第 27 卷 第 3 期
Vol. 27 No. 3

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 3 月
Mar. 2012

文章编号: 1001-0920(2012)03-0394-05

一类无限维随机关联大系统的全局指数稳定性

施继忠[1,2]，张继业[1]

(1. 西南交通大学 牵引动力国家重点实验室，成都 610031；2. 巢湖学院 数学系，安徽 巢湖 238000)

摘 要: 基于箱体理论, 利用向量 V 函数法, 研究了一类无限维随机非线性关联大系统的全局指数稳定性. 通过分析相应的随机微分不等式的稳定性, 得到了该类大系统全局指数稳定的一个判据. 该判据利用随机大系统的系数矩阵以及与大系统关联的Lyapunov矩阵方程的解构造判定条件来判定大系统的全局指数稳定性, 计算简便, 便于应用.

关键词: 无限维；箱体理论；指数稳定性；随机关联系统；向量 V 函数

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Global exponential stability for a class of infinite-dimension stochastic interconnected large-scale systems

SHI Ji-zhong[1,2]，*ZHANG Ji-ye*[1]

(1. Key Laboratory of National Traction Power，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China；2. Department of Mathematics，Chaohu College，Chaohu 238000，China．Correspondent：SHI Ji-zhong，E-mail：shijizhong2006@126.com)

Abstract: The global exponential stability of a class of infinite stochastic nonlinear interconnected large-scale systems is analyzed based on box theory by constructing a vector Lyapunov function. A criterion is obtained for global exponential stability of the systems by analyzing the stability of stochastic differential inequalities. A large-scale system is global exponential stable if the condition is satisfied, where the condition is constructed by employing the coefficient matrices of the system and the solutions of the Lyapunov equations which are interconnected with the system. The calculation is simple, so the criterion is easy for application.

Key words: infinite-dimension；box theory；exponential stability；stochastic interconnected systems；vector V function

1 引 言

目前, 国内外学者对于有限维随机大系统的稳定性研究已经取得了很多有价值的成果和方法. 例如, 文献[1]利用Razumikhi方法得到了时滞随机大系统的稳定性判据. [2]利用随机泛函微分方程新的稳定性定理, 采用适当的Lyapunov泛函, 得到了时滞线性随机大系统的时滞相关的均方渐近稳定的判据. [3]将Halanfly不等式推广到高维空间, 采用向量Lyapunov函数和 M-矩阵等工具, 得到了随机大系统的均方渐近稳定性判据. [4]研究了一类具有随机非线性关联大系统的控制问题, 确保控制系统是渐近均方稳定的. [5]研究了一类随机非线性大系统的分散自适应跟踪问题, 得到了闭环系统的输出沿轨线依概率渐近稳定的结论. [6]运用LMI方法, 研究了时滞随机大系统分散控制器设计, 得到了确保相应系统渐近稳定的条件. [7]利用比较法和分解-集结法得到了该随机大系统随机一致稳定性和渐近稳定性的比较准则. [8]利用时滞随机系统的比较原理, 得到了一类时滞随机线性大系统的二阶矩指数稳定和几乎必然指数稳定的新的代数判据.

关于无限维关联系统, 文献[9]在研究车辆跟随系统控制时提出了无限维关联系统模型, 给出了车辆跟随系统稳定的充分条件. 很多实际问题中都涉及到无限维关联系统的稳定性, 例如, 在自动化公路系统中, 为了减少车辆拥挤, 提高公路运行效率和交通安全, 可以对车辆采取编队运行的控制策略. 随着高速公路上车辆的不断驶入和驶出, 车队中车辆的数目不断变化, 使高速公路上车辆的个数难以确定, 所以该

收稿日期: 2010-10-07；**修回日期:** 2011-01-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172247, 50823004, 60974132)；国家教育部博士基金项目(200806130003)；安徽高校自然科学研究项目(KJ2011B102).

作者简介: 施继忠(1977−), 男, 讲师, 博士生, 从事系统稳定性分析与控制的研究；张继业(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统稳定性分析与控制、智能交通系统等研究.

