

文章编号: 1001-0920(2012)02-0167-08

信号灯控制的多阶段决策模型及其前向动态规划算法

王岚君^a, 赵燕佳^b, 李进源^a, 张 颢^a, 王希勤^a

(清华大学 a. 电子工程系, b. 智能与网络化系统研究中心, 北京 100084)

摘要: 为研究路口交通信号灯的实时最优控制问题, 提出一种以最小化等待时间为目标的多阶段决策模型. 该模型利用最短绿灯和红灯时间的结构特征, 通过合理选择系统状态和控制变量压缩了模型规模, 进而提出了前向动态规划算法以高效得到最优解. 数值实验显示, 相比于固定时长的周期性控制可以节省路口车辆的等待时间; 对比基于混合整数规划的求解方法, 可以提高求解效率, 满足实时控制的要求.

关键词: 交通信号灯控制; 多阶段决策模型; 动态规划; 混合整数规划

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Multi-stage decision model for signal control problems and its forward dynamic programming algorithm

WANG Lan-jun^a, ZHAO Yan-jia^b, LI Jin-yuan^a, ZHANG Hao^a, WANG Xi-qin^a

(a. Department of Electronic Engineering, b. Center for Intelligent and Networked Systems Lab, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: WANG Lan-jun, E-mail: wanglanjun@tsinghua.org.cn)

Abstract: The real-time signal control problem of traffic intersections is studied, and a multi-stage decision model is proposed to minimize the waiting time. The model takes advantages of the structure of the minimum green and red time, which significantly reduces the model scale by properly choosing the system states and control actions. Additionally, a forward dynamic programming algorithm is developed, which can efficiently obtain the optimal solutions. Numerical results show that the waiting time can be reduced in comparison with the fixed-time periodic control policy, and computation time can be saved in comparison with the mixed integer programming, which can satisfy the real-time control requirement.

Key words: intersection signal control; multi-stage decision model; dynamic programming; mixed integer programming

1 引言

随着监测、通讯、以及控制技术的不断进步, 交通路口信号灯的实时控制问题得到了人们越来越多的重视^[1]. 高效的信号灯控制策略对于减少交通拥堵、提高运输效率起着至关重要的作用. 传统的研究是基于宏观交通流理论, 针对多路口的中央控制问题建立优化模型, 对于实时的交通流信息通常没有充分利用^[2]. 随着计算机技术的发展与普及, 针对单一路口的分散式控制问题得到了长足发展, 其优势在于可以充分利用从监测系统或者预测系统中获得的实时交通流信息, 对单一路口的信号灯作出自适应的调整与优化^[3-5].

本文针对这种单一路口的实时交通信号灯控制问题展开研究. 这一研究的难点包括两个方面, 即交

通系统的复杂动态特性带来的建模困难以及实时控制对算法计算效率的严格要求. 文献[6]针对这一问题建立了基于状态空间的最优控制模型, 将交通路口车辆等待时间作为优化的目标函数, 并提出了一种启发式算法. 但是正如文献[3,6]所指出的, 这一研究的局限性在于其模型的非线性导致最优解无法在允许的时间范围内得到.

在文献[6]的基础上, 本文对这一问题进行了深入研究, 主要创新点包含以下3个方面: 1) 本文把文献[6]中的非线性模型进行了线性化处理^[7-8], 得到了线性混合整数规划模型, 从而解决了原有非线性模型无法求解的困难. 2) 本文提出了一种等价的多阶段决策模型, 不同于已有研究, 这一模型充分利用了信号灯控制问题中最短绿灯和红灯时间的结构特征, 通过

收稿日期: 2010-09-25; 修回日期: 2011-01-26.

基金项目: 国家863计划专项经费项目(2006AA11Z113).

作者简介: 王岚君(1983-), 女, 博士生, 从事智能交通建模与控制等研究; 王希勤(1968-), 男, 教授, 从事无线电定位和检测系统、交通流检测与控制系统等研究.

合理地选择系统状态变量和控制变量,压缩了模型规模. 3) 针对这一多阶段决策模型,本文进而提出了前向动态规划算法^[9-10],可以高效求解这一交通信号灯控制问题,得到最优解. 数值实验显示,对比于固定时长的周期性控制,本文的优化结果可以节省路口车辆的等待时间;对比于线性化处理后的混合整数规划模型,本文提出的多阶段决策模型及其前向动态规划算法可以提高求解效率,从而满足实时控制的要求.

2 基于混合整数规划的数学模型

本文的系统参数如下:

M : 路口交通流总股数,它是指:交叉路口处的车流按照其通过路口时行驶方向的不同可分为不同的流,这些流的总目被称该路口的交通流总股数^[6],例如,典型十字路口,在不考虑右转的情况下有 8 股交通流.

N : 决策时间窗口的总长度,例如选择 4 min 的总时间窗,单位时间长度取 0.5 s,则 $N = 480$.

