文章编号: 1001-0920 (2012) 03-0408-05

二型模糊集的模糊熵研究

邓廷权[1], 王占江[1,2], 汪培培[1], 盛春冬[1]

(1. 哈尔滨工程大学 理学院，哈尔滨 150001；2. 91796 部队，辽宁 葫芦岛 125001)

摘　要: 研究基于质心的二型模糊集的模糊熵和加权模糊熵, 构造了两个二型模糊集的模糊熵度量. 针对二型模糊集的特殊情形, 提出一种新的区间值模糊集的模糊熵度量, 既弥补了现有区间值模糊集退化为普通模糊集时熵为零的不足, 又克服了两个明显不同的区间值模糊集熵相等的缺点. 数值实例和仿真实验表明了所提出模糊熵的合理性和实用性.

关键词: 二型模糊集；区间值模糊集；模糊熵度量

中图分类号: TP301　　　　**文献标识码:** A

Study on fuzzy entropy of type-2 fuzzy sets

DENG Ting-quan[1], *WANG Zhan-jiang*[1,2], *WANG Pei-pei*[1], *SHENG Chun-dong*[1]

(1. College of Science，Harbin Engineering University，Harbin 150001，China；2. Unit 91796，Huludao 125001, China．Correspondent：DENG Ting-quan，E-mail：Deng.tq@hrbeu.edu.cn)

Abstract: Centroid fuzzy entropy and weighted fuzzy entropy of type-2 fuzzy sets are studied, and their expressions are constructed. For the special case of type-2 fuzzy sets, a new definition of fuzzy entropy of interval-valued fuzzy sets is proposed, which remedies the shortcomings of existing ones in the cases that when an interval-valued fuzzy set degenerates the ordinary fuzzy set, its entropy is zero, and that two distinct interval-valued fuzzy sets have the same fuzzy entropy. Numerical examples show the rationality and practicality of the proposed fuzzy entropy.

Key words: type-2 fuzzy sets；interval-valued fuzzy sets；fuzzy entropy

1 引　言

Zadeh[1]建立的模糊集理论有效地解决了经典数学难以解决和无法解决的具有模糊性的实际问题. 目前, 模糊集理论在工农业生产、航空航天、生物医疗、机器视觉等各个领域中发挥着重要的作用, 它将是本世纪人工智能取得重大发展的突破口之一.

随着理论研究的深入和实际应用的发展, 传统的模糊集遇到了无法解决的隶属度不确定性难题, 从而产生了二型模糊集[2-5]. 二型模糊集采用两个隶属度后, 能够较为准确地描述隶属度的模糊性问题. 因为普通模糊集中的很多概念在二型模糊集理论中还不成熟, 例如二型模糊集的质心、基数、相似度以及距离等都没有准确的定义, 同时二型模糊集的模糊性度量也较少, 所以研究二型模糊集及其应用较为困难. 构造新的二型模糊集的模糊熵, 研究其性质, 目的在于找到更加实用的模糊测度, 以推动二型模糊集的模糊熵理论的发展, 为完善模糊集理论做出有益的探索.

2 模糊集与模糊熵

2.1 模 糊 集

模糊集将普通集合特征函数的取值范围由 {0, 1} 推广到 [0,1]. 假设在论域 X 上给定一个映射 $A: X \to [0,1]$, A 为 X 的一个模糊集, $A(x)$ 为模糊集 A 的隶属函数, 论域 X 上的全体模糊集记为 $\mathcal{F}(X)$.

二型模糊集是一般模糊集概念的推广, 由主、次两个隶属函数来刻画集合的模糊程度.

定义 1　对于模糊集 $\tilde{A}$, $\forall x \in X$, 指定一个一型模糊子集 A 与之对应, 即 $x \in X$ 在 A 中的隶属度是 [0,1] 上的一个经典模糊集合 (不是一个确切的数值), 记作 $\mu_{\tilde{A}}(x,u) = \int_{u\in[0,1]} f_x(u)/u$, 称 $\tilde{A}$ 为一个二型模糊集, 记为[2] $\tilde{A} = \int_{x\in X}\int_{u\in J_x} f_x(u)/u/x$.

对于离散情况, 假设论域 X 中含有 N 个点 x_1, $x_2, \cdots, x_N$, 则有

$$\mu_{\tilde{A}}(x,u) =$$

收稿日期: 2010-10-09；**修回日期:** 2010-12-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10771043).