系统一般用无限维关联系统来描述. [10-11] 在研究自动高速公路系统的车辆跟随控制时, 研究了一类无限维关联系统的稳定性, 得到了非线性弱耦合系统群稳定性的充分条件. [12] 用向量 V 函数法研究了一类非线性耦合项的无限维关联系统, 建立了箱体理论, 得到了该系统渐近稳定的一个充分条件, 弥补了 [10-11] 中的不足. 但 [10-12] 的研究没有考虑随机因素, 而在实际中存在许多随机不确定性因素, 例如车辆运行的环境、车辆系统的建模、车辆和道路信号的采集和传输等. 系统的稳定性是控制器设计的基础, 因此, 研究无限维随机关联大系统的指数稳定性是必要的. 近期, [13] 研究了一类随机关联系统, 并得到了该系统指数群稳定性的一个充分条件, 文中用于判定群稳定性的方法实质上是加权 Lyapunov 函数法, 该方法在处理具有强耦合项的随机关联系统时较为困难.

本文基于箱体理论[12], 通过构造向量 Lyapunov 函数, 研究了一类无限维随机非线性关联大系统的全局指数稳定性. 通过分析随机微分不等式的稳定性, 得到了该类大系统全局指数稳定的一个充分条件, 在处理具有强耦合项的随机关联系统时更为有效.

2　基本模型及假设

考虑如下微分方程所给出的无限维随机非线性关联大系统:

$$\mathrm{d}x_i = \Big[f_i(t,x_i) + \sum_{j=1}^{M} D_{ij}x_j\Big]\mathrm{d}t + \Big[g_i(t,x_i) + \sum_{j=1}^{M} F_{ij}x_j\Big]\mathrm{d}w_i(t),\ i\in N. \tag{1}$$

其中: $x_i\in R^n$ 为状态向量, R^n 为 n 维实空间; $x_i(t)=[x_{i1}(t),x_{i2}(t),\cdots,x_{in}(t)]^{\mathrm{T}}$; $f_i(t,x_i)$ 和 $g_i(t,x_i)$ 为非线性向量函数, $f_i,g_i:[t_0,\infty]\times R^n\to R^n$; D_{ij},F_{ij} 为 n 阶常数矩阵; $w_i(t)$ 为定义在概率空间 $(\varOmega,F,P)$ 上的一维标准维纳过程, $\varOmega$ 为样本空间, F 为样本空间子集的 σ 代数, P 为概率测度. 先定义如下符号:

$$\forall p<\infty,\ |f_i(t)|_\infty = \sup_{t\geqslant 0}|f_i(t)|,$$

$$\|f_i\|_\infty^p = \|f_i(\cdot)\|_\infty^p = \sup_{t\geqslant 0}\mathrm{E}[|f_i(t)|^p],$$

$$\|f(0)\|_\infty^p = \sup_{i\in N}\mathrm{E}[|f_i(0)|^p].$$

其中: $|\cdot|$ 为欧几里德范数, $\mathrm{E}(\cdot)$ 为期望. 矩阵 A 的范数定义为 $|A|=\{\lambda_m(A^{\mathrm{T}}A)\}$, 表示 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值.

定义 1　对于系统 (1) 的平衡点 $x_i=0,\ i\in N$, 若存在正常数 M_i 和 α, 对于所有的 $t\geqslant 0$ 满足

$$E|x_i(t)|^p < M_i\mathrm{e}^{-\alpha t}, \tag{2}$$

则称系统 (1) 的零解是指数为 p 的全局指数稳定的, 其中 α 为系统 (1) 的指数收敛率. 特别地, 当 $p=2$ 时称为指数均方稳定.

3　无限维随机关联大系统全局指数稳定性

文献 [12] 用向量 V 函数法研究了一类非线性耦合项的无限维关联系统, 在证明该系统渐近稳定的一个充分条件时, 将每个子系统都限定在一个箱体中运动. 随着时间的推移, 系统达到稳定, 该理论称为箱体理论. 下面首先运用箱体理论的思想证明引理 1, 并根据引理 1 导出一类无限维非线性随机关联大系统全局指数稳定性的一个充分条件.