$A_{m,n}$: 第 m 股交通流在时间段 n 内到达的车辆数目,这一值可以基于上游路口的信息采集系统预测得到,具体的预测方法参见文献[1],本文假设这一预测值已知.

D_m : 第 m 股交通流在单位时间内可放行的最大车辆数.

$P_{i,j}$: 如果对应于两股交通流 i 和 j 的信号灯不能同时为绿灯,则 $P_{i,j} = P_{j,i} = 1$; 否则 $P_{i,j} = 0, i, j = 1, 2, \dots, M$.

\underline{G}, \bar{G} : 绿灯的最短和最长持续时间.

\underline{R}, \bar{R} : 红灯的最短和最长持续时间.

本部分的决策变量如下:

$L_{m,n}$: 第 m 股交通流在时间段 n 结束时刻的队长;

$W_{m,n}$: 第 m 股交通流在时间段 n 结束时刻的累计等待时间;

$S_{m,n}$: 1/0 决策变量,表示第 m 股交通流在时间段 n 的控制信号, $S_{m,n} = 1/0$ 分别指示开绿/红信号灯.

2.1 现有非线性模型回顾

作为本文研究的出发点,这里首先回顾文献[6]中以最小化等待时间为目标的非线性模型.

模型 1 非线性混合整数规划模型^[6].

目标函数为

$$\min \eta = \sum_{m=1}^M W_{m,N}. \quad (1)$$

其中: M 为路口交通流总股数; $W_{m,n}$ 为第 m 股交通流在时间段 n 结束时刻的累计等待时间. 式(1)表示

最小化时间窗口 N 内的总等待时间.

约束条件为:

1) 队长的动态方程: $\forall m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N$, 各股交通流的队长满足如下动态关系:

$$L_{m,n} = \max\{0, L_{m,n-1} + A_{m,n} - D_m \cdot S_{m,n}\}. \quad (2)$$

其中: $L_{m,n}$ 为第 m 股交通流在时间段 n 结束时刻的队长,记 $L_{m,0} := 0$; $A_{m,n}$ 为第 m 股交通流在时间段 n 内到达的车辆数目; D_m 为第 m 股交通流在单位时间内的最大放行车辆数; 决策变量 $S_{m,n} = 1/0$ 分别表示第 m 股交通流在时间段 n 的控制信号为绿/红灯.

2) 累积等待时间的动态方程: $\forall m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N$, 各股交通流的车辆累积等待时间满足如下动态关系:

$$W_{m,n} = W_{m,n-1} + 1/2 \cdot (L_{m,n-1} + L_{m,n}). \quad (3)$$

这里采用文献[6]中相同的假设,认为单位时间片段内车辆是均匀到达的,并且记 $W_{m,0} := 0$.

3) 流冲突约束: $\forall n = 1, 2, \dots, N$, 有冲突的两股交通流所对应的信号灯不能同时为绿灯.

$$\sum_{\forall i,j=1,2,\dots,M} P_{i,j} S_{i,n} S_{j,n} = 0. \quad (4)$$

其中: $P_{i,j} = 1$ 表示第 i 和第 j 股交通流有冲突,即这两股交通流所对应的信号灯状态不能同时为绿灯; 否则 $P_{i,j} = 0$.

4) 安全约束: $\forall m = 1, 2, \dots, M$, 一旦开启绿灯/红灯,则相应信号灯的最短和最长持续时间需要满足如下交通安全约束:

$$S_{m,n} = 0, S_{m,n+1} = 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{\underline{G}} S_{m,n+k} = 1, \quad (5)$$

$$S_{m,n} = 0, S_{m,n+1} = 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{\bar{G}+1} S_{m,n+k} = 0, \quad (6)$$

$$S_{m,n} = 1, S_{m,n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\underline{R}} S_{m,n+k} = 0, \quad (7)$$

$$S_{m,n} = 1, S_{m,n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\bar{R}+1} S_{m,n+k} \geq 1. \quad (8)$$

其中: \underline{G} 和 \bar{G} 分别为所要求的绿灯最短和最长持续时间; \underline{R} 和 \bar{R} 分别为所要求的红灯最短和最长持续时间.

注 1 正如文献[6]中指出的,该模型中的非线性约束(2),(4)~(8),导致其无法直接求解.

2.2 模型线性化

为解决模型 1 不可解的问题,可将原有模型 1 中的非线性约束(2),(4)~(8)进行线性化处理,并且保证不改变约束的本质,即线性化处理前后的约束条件均等价. 具体线性化方法如下:

1) 式(2)中的队长动态方程等价于

$$L_{m,n} \geq L_{m,n-1} + A_{m,n} - D_m \cdot S_{m,n}, \quad (9)$$

$$L_{m,n} \geq 0, \quad (10)$$

同时将 $\Phi \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N L_{m,n}$ 加入最小化的目标函数, 并令 $\Phi \gg 0$ 以保证其等价性^[7]. 在本文第5节的数值实验中, 取 $\Phi = 10^6$.

