得到 c_2 与 α 以及 γ 与 α 的关系如图 1 所示.

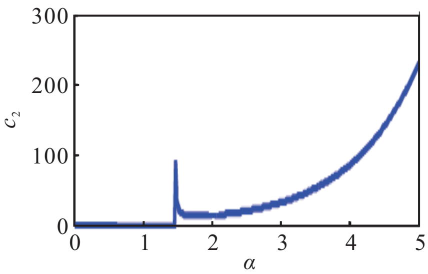

图 1 　$\alpha\in[0,5]$ 时 c_2 的最小值曲线

图 1 表示当 $\alpha\in[0,5]$ 时 c_2 的最小值曲线, 图 2

表示当 $\alpha \in [0,5]$ 时 γ 的最小值曲线. 从图 1 和图 2 可以看出, 当 $\alpha > 1.48$ 时问题才有解, 且当 $\alpha = 1.78$ 时, c_2 的最小上界为 13.256 2, 此时对应的 γ 值为 1.013 6. 由图 2 可见, γ 随着 α 的增大而减小. 图 1 和图 2 为如何选择适合条件的有限时间 H_∞ 滤波器参数提供了方法.

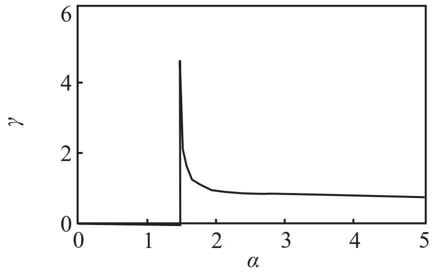

图 2 $\alpha \in [0,5]$ 时 γ 的最小值曲线

下面分析具体适合给定条件的有限时间 H_∞ 滤波问题. 给定 $\gamma = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 20$, $d = 1$, $T = 1$, $R = I$, 选择 $\alpha = 2$, 根据定理 1 得到

$$\lambda = 1.6242,\ Q_{11} = \begin{bmatrix} 1.2923 & 0.0066 \\ 0.0066 & 1.4010 \end{bmatrix},$$

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} 1.0728 & -0.0437 \\ -0.0437 & 1.2863 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.1879 & 0.4267 \\ 0.4267 & 0.1173 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -1.9796 & -0.4922 \\ -0.4922 & -2.9166 \end{bmatrix}.$$

因此, 有限时间 H_∞ 滤波器的参数为

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.1889 & 0.4020 \\ 0.3381 & 0.1048 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} -1.8634 & -0.5520 \\ -0.4460 & -2.2862 \end{bmatrix},$$

$$M_f = [-0.8357\ \ 0.0773].$$

设 $F(t) = I$, 外部干扰 $v(t) = \sin t$, 系统 (1) 的初值为 $x_0(0) = 0.7$, $x_2(0) = -0.6$, 滤波系统的初值 $\widehat{x}_1(0) = 0.7$, $\widehat{x}_2(0) = -0.6$. 图 3 是估计误差 $\tilde{z}(t) = z(t) - \widehat{z}(t)$ 的仿真曲线, 图 4 为 $E\tilde{x}'(t)R\tilde{x}(t)$ 随时间变化曲线. 由图 3 和图 4 可见, 只要 $\tilde{x}'(0)R\tilde{x}(0) \leqslant 1$, 则滤

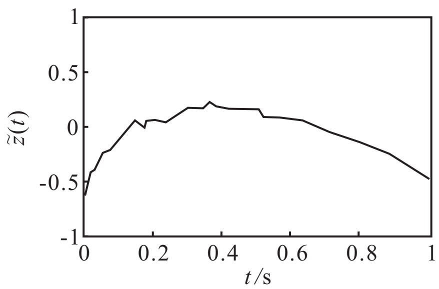

图 3 误差 $\tilde{z}(t)$ 的曲线

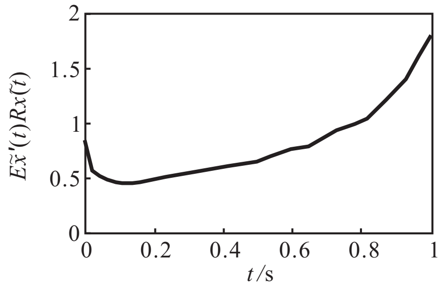

图 4 $E\tilde{x}'(t)R\tilde{x}(t)$ 随时间变化曲线

波误差系统 (4) 是有限时间随机有界的, 且满足条件 (5).

5 结 论

本文研究了非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波问题. 首先给出了非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波问题的定义; 然后, 利用矩阵变换方法, 给出了非线性随机不确定系统有限时间 H_∞ 滤波器存在的充分条件, 这个条件可以退化为具有线性矩阵不等式约束的优化问题, 并给出了优化数值求解算法. 仿真算例表明了所提供方法的可行性. 另外, 如何将本文的结果应用到其他线性或非线性随机系统模型有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Gershon E, Limebeer D J N, Shaked U. Robust H_∞ filtering of stationary continuous-time linear systems with stochastic uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(11): 1788-1793.

[2] Xu Sheng-yuan, Chen Tong-wen. Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50 (12): 2998-3007.

[3] Zhang Wei-hai, Chen Bor-sen, Tseng Chung-Shi. Robust H_∞ filtering for nonlinear stochastic systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2005, 53(2): 589-598.

[4] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of IRE Int Convention Record. New York, 1961, 4: 83-87.

[5] Weiss Infante L E. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12(1): 54-59.

[6] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite time control of linear system subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.

[7] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite time stabilization via dynamic output feedback[J]. Automatica, 2006, 42(2): 337-342.

[8] Zhang Wei-hai, An Xiu-ying. Finite-time control of linear stochastic systems[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2008, 4(3): 687-694.

(下转第430页)