引理 1　假定 $V_i=V(t,x_i(t))\geqslant 0$, $V_i(0)=V(0,x_i(0))\geqslant 0, \forall t\geqslant 0,\ i\in N$, $E|V_i|<\infty$ 且满足

$$EL_{(1)}(V_i)\leqslant g_i(EV_i,EV_{i-1},\cdots,EV_1,t)\Big\{-\beta_{i0}(EV_i)^m + \sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(EV_{i-j})^m + \frac{1}{(EV_i)^m}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(EV_{i-j})^m\Big]^2\Big\},\quad i=1,2,\cdots. \tag{3}$$

其中

$$L_{(1)}(\cdot)=\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_{ij}}\Big[f_{ij}(t,x_{ij})+\sum_{k=1}^{M}D_{ik}x_{kj}\Big]+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_{il}\partial x_{ij}}\sigma_{lj},$$

$$\sigma_{lj}=\Big[g_{il}(t,x_{il})+\sum_{k=1}^{M}F_{kl}x_{kl}\Big]\Big[g_{ij}(t,x_{ij})+\sum_{k=1}^{M}F_{kj}x_{kj}\Big].$$

对于 $V_i>0$, 有 $g_i(\cdot)>0$, $\beta_{i0}>0$, $\beta_{ij}\geqslant 0$. 当 $j>i$ 时, $\beta_{ij}=0$; 当 $i\leqslant j$ 时, $V_{i-j}\equiv 0$, $i,j=1,2,\cdots$. 若存在 $EV_{i0}=(EV_{10},EV_{20},\cdots)$, 使得

$$-\beta_{i0}(EV_{i0})^m+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(EV_{i-j,0})^m+\frac{1}{(EV_{i0})^m}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(EV_{i-j,0})^m\Big)^2<0,\quad i=1,2,\cdots, \tag{4}$$

且 $\inf\limits_i\{EV_{i0}\}=\alpha>0$, $\sup\limits_i\{EV_{i0}\}=\beta>0$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得

$$\|V(0)\|_\infty<\delta\Rightarrow\sup_{i\in N}||V_i(\cdot)||_\infty<\varepsilon. \tag{5}$$

证明　对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $\gamma=\{EV_i|EV_i=\tau EV_{i0},0<\tau\leqslant 1\}$. 根据式 (4) 可知, 在线段 γ 上有 $\mathrm{E}(L_{(1)}(V_i))\leqslant 0$, $i=1,2,\cdots$. 取充分小的 τ_0 使得 $\varepsilon>\max\{\tau_0\beta\}$. 令 $\delta=\min\{\tau_0\alpha\}$, $a=(\tau_0EV_{10},\tau_0EV_{20},\cdots)$. 称 $B_a=\{u_i|0\leqslant u_i\leqslant\tau_0EV_{i0},\ i=1,2,\cdots\}$ 为以 a 为顶点的箱体, $f_a^i=\{u\in\partial B_a|u_i=\tau_0EV_0,\ u_j\leqslant\tau_0EV_0, j\neq i\}$ 是箱面. 设初始状态 $||V(0)||_\infty<\delta$, 对于任意正整数 k, 当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时, 考虑不等式 (3). 假定存在时刻 $t_1>0$, 使得满足不等式 (3) 的轨线的期望

在时刻 $t=t_1$ 时到达某一箱面 f_a^i. 这说明在此时刻有 $\mathrm{d}(EV(t_1,x_i(t_1)))/\mathrm{d}t \geqslant 0$. 因而有 $\mathrm{E}[\mathrm{d}V(t_1,x_i(t_1))/\mathrm{d}t] \geqslant 0$. 假定轨线的期望与箱面 f_a^i 的交点为 $V^*=(EV_k^*, EV_{k-1}^*,\cdots,EV_1^*)$, 则在交点 V^* 处有

$$
\begin{aligned}
&EL_{(1)}V(t_1,x^i(t_1)) \leqslant\\
&g_i(V^*,t_1)\Big\{-\beta_{i0}(\tau_0 EV_{i0})^m+\\
&\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(EV_{i-j}^*)^m+\frac{1}{(\tau_0 EV_{i0})^m}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(EV_{i-j}^*)^m\Big]^2\Big\} \leqslant\\
&g_i(V^*,t_1)\Big\{-\beta_{i0}(\tau_0 EV_{i0})^m+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(\tau_0 EV_{i-j,0})^m+\\
&\frac{1}{(\tau_0 EV_{i0})^m}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(\tau_0 EV_{i-j,0})^m\Big]^2\Big\}<0. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

又由于[14]

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}V(t_1,x_i(t_1))/\mathrm{d}t]=\mathrm{E}[L_{(1)}V(t_1,x_i(t_1))],$$

结合式(6)有 $\mathrm{E}[\mathrm{d}V(t_1,x_i(t_1))/\mathrm{d}t] < 0$, 与 $\mathrm{E}[\mathrm{d}V(t_1, x_i(t_1))/\mathrm{d}t] \geqslant 0$ 相矛盾, 故不存在轨线的期望到达箱面 f_a^i. 由 k 的任意性可知, $\sup\limits_{i\in N}||V_i||_\infty<\varepsilon$. □

下面运用引理1导出无限维非线性随机关联大系统(1)全局指数稳定性的一个充分条件.