2) 式(4)中的流冲突约束可以等价于 ($\forall m, m' = 1, 2, \dots, M$)

$$S_{m,n} + S_{m',n} \leq 2 - P_{m,m'}, \quad (11)$$

其等价性在于, 如果 m 和 m' 这两股交通流相冲突, 即 $P_{m,m'} = 1$, 则 $S_{m,n} + S_{m',n} \leq 1$, 表示这两股交通流对应的信号灯不能同时为绿灯.

3) 式(5)中的最短绿灯时间约束等价于

$$\sum_{k=n}^{n+\underline{G}-1} S_{m,k} \geq \underline{G} \cdot (S_{m,n} - S_{m,n-1}), \quad (12)$$

$$n = 1, 2, \dots, N - \underline{G} + 1;$$

$$\sum_{k=n}^N S_{m,k} \geq (N - n + 1) \cdot (S_{m,n} - S_{m,n-1}), \quad (13)$$

$$n = N - \underline{G} + 2, \dots, N.$$

这里令

$$S_{m,0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (14)$$

其等价性的直观意义如下: 对于 $n \leq N - \underline{G} + 1$, 如果第 m 股交通流对应的信号灯在时间段 n 由红灯变为绿灯, 即 $S_{m,n} - S_{m,n-1} = 1$, 则式(12)保证之后的 \underline{G} 个时间段内都必须维持绿灯(即相应决策变量取值为1); 反之则有 $S_{m,n} - S_{m,n-1} = 0$ 或者 -1 , 则式(12)自动成立. 对于 $n > N - \underline{G} + 1$, 如果第 m 股交通流对应的信号灯在时间段 n 由红灯变为绿灯, 则式(13)保证绿灯一直持续到决策时间窗的最后.

4) 式(6)中的最长绿灯时间约束等价于

$$\sum_{k=n}^{n+\bar{G}} S_{m,k} \leq \bar{G}, \quad n = 1, 2, \dots, N - \bar{G}. \quad (15)$$

其等价性在于, 对于任意 $\bar{G} + 1$ 个时间段, 式(15)保证其不能全部为绿灯.

5) 式(7)中的最短红灯时间约束等价于

$$\sum_{k=1}^{\underline{R}} S_{m,k} \leq \underline{R} \cdot S_{m,1}; \quad (16)$$

$$\sum_{k=n}^{n+\underline{R}-1} S_{m,k} \leq \underline{R} \cdot (S_{m,n} + 1 - S_{m,n-1}), \quad (17)$$

$$n = 2, 3, \dots, N - \underline{R} + 1;$$

$$\sum_{k=n}^N S_{m,k} \leq (N - n + 1)(S_{m,n} + 1 - S_{m,n-1}), \quad (18)$$

$$n = N - \underline{R} + 2, \dots, N.$$

其等价性的直观意义如下: 当初始时间段 ($n = 1$) 亮红灯时, 即 $S_{m,1} = 0$, 式(16)保证后续 \underline{R} 个时间段都必须维持红灯(即相应决策变量取值为0). 对于 $2 \leq n \leq N - \underline{R} + 1$, 如果第 m 股交通流对应的信号灯在时间段 n 由绿灯变为红灯, 即 $S_{m,n} + 1 - S_{m,n-1} = 0$, 则式(17)保证之后的 \underline{R} 个时间段内都必须维持红灯; 反之则有 $S_{m,n} + 1 - S_{m,n-1} = 1$ 或者 2 , 此时式(17)自动成立. 对于 $n > N - \underline{R} + 1$, 如果第 m 股交通流对应的信号灯在时间段 n 由绿灯变为红灯, 则式(18)保证红灯持续到决策窗的最后.

6) 式(8)中的最长红灯时间约束等价于

$$\sum_{k=n}^{n+\bar{R}} S_{m,k} \geq 1, \quad n = 1, 2, \dots, N - \bar{R}. \quad (19)$$

其等价性在于, 对于任意 $\bar{R} + 1$ 个时间段, 式(19)保证其不能全部为红灯.

在上述线性化处理的基础上, 可得到路口信号灯控制的线性混合整数规划模型.

模型2 线性混合整数规划模型.

目标函数为

$$\min \tilde{\eta} = \eta + \Phi \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N L_{m,n}, \quad (20)$$

约束条件为

$$\eta = \sum_{m=1}^M W_{m,N}, \quad (21)$$

以及式(3)和(9)~(19)的约束关系.

模型2与模型1等价, 其原因在于模型1中所提出的4个约束在模型2中保持不变或给出了等价形式. 具体而言: 1) 模型1中的队长约束, 即式(2), 等价于模型2中的式(9)和(10); 2) 累计等待时间约束, 即式(3), 在两模型中相同; 3) 模型1中的流冲突约束, 即式(4), 等价于模型2中的式(11); 4) 模型1中的安全约束, 即式(5)~(8), 等价于模型2中的式(12)~(19).