定理1 对于系统(1), 如果存在连续正定函数 $V_i = V(t,x_i(t))(x_i\in R^n(i\in N)$ 连续且二阶可微) 和正常数 $k(k=1,2,3,4,5)$, 使得下列条件满足:

$$c_1|x_i|^2 \leqslant V(t,x_i) \leqslant c_2|x_i|^2, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial V_i(t,x_i)}{\partial t}+(\mathrm{grad}V_i(t,x_i))^{\mathrm{T}}f_i(t,x_i) \leqslant -c_3|x_i|^2, \quad (8)$$

$$|\mathrm{grad}V_i(t,x_i)| \leqslant c_4|x_i|,\ \Big|\frac{\partial^2 V_i(t,x_i)}{\partial x_i^l\partial x_i^j}\Big| \leqslant c_5, \qquad (9)$$

且存在正常数 k_i^g, 使得 $g_i(t,x_i)$ 关于 x_i 满足全局 Lipschitz 条件

$$|g_i(t,x_i)-g_i(t,x_j)| \leqslant k_i^g|x_i-x_j|, \qquad (10)$$

$$
\begin{aligned}
&-c_2^{-1}c_3+c_1^{-1/2}c_4\sum_{j=1}^{M}c_{1j}^{-1/2}|D_{ij}|+\\
&\frac{1}{2}n^2c_5\Big(k_i^g c_1^{-1/2}+\sum_{j=1}^{M}c_1^{-1/2}|b^{ij}|\Big)^2<0, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

则系统(1)的平衡点是全局指数稳定的.

证明 令 $W_i=\mathrm{e}^{\xi t}V_i, \forall\varepsilon>0, \forall\xi>0$, 有

$$
\begin{aligned}
&L_{(1)}W_i=\xi\mathrm{e}^{\xi t}V_i+\mathrm{e}^{\xi t}L_{(1)}V_i=\\
&\mathrm{e}^{\xi t}\Big\{\xi V_i+\Big[\frac{\partial V_i}{\partial t}+(\mathrm{grad}V_i)^{\mathrm{T}}f_i(t,x_i)\Big]+\\
&(\mathrm{grad}V_i)^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{M}D_{ij}x_j+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_{il}\partial x_{im}}\Big[g_{il}(t,x_i)+\\
&\sum_{j=1}^{M}b_l^{ij}x_j\Big]\Big[g_{im}(t,x_i)+\sum_{j=1}^{M}b_m^{ij}x_j\Big]\Big\}, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

其中 $b_l^{ij}(l=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 F_{ij} 第 l 行元素所构成的行向量. 由式(7)~(10)得

$$
\begin{aligned}
&L_{(1)}W_i \leqslant\\
&\mathrm{e}^{\xi t}\Big[\xi V_i-c_3|x_i|^2+c_4|x_i|\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}||x_j|+\\
&\frac{1}{2}n^2c_5\Big(k_i^g|x_i|+\sum_{j=1}^{M}|b_l^{ij}||x_j|\Big)\Big(k_i^g|x_i|+\sum_{j=1}^{M}|b_m^{ij}||x_j|\Big)\Big]=\\
&\mathrm{e}^{\xi t}\Big[(\xi-c_2^{-1}c_{3i})V_i+c_4|x_i|\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}||x_j|+\\
&\frac{1}{2}n^2c_5\Big(k_i^g|x_i|+\sum_{j=1}^{M}|b_l^{ij}||x_j|\Big)\Big(k_i^g|x_i|+\sum_{j=1}^{M}|b_m^{ij}||x_j|\Big)\Big] \leqslant\\
&\mathrm{e}^{\xi t}\Big[(\xi-c_2^{-1}c_3)V_i+c_4|x_i|\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}||x_j|+\\
&\frac{1}{2}n^2c_5\Big(k_i^g|x_i|+\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}||x_j|\Big)^2\Big], \qquad (13)
\end{aligned}
$$