基于该等价性, 设 η_2^* 是模型2的最优解, η_1^* 是模型1的最优解, 有

$$\eta_2^* = \eta_1^*. \quad (22)$$

注2 模型2解决了模型1中非线性约束导致的不可解性, 可以采用现有线性混合整数规划求解软件(如 CPLEX, LINGO)求解, 所以模型2可以应用于对求解速度要求不高的离线控制问题中.

模型2中存在大量整数决策变量 ($M \times N$ 个), 其求解速度较慢, 尚无法满足交通路口实时控制的要求, 所以在下一部分提出了基于多阶段决策的建模思路.

3 模型3: 多阶段决策模型

为了克服模型2中大量0/1整数决策变量带来的

$s(k)$: 决策阶段 k 的系统状态;
 $a(k)$: 决策阶段 k 的控制行为;
 $\mathcal{A}(k)$: 决策阶段 k 的可行控制行为构成的集合;
 $c(s(k), a(k), k)$: 决策阶段 k 的费用函数.

3.1 系统状态

在决策阶段 $k, k = 0, 1, \dots$, 系统状态变量

$$s(k) = [g_m(k), r_m(k), t_m(k), l_m(k), m = 1, 2, \dots, M], \quad (23)$$

即决策阶段 k 的系统状态包括第 m 股交通流对应的信号灯的已累计持续亮绿灯的时间 $g_m(k)$, 已累计持续亮红灯的时间 $r_m(k)$, 已决定状态的控制信号推进到的时间点 $t_m(k)$ 及其队长 $l_m(k), \forall m = 0, 1, \dots, M$.

系统的初始状态 $s(0)$ 为 ($\forall m = 0, 1, \dots, M$)

$$g_m(0) = r_m(0) = t_m(0) = l_m(0) = 0. \quad (24)$$

3.2 控制行为

在决策阶段 $k, k = 0, 1, \dots$, 针对已决定状态的控制信号推进最慢的一股交通流作出控制, 即针对第 m^* 股交通流作出控制, 其中

$$m^* \in \arg \min_{m=1,2,\dots,M} \{t_m(k)\}. \quad (25)$$

当式 (25) 中出现多股交通流推进到的时间点相等的情况时, 选择编号最小的一股 (或者选择编号最大的一股, 根据后文所设计算法的隐枚举特性可知, 这里的顺序选择并不影响最终结果).

在决策阶段 $k, k = 0, 1, \dots$, 根据系统状态 $s(k)$ 的取值情况, 可行行为集合 $\mathcal{A}(k)$ 按如下方式确定:

1) 如果 $s(k)$ 满足如下条件之一:

$$\exists m \in \{1, 2, \dots, M\},$$

$$\text{s.t. } g_m(k) > 0, P_{m,m^*} = 1; \text{ 或 } g_{m^*}(k) = \bar{G}, \quad (26)$$

则此时只能亮红灯, 即 $\mathcal{A}(k) = \{0\}$.

2) 如果 $s(k)$ 满足如下条件:

$$r_{m^*}(k) = \bar{R}, \quad (27)$$

则此时只能亮绿灯, 即 $\mathcal{A}(k) = \{1\}$.

3) 如果 $s(k)$ 不满足条件 (26) 和 (27), 则 $\mathcal{A}(k) = \{1, 0\}$.

4) 如果 $s(k)$ 同时满足条件 (26) 和 (27), 则 $\mathcal{A}(k) = \emptyset$, 即此状态下没有可行的控制行为.

在决策阶段 $k, k = 0, 1, \dots$, 控制行为变量为 $a(k)$, $a(k) = 1/0$ 分别表示由式 (25) 决定的第 m^* 股交通流在决策阶段 k 选择开绿灯/红灯, 可行行为由如上方式确定, 即 $a(k) \in \mathcal{A}(k)$.

3.3 状态转移方程

在决策阶段 $k, k = 0, 1, \dots$, 如果 $t_{m^*}(k) \geq N$, 则这一多阶段决策过程结束, $s(k+1) = \tilde{s}$, 其中 \tilde{s} 是一

个虚拟的吸收态, 表示终止状态, m^* 由式 (25) 决定; 如果 $t_{m^*}(k) < N$, 则这一多阶段决策过程继续, 如图 1 所示, 此时的系统状态转移方程按照如下方式分 4 种情况决定.