其中 $|b^{ij}|=\max\limits_{1\leqslant m\leqslant n}\{|b_m^{ij}|\}$. 根据 Hölder 不等式有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[L_{(1)}W_i] \leqslant \mathrm{e}^{\xi t}\Big\{(\xi-c_2^{-1}c_3)EV_i+\\
&\quad c_4(E|x_i|^2)^{1/2}\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}|(E|x_j|^2)^{1/2}+\\
&\quad \frac{1}{2}n^2c_5\Big[(k_i^g)^2(E|x_i|^2)+\\
&\quad 2k_i^g(E|x_i|^2)^{1/2}\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|(E|x_j|^2)^{1/2}+\\
&\quad \Big(\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|(E|x_j|^2)^{1/2}\Big)^2\Big]\Big\}, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[L_{(1)}W_i] \leqslant\\
&\mathrm{e}^{\xi t}\Big\{(\xi-c_2^{-1}c_3)EV_i+\\
&c_4(E|x_i|^2)^{1/2}\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}|(E|x_j|^2)^{1/2}+\\
&\frac{1}{2}n^2c_5\Big[k_i^g(E|x_i|^2)^{1/2}+\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|(E|x_j|^2)^{1/2}\Big]^2\Big\}. \quad (15)
\end{aligned}
$$

由式(7)得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[L_{(1)}W_i] \leqslant\\
&\mathrm{e}^{\xi t}\Big\{(\xi-c_2^{-1}c_3)EV_i+\\
&c_1^{-1/2}c_4(EV_i)^{1/2}\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}|c_1^{-1/2}(EV_j)^{1/2}+\\
&\frac{1}{2}n^2c_{5i}\Big[(k_i^g)^2c_1^{-1}(EV_i)+\\
&2k_i^g c_1^{-1/2}(EV_i)^{1/2}\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EV_j)^{1/2}+
\end{aligned}
$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EV_j)^{1/2}\Big)^2\Big]\Big\}=$$
$$\mathrm{e}^{\xi t}(EV_i)^{1/2}\Big\{(\xi-c_2^{-1}c_3)(EV_i)^{1/2}+$$
$$c_1^{-1/2}c_4\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}|c_1^{-1/2}(EV_j)^{1/2}+$$
$$\frac{1}{2}n^2c_5\Big[(k_i^g)^2c_1^{-1}(EV_i)^{1/2}+$$
$$2k_i^gc_1^{-1/2}\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EV_j)^{1/2}\Big]+$$
$$(EV_i)^{-1/2}\Big(\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EV_j)^{1/2}\Big)^2\Big\}.$$

即

$$\mathrm{E}[L_{(1)}W_i]\leqslant$$
$$(EW_i)^{1/2}\Big\{(\xi-c_2^{-1}c_3)(EW_i)^{1/2}+$$
$$c_1^{-1/2}c_4\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}|c_1^{-1/2}(EW_j)^{1/2}+$$
$$\frac{1}{2}n^2c_5\Big[(k_i^g)^2c_1^{-1}(EW_i)^{1/2}+$$
$$2k_i^gc_1^{-1/2}\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EW_j)^{1/2}\Big]+$$
$$(EW_i)^{-1/2}\Big(\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EW_j)^{1/2}\Big)^2\Big\}.\qquad(16)$$

根据式 (11), 存在 $\xi>0$, 使得

$$(\xi-c_2^{-1}c_3)+c_1^{-1/2}c_4\sum_{j=1}^{M}c_1^{-1/2}|D_{ij}|+$$
$$\frac{1}{2}n^2c_5\Big(k_i^gc_1^{-1/2}+\sum_{j=1}^{M}c_1^{-1/2}|b^{ij}|\Big)^2<0.\qquad(17)$$

于是, 存在 $EW_{i,0}=1$, $EW_{j,0}=1$, $j=1,2,\cdots,M$, $i\in N$, 使得

$$(\xi-c_2^{-1}c_3)(EW_i)^{1/2}+$$
$$c_1^{-1/2}c_4\sum_{j=1}^{M}|D_{ij}|c_1^{-1/2}(EW_j)^{1/2}+$$
$$\frac{1}{2}n^2c_5\Big[(k_i^g)^2c_1^{-1}(EW_i)^{1/2}+$$
$$2k_i^gc_1^{-1/2}\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EW_j)^{1/2}\Big]+$$
$$(EW_i)^{-1/2}\Big(\sum_{j=1}^{M}|b^{ij}|c_1^{-1/2}(EW_j)^{1/2}\Big)^2<0.\qquad(18)$$

根据引理 1 得 $\forall\varepsilon_0>0$, $\exists\delta_0>0$, 使得

$$\|W(0,x_i(0))\|_\infty<\delta_0\Rightarrow\sup_{i\in N}\|W_i(t,x_i(t))\|_\infty<\varepsilon_0.$$

由于 $c_1>0$, 存在 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$ 满足 $\varepsilon_0=c_1\varepsilon^2$, $\delta_0=c_1\delta^2$, 使得

$$\|x(0)\|_\infty<\delta\Rightarrow\sup_{i\in N}\|x_i(t)\|_\infty<\varepsilon.$$

由式 (7) 得

$$\sup_{i\in N}|x_i(t)|^2\leqslant c_1^{-1}(V(t,x_i))=c_1^{-1}W_i\mathrm{e}^{-\xi t}.$$

又因为 $\sup\limits_{i\in N}||W(t,x_i(t))||_\infty<\varepsilon_0$, 有

$$\mathrm{E}|x_i(t)|^2\leqslant c_1^{-1}\mathrm{E}(V(t,x_i))=$$
$$c_1^{-1}\mathrm{E}(W_i)\mathrm{e}^{-\xi t}<c_1^{-1}\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\xi t},$$

即 $\mathrm{E}|x_i(t)|^2<c_1^{-1}\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\xi t}$. 根据定义 1, 系统 (1) 的零解是指数均方稳定的. □

注 1　定理 1 运用箱体理论得到了引理 1, 并由伊藤方程给出无限维非线性随机关联大系统的稳定性, 得到了系统 (1) 的全局指数均方稳定的判据, 该判据在处理具有强耦合项的随机关联系统时更为有效, 从而对现有结论进行了扩展.

4　算例分析

在自动化公路系统中, 为了减少车辆拥挤, 提高公路运行效率和交通安全, 可以对车辆采取编队运行的控制策略. 随着高速公路上车辆的不断驶入和驶出, 车队中车辆的数目不断变化, 高速公路上车辆的个数难以确定, 所以该系统一般用无限维关联系统来描述. 为了方便起见, 仅考虑第 i 辆车与第 1 辆车和第 2 辆车相关联的情况. 假设考虑了随机因素后自动高速公路系统的车辆跟随系统如下:

$$\mathrm{d}x_i=[f_i(t,x_i)+(D_{i1}x_1+D_{i2}x_2)]\mathrm{d}t+$$
$$[g_i(t,x_i)+(F_{i1}x_1+F_{i2}x_2)]\mathrm{d}w_i(t).\qquad(19)$$

其中: $i\in N$, x_i 为第 i 辆车的状态, $f_i=(f_{i1},f_{i2})^{\mathrm{T}}$, $f_{i1}(t,x_{i1})=-4x_{i1}$, $f_{i2}(t,x_{i2})=-4x_{i2}$, $g_i=(g_{i1},g_{i2})^{\mathrm{T}}$, $g_{i1}(t,x_{i1})=x_{i1}$, $g_{i2}(t,x_{i2})=x_{i2}$, $x_i(t)=[x_{i1}(t),x_{i2}(t)]^{\mathrm{T}}$. 取 $V_i=|x_i|^2/2, k_i^g=1$, $i\in N, c_1=c_2=0.5$, $c_3=4$, $c_4=1, c_5=2$. 系统常数矩阵为

$$D_{i1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\ D_{i2}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$
$$F_{i1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\ F_{i2}=\begin{bmatrix}1&0.5\\1&1\end{bmatrix}.$$

易验证条件 (7)∼(11) 都满足, 由定理 1 可知系统 (19) 的平衡点是全局指数稳定的.

5　结　论

本文从分析与大系统关联的系数矩阵入手, 通过构造向量 Lyapunov 函数, 利用箱体理论研究了一类无限维随机非线性大系统的全局指数稳定性, 得到了该类大系统全局指数稳定的一个充分条件. 与以前文献相比, 所得结论的参数范围较宽, 在处理具有强耦合项的关联系统时更为有效. 此外, 以箱体理论为基础, 所得结论可以进一步推广到非自治复合随机系统

和非线性奇异摄动复合随机系统.