情况 1: 如果 $a(k) = 1$ 而且 $g_{m^*}(k) > 0$, 即第 m^* 股交通流在决策阶段 k 选择继续开绿灯, 则系统状态转移方程为

$$g_{m^*}(k+1) = g_{m^*}(k) + 1, \quad (28)$$

$$r_{m^*}(k+1) = r_{m^*}(k), \quad (29)$$

$$t_{m^*}(k+1) = t_{m^*}(k) + 1. \quad (30)$$

情况 2: 如果 $a(k) = 1$ 而且 $g_{m^*}(k) = 0$, 即第 m^* 股交通流在决策阶段 k 选择转换状态开始绿灯, 则系统状态转移方程为

$$g_{m^*}(k+1) = \underline{G}, \quad (31)$$

$$r_{m^*}(k+1) = 0, \quad (32)$$

$$t_{m^*}(k+1) = \min\{t_{m^*}(k) + \underline{G}, N\}. \quad (33)$$

情况 3: 如果 $a(k) = 0$ 而且 $r_{m^*}(k) = 0$, 即第 m^* 股交通流在决策阶段 k 选择转换状态开始红灯, 则系统状态转移方程为

$$g_{m^*}(k+1) = 0, \quad (34)$$

$$r_{m^*}(k+1) = \underline{R}, \quad (35)$$

$$t_{m^*}(k+1) = \min\{t_{m^*}(k) + \underline{R}, N\}. \quad (36)$$

情况 4: 如果 $a(k) = 0$ 而且 $r_{m^*}(k) > 0$, 即第 m^* 股交通流在决策阶段 k 选择继续开红灯, 则系统状态转移方程为

$$g_{m^*}(k+1) = g_{m^*}(k), \quad (37)$$

$$r_{m^*}(k+1) = r_{m^*}(k) + 1, \quad (38)$$

$$t_{m^*}(k+1) = t_{m^*}(k) + 1. \quad (39)$$

上述 4 种情况中, 对于状态变量 $l_{m^*}(k)$ 的更新可以统一表示为

$$l_{m^*}(k+1) = L_{m^*, t_{m^*}(k+1)}, \quad (40)$$

其中沿用第 2 节的符号 $L_{m,t}$, 表示第 m 股交通流在时间 t 的队长, 即

$$L_{m^*, t_{m^*}(k)} = l_{m^*}(k), \quad (41)$$

$$L_{m^*, t_{m^*}(k)+n} =$$

$$\max\{0, L_{m^*, t_{m^*}(k)+n-1} + A_{m^*, t_{m^*}(k)+n} - D_{m^*}\},$$

$$\forall n = 1, 2, \dots, t_{m^*}(k+1) - t_{m^*}(k). \quad (42)$$

对于非 m^* 股的其他交通流, 其状态保持不变, 即 $\forall m = 1, 2, \dots, M, m \neq m^*$, 有

$$g_m(k+1) = g_m(k), \quad (43)$$

$$r_m(k+1) = r_m(k), \quad (44)$$

$$t_m(k+1) = t_m(k), \quad (45)$$

$$l_m(k+1) = l_m(k). \quad (46)$$

由上述状态转移方程, 可得到 $g_m(k)$ 和 $r_m(k)$ 至少有一个为零, $\forall k = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots, M$, 即

$$g_m(k) \cdot r_m(k) = 0. \quad (47)$$

3.4 费用函数形式

在决策阶段 $k, k = 0, 1, \dots$, 系统的一步费用函数 $c(s(k), a(k), k)$ 按如下方式定义. 如果系统已经进入终止状态, 即 $s(k) = \bar{s}$, 则 $c(s(k), a(k), k) = 0$; 否则, 如果 $\mathcal{A}(k) \neq \emptyset$, 则

$$c(s(k), a(k), k) = \sum_{t=t_{m^*}(k)+1}^{t_{m^*}(k+1)} 1/2 \cdot (L_{m^*,t-1} + L_{m^*,t}). \quad (48)$$

其中: m^* 由式 (25) 决定; 对于 $t = t_{m^*}(k) + 1, \dots, t_{m^*}(k+1)$, 队长 $L_{m^*,t}$ 由式 (41) 和 (42) 决定; 如果 $\mathcal{A}(k) = \emptyset$, 则 $c(s(k), a(k), k) = \Phi, \Phi \gg 0$.

模型 3 的目标函数是最小化总费用

$$\min : \eta = \sum_{k=0}^{\bar{K}} c(s(k), a(k), k), \quad (49)$$

其中: \bar{K} 表示决策阶段数的上限, 其取值由下式决定:

$$\bar{K} = M \cdot \frac{N}{\bar{G} + \bar{R}} (2 + \bar{G} - \underline{G} + \bar{R} - \underline{R}). \quad (50)$$

状态转移方程 (28)~(46) 可以一般性地记作

$$s(k+1) = f(s(k), a(k), k). \quad (51)$$

3.5 模型特点分析

首先, 基于多阶段决策的模型 3 是有效的. 根据费用函数 (48) 和原模型目标函数 (1), 以及动态方程 (41), (42) 和原模型约束条件 (3) 的等价性, 可知模型 3 与模型 1 是等价的. 换言之, 设 η_3^* 是模型 3 的最优解, η_1^* 是模型 1 的最优解, 有

$$\eta_3^* = \eta_1^*. \quad (52)$$

其次, 基于动态规划的模型 3 是高效的. 该模型充分利用了本信号灯控制问题的结构特点, 利用安全约束中红、绿灯最短和最长时长的限制, 可以有效减少决策次数, 为提出下文的高效求解算法、满足本问题在线控制的实时性要求, 奠定了模型基础.