参考文献(References)

[1] Chang M H. Stability of interconnected stochastic delay system[J]. Applied Mathematics and Computation, 1985, 16(3): 277-295.

[2] 邓飞其, 冯昭枢, 刘永清. 时不变线性Ito随机系统均方稳定性的充要条件[J]. 控制理论与应用[J], 1996, 13(4): 441-447.
(Deng F Q, Feng Z S, Liu Y Q. Mean-square stability and feedback stabilization of linear delay stochastic systems[J]. Control Theory & Applications, 1996, 13(4): 441-447.)

[3] 冯昭枢, 邓飞其, 刘永清. 时变滞后随机大系统的稳定性: 向量Lyapunov函数法[J]. 控制理论与应用, 1996, 13(3): 371-375.
(Feng Z S, Deng F Q, Liu Y Q. Stability of time-varying large-scale delay stochastic systems: vector lyapunov function method[J]. Control Theory & Applications, 1996, 13(3): 371-375.)

[4] Hiroaki Mukaidani. Decentralized stochastic guaranteed cost control for uncertain nonlinear large-scale interconnected systems under gain perturbations[C]. Proc of the American Control Conf. St.Louis: IEEE Press Piscataway, 2009: 5097-6012.

[5] Wu S, Deng F Q. Decentralized state feedback adaptive tracking for a class of stochastic nonlinear large-scale systems[C]. Proc of the 7th Int Conf on Machine Learning and Cybernetics. Kunming: IEEE Press, 2008: 2287-2292.

[6] Wu W B, Chen P C, Chang Y H, et al. LMI decentralized controller design for stochastic large-scale time-delay systems[C]. Proc of the IEEE Int Conf on Control Applications. Taipei, 2004: 632-637.

[7] 傅朝金, 胡宏昌. 一类随机大系统的稳定性[J]. 应用数学, 2002, 15(3): 120-124.
(Fu C J, Hu H C. Stability for a class of stochastic large scale system[J]. Mathematica Applicata, 2002, 15(3): 120-124.)

[8] 江明辉, 沈轶, 蹇继贵. 时滞随机线性大系统的指数稳定性[J]. 系统工程学报, 2005, 20(6): 564-569.
(Jiang M H, Shen Y, Jian J G. Exponential stability of linear stochastic large-scale system with time-delay[J]. J of Systems Engineering, 2005, 20(6): 564-569.)

[9] Chu K C. Decentralized control of high speed vehicle strings[J]. Transport Res, 1974, 8(4): 361-383.

[10] Swaroop D, Hedrick J K, Chen C C, et al. A comparison of spacing and headway control laws for automatically controlled vehicles[J]. Vehicle System Dynamics, 1994, 23(1): 597-625.

[11] Swaroop D, Hedrick J K. String stability of interconnected systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1996, 41(3): 349-357.

[12] 张继业, 杨翊仁, 曾京. 无限维关联系统的弦稳定性[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(7): 715-719.
(Zhang J Y, Yang Y R, Zeng J. String stability of infinite interconnected system[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(7): 715-719.)

[13] Socha L. Stochastic stability of interconnected string systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(4): 949-955.

[14] Has0minski R Z, Khasminski R Z, Swierczkowski S. Stochastic stability of differential equations[M]. Berlin: Springer, 1980: 35-72.

(上接第393页)

[12] 姚天祥, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型的特性与优化[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(3): 142-147.
(Yao T X, Liu S F. Characteristics and optimization of discrete GM(1,1) model[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2009, 29(3): 142-147.)

[13] 谢乃明, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的离散灰色模型特性研究[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(5): 863-867.
(Xie N M, Liu S F. Research on the non-homogenous discrete grey model and its parameter's properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(5): 863-867.)

[14] 谢乃明, 刘思峰. 多变量离散灰色模型及其性质[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(6): 143-150.
(Xie N M, Liu S F. Research on the discrete grey model of multi-variables[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2008, 28(6): 143-150.)

[15] 谢乃明, 刘思峰. GM(n,h)模型建模序列数据数乘变换特性研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(9): 1294-1299.
(Xie N M, Liu S F. Research on property of GM(n,h) model under data multiple transformation[J]. Control and Decision, 2009, 24(9): 1294-1299.)