具体的, 模型 3 的决策阶段上限 \bar{K} 由式 (50) 决定, 每一次决策的行为空间大小 $|\mathcal{A}(k)| \leq 2$, 即模型 3 最多需要作出 \bar{K} 次二值决策便可得到本问题的一个解. 相对比, 模型 2 需要作出 $M \times N$ 次 0/1 二值决策才可以得到本问题的一个解.

$$\frac{\bar{K}}{MN} = \frac{\bar{G} - \underline{G} + \bar{R} - \underline{R} + 2}{\bar{G} + \bar{R}} = 1 - \frac{\underline{G} + \underline{R} - 2}{\bar{G} + \bar{R}} \leq 1. \quad (53)$$

为得到本问题的一个解, 模型 3 需要的决策次数小于模型 2, 而且红绿灯时长下限 $\underline{G} + \underline{R}$ 和上限 $\bar{G} + \bar{R}$ 越接近, 这种节省效果越明显, 这一理论分析与物理直观相吻合.

这里需要指出的是, 式 (53) 给出的是最坏情况下的计算量分析. 在实际应用中, 模型 3 得到本问题的一个解所需要的决策阶段数远小于 \bar{K} . 例如, 如果考虑最理想的情况, 其决策阶段数的下限为 $\underline{K} = \frac{2MN}{\bar{G} + \bar{R}}$, 远小于模型 2 需要的决策次数.

4 多阶段决策模型的前向动态规划算法

模型 3 是一类特殊的多阶段决策模型, 其初始状态已给定, 但是有效的决策周期数是不定的. 针对本模型的这一特点, 采用下述前向动态规划算法, 高效求解这一问题的最优解.

模型 3 中因为方程 (28)~(46) 定义的状态转移过程是可以逆向递推的, 所以这里为方便描述, 将一种逆向的状态递推关系表示为

$$s(k) = f^{-1}(s(k+1), a(k), k). \quad (54)$$

这里定义各决策阶段、每一个状态的历史累积费用如下:

$$J(s(0), 0) = 0, \quad (55)$$

$$J(s(k), k) =$$

$$\min_{\forall a(k-1) \in \mathcal{A}(k-1)} \{c(f^{-1}(s(k), a(k-1), k-1), a(k-1), k-1) +$$

$$J(f^{-1}(s(k), a(k-1), k-1), k-1)\},$$

$$\forall k = 1, 2, \dots. \quad (56)$$

这里针对上一节多阶段决策模型 3 的特性, 设计如下前向动态规划算法. 本算法采用递归的方式, 按照如下步骤执行:

Step 1: 按照式 (24) 设置初始状态 $s(0)$; 同时, 设置迭代下标 $k = 0$, 目标函数上限 $\bar{\eta} = \infty$.

Step 2: 如果状态 $s(k)$ 对应的 $\min_{m=1,2,\dots,M} \{t_m(k)\} \geq N$, 则令 $\bar{\eta} = \min\{\bar{\eta}, J(s(k), k)\}$, 并跳转到 Step 6; 否则, $\mathcal{A}(k) = \{1, 0\}$, 进入 Step 3.

Step 3: 如果 $\mathcal{A}(k) = \emptyset$, 则 $J(s(k), k) = \infty$, 并跳转到 Step 6; 否则, 在行为集合 $\mathcal{A}(k)$ 中取出元素 a , 并令 $\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}(k) \setminus \{a\}$.

Step 4: 如果根据条件 (26) 和 (27) 判断得到状态 $s(k)$ 下行为 a 不可行, 则跳转到 Step 3; 否则, 由式 (51) 得到 $x = f(s(k), a, k)$, 并由式 (56) 计算 $J(x, k+1)$. 如果 $J(x, k+1) \geq \bar{\eta}$, 则跳转到 Step 3; 否则, 进入 Step 5.

Step 5: 令 $s(k+1) = x$, 并令 $k = k+1$, 跳转到

Step 2.

Step 6: 令 $k = k - 1$, 如果 $k > 0$, 则回溯当前状态到 $s(k - 1)$, 跳转到 Step 3; 否则, 进入 Step 7.

Step 7: 输出结果 $\eta^* = \bar{\eta}$.

由该前向动态规划算法的隐枚举性可知, 该算法收敛到本问题的最优解.

5 数值结果

本文针对 15 组随机生成的算例, 对比线性混合整数规划模型 2 以及多阶段决策模型 3 的效果, 其中采用数学规划软件 LINGO 求解模型 2, 采用上文所介绍的前向动态规划算法求解模型 3, 通过其计算时间的对比展示多阶段决策模型及其前向动态规划算法的效率. 同时, 通过与周期为 120s 的固定时长控制策略对比, 显示了上述优化模型的效果. 这里, 15 组算例中 $N = 480, M = 4$, 车辆到达时间随机生成. 实验结果如表 1 所示.

首先, 从表 1 的结果中可以看出, 本文针对交通路口信号灯的优化控制模型是有效的. 通过与固定时长的周期性控制策略对比, 经过优化的结果可以平均节省 24.17% 的等待时间. 实现这一性能提升的原因在于, 优化模型充分利用了时间窗口内的车辆到达信息, 实现了路口信号灯的自适应调节, 从而有效提高了信号灯的控制效率, 这一过程如图 2 所示.

图 2 显示了实验#14的优化结果, 其中横轴表示时间, 纵轴表示各个时间段内的车辆到达数量, 最上面用灰色和黑色的线段分别表示绿灯和红灯的控制. 该实验中假设车辆的到达服从 Bernoulli 分布, 而且设定第 1 和第 3 股的交通流在前 120s (即 $n = 1, 2, \dots, 240$) 到达概率大于后 120s (即 $n = 241, 242, \dots$,

480 = N), 而第 2 和第 4 股的情况正相反. 从图 2 显示的优化结果可以看出, 在第 1 和第 3 股交通流的后半段, 优化结果自适应地延长了红灯的时间, 缩短了绿灯的时间, 而在第 2 和第 4 股交通流的后半段, 延长了绿灯时间以适应增加的车流.

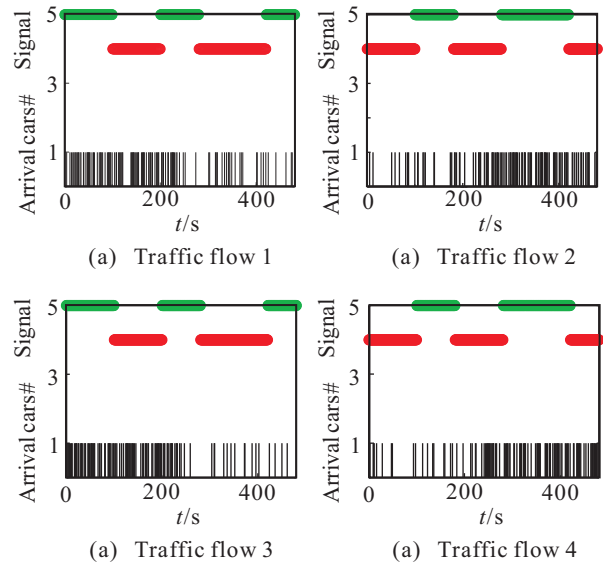


图 2 动态规划优化结果示意图 (实验#14)

其次, 表 1 中的结果显示了多阶段决策模型及其前向动态规划算法的高效性. 虽然模型 2 通过线性化处理, 解决了文献[6]原有非线性模型的不可解性, 但是其求解效率仍然无法满足在线实时控制的要求. 例如, 这里 $N = 480$, 每一个离散时间段表示实际的 0.5s, 即优化的时间窗为 240s. 但是, 采用 LINGO 求解这一线性混合整数规划模型得到最优解的时间已经大于 240s, 所以其优化结果无法在线实

表 1 多阶段决策模型及前向动态规划算法的效果

试验#	固定周期控制		线性 MIP 模型 2 + LINGO		多阶段决策模型 3 + 前向动态规划		性能对比	
	总费用	总费用	CPU 时间/s	总费用	CPU 时间/s	总费用节省/ %	CPU 时间节省/ %	
	η_0	η_2	T_2	η_3	T_3	$100(\eta_0 - \eta_3)/\eta_0$	$100(T_2 - T_3)/T_2$	
1	32775	28412	404	28412	9	13.31	97.77	
2	37344	29463	329	29463	4	21.10	98.78	
3	33188	26830	558	26830	10	19.16	98.21	
4	36772	24275	377	24275	2	33.99	99.47	
5	33417	25190	375	25190	9	24.62	97.60	
6	58784	48100	326	48100	5	18.18	98.47	
7	92897	71599	312	71599	5	22.93	98.40	
8	88844	70139	363	70139	8	21.05	97.80	
9	95606	61723	311	61723	1	35.44	99.68	
10	95029	63442	245	63442	7	33.24	97.14	
11	15313	12980	544	12980	5	15.24	99.08	
12	15210	11713	394	11713	3	22.99	99.24	
13	16130	12395	390	12395	6	23.16	98.46	
14	15355	11200	349	11200	3	27.06	99.14	
15	15101	10402	323	10402	9	31.12	97.21	
均值						24.17	98.43	

施.但是,多阶段决策模型3及其前向动态规划算法的求解效率大大提高,可以平均节省98.43%的CPU时间,针对240s的决策时间窗,所有算例都在10s内得到最优解,可以满足在线实时控制与实施的要求.

更进一步,本文研究了算法结果的实用性和鲁棒性.众所周知,在实际的路口交通信号控制问题中,不仅需要考虑到路口所有车辆的平均等待时间,还需要考虑控制结果对于每一辆车的具体影响,因为如果发生等待时间过长的情况,是很难让人接受的.基于此,本文统计了上文15组数值实验中,等待时间超过45s车辆占所有到达路口车辆的比例.表2中对比了本文基于多阶段决策模型和前向动态规划算法所得结果中和传统固定周期的控制结果中,超长等待车辆的比例.

表2 多阶段决策及动态规划算法的鲁棒性和实用性

试验 #	固定周期控制 超长等待比例/%	多阶段决策结果 超长等待比例/%
1	4.65	3.43
2	3.69	7.38
3	4.84	4.42
4	4.72	4.94
5	5.43	3.76
6	4.31	4.2
7	4.91	4.28
8	4.9	4.12
9	3.88	3.54
10	5.25	4.34
11	7.66	5.24
12	4.65	4.26
13	3.04	3.8
14	3.94	3.94
15	4.57	3.2

表2的对比结果显示,本文基于多阶段决策模型及前向动态规划算法所得到的路口信号灯控制结果,在多数情况下并不会造成过长的等待时间,等待时间超过45s的车辆所占比例与传统固定周期控制方法的结果基本相同,只在试验#2中略多.这一数值结果验证了本文方法的鲁棒性和实用性.

6 结 论

本文针对路口交通信号灯的实时最优控制问题展开研究,主要贡献包含如下3个方面:首先,本文把前人得到的非线性模型进行了线性化处理,得到了线性混合整数规划模型,从而解决了原有非线性模型无法求解的问题.这一模型可以采用现有数学规划软件,例如LINGO或者CPLEX等求解,可以应用于离线控制问题中.

其次,为了满足路口信号灯在线实时控制对模型及算法效率的要求,本文提出了一种基于多阶段决策的优化模型.这一新模型的提出充分利用了这一控制

问题的结构特征,通过合理地选择系统状态变量和控制变量,压缩了模型的规模.

最后,在这一多阶段决策模型的基础上,本文基于前向动态规划的算法,高效地求解这一信号灯控制问题,得到了最优解.数值实验显示,本文的优化模型和求解算法是有效的,可以比固定时长的周期性控制策略平均节省约1/4的等待时间,并且本文提出的多阶段决策模型及其前向动态规划算法可以在10s内得到240s时间窗口控制问题的最优解,比线性混合整数规划模型提高计算速度近100倍,其求解效率可以满足在线实时控制的要求.

参考文献(References)

- [1] Sen S, Head K L. Controlled optimization of phases at an intersection[J]. *Transportation Science*, 1997, 31(1): 5-17.
- [2] 张飞舟, 范耀祖. 交通控制工程[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2005: 127-131
(Zhang F Z, Fan Y Z. Traffic control technology[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2005: 127-131.)
- [3] Head K L, Mirchandani P B, Sheppard D. Hierarchical framework for real time traffic control[J]. *Transportation Research Record*, 1992, 1360: 82-88.
- [4] Hunt P B, Robertson D I, Bretherton R D, et al. SCOOT — A traffic responsive method of coordinating signals[R]. TRRL Laboratory Report, 1981.
- [5] 高海军, 李灵犀, 陈龙. 交通路口可变相位信号控制[J]. *交通运输工程学报*, 2003, 3(3): 79-83.
(Gao H J, Li L X, Chen L. Changeable phases signal control of traffic intersection[J]. *J of Traffic and Transportation Engineering*, 2003, 3(3): 79-83.)
- [6] Li J, Pan X, Wang X. State-space equation and the first phase algorithm for signal control of single intersections[J]. *Tsinghua Science and Technology*, 2007, 12(2): 231-235.
- [7] Bertsimas D, Tsitsiklis J. Introduction to linear optimization[M]. Athena Scientific, 1997.
- [8] 李宏, 焦永昌, 张莉. 一种求解混合整数规划的混合进化算法[J]. *控制与决策*, 2008, 23(10): 1098-1102
(Li H, Jiao Y C, Zhang L. Hybrid evolutionary algorithm for mixed integer programming problems[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(10): 1098-1102.)
- [9] 陈细谦, 迟忠先, 曹秀坤. 基于动态规划方法优化关联规则发现[J]. *控制与决策*, 2005, 20(10): 1111-1119.
(Chen X Q, Chi Z X, Cao X K. Optimal strategy for association rules mining based on dynamic programming[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(10): 1111-1119.)
- [10] Bertsekas D. Dynamic programming and optimal control[M]. Athena Scientific, 2007.