作者简介: 邓廷权(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事图像分析、粗集理论与模糊逻辑等研究；王占江(1970−), 男, 高级讲师, 从事模式识别等研究.

$$f_x(u_1)/u_1 + f_x(u_2)/u_2 + \cdots + f_x(u_n)/u_n = \sum_i f_x(u_i)/u_i, \tag{1}$$

$$\tilde{A} = \sum_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}/x = \sum_{x\in X} \Big[\sum_{u\in J_x} f_x(u)/u\Big]\Big/x, \tag{2}$$

其中 u_i 为 x 在 $\tilde{A}$ 中的主 (首) 隶属度或第一隶属度, 每个主隶属度 u_i 的隶属度值 $f_x(u)$ 为 $\tilde{A}$ 的次隶属度, 如图 1 所示. 全体二型模糊集记为 $\mathcal{F}_2(X)$.

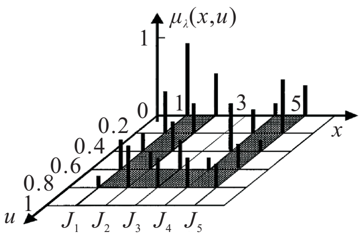


图 1　二型模糊隶属函数示意图

定义 2　若二型模糊集合 $\tilde{A}$ 的次隶属度全部退化为 0 或 1, 则首隶属度对应的集合只是一个区间集, 称此类二型模糊集为区间值模糊集, 记作

$$\tilde{A} = \{(x, A(x) = [\underline{A}(x), \overline{A}(x)]) | x \in X\}. \tag{3}$$

其中: 映射 $A: X \to L([0,1])$ 为 $\tilde{A}$ 的隶属函数; $\underline{A}(x)$, $\overline{A}(x)$ 分别为 x 属于 $\tilde{A}$ 的下隶属度和上隶属度; $L([0,1])$ 为 [0,1] 区间上的闭子区间[6-7]. 用 IVFS(X) 表示 X 上全体区间值模糊集, 则区间值模糊集是一种特殊类型的二型模糊集.

2.2　模 糊 熵

在信息论中, 熵是不确定性事件的一种度量. 将熵推广到模糊集上称为模糊熵, 它用来描述一个模糊集的模糊性程度, 用符号 E 表示. 在区间 [0,1] 上, 若一个模糊集的隶属值越接近 0 或 1, 则其模糊性越小, 若越接近 1/2, 则其模糊性越大, 因此, 分明集的模糊性为零. De 等人[8]提出了模糊集的模糊熵公理.

定义 3　称实函数 $E: \mathcal{F}(X) \to R^+$ 为 $\mathcal{F}(X)$ 上的模糊熵, 若 E 满足以下公理, 则 E 可作为模糊集的模糊熵度量[9-11]:

公理 1　$\forall D \in P(X), E(D) = 0$, 其中 $P(X)$ 为 X 的幂集;

公理 2　$E([1/2]) = \max\limits_{A\in\mathcal{F}(X)} E(A)$, 其中 [1/2] 表示隶属值全等于 1/2 的模糊集;

公理 3　$\forall A, A^* \in \mathcal{F}(X)$, 若 $1/2 \leqslant A(x) \leqslant A^*(x)$, 或 $A^*(x) \leqslant A(x) < 1/2$, 则 $E(A) \geqslant E(A^*)$;

公理 4　$E(A) = E(A^c)$.

3　二型模糊集的质心模糊熵和加权模糊熵

将普通模糊集的概念推广到二型模糊集时, 构建二型模糊熵遇到了许多问题. 如: 一般的二型模糊集的质心、基数、相似度以及距离如何给定? 比较两个二型模糊集锐化问题, 何时模糊度最大? 较少学者给出了一般二型模糊集的模糊性度量, 且至今没有给出二型模糊集熵的概念. 本文依据一型模糊集的模糊熵公理, 给出了基于质心的模糊性度量和两种加权模糊熵公式.

3.1　基于质心的模糊性度量

由于普通模糊熵理论已相对成熟, 考虑将二型模糊集降阶为普通模糊集后再计算其模糊熵. 沿此思路, 将主隶属度的质心作为元素的隶属度, 这样二型模糊集就降阶为普通模糊集, 进而可以方便地求取模糊熵.

定义 4　模糊集 $A \in \mathcal{F}(X)$ 的质心定义为

$$C(A) = \sum_{i=1}^{N} x_i A(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{N} A(x_i). \tag{4}$$

定义 5　设 $\tilde{E}_1: \mathcal{F}_2(X) \to R^+$, 定义

$$\tilde{E}_1(\tilde{A}) = E(A'). \tag{5}$$

其中

$$A' = C(\mu_{\tilde{A}}(x_1, u))/x_1 + C(\mu_{\tilde{A}}(x_2, u))/x_2 + \cdots + C(\mu_{\tilde{A}}(x_N, u))/x_N,$$

称 $\tilde{E}_1(A)$ 为二型模糊集 $\tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X)$ 的质心模糊熵.

性质 1　$\forall D \in P(X), \tilde{E}_1(D) = 0$.

证明　因为 $D \in P(X) \Rightarrow D' \in P(X)$, 由模糊熵公理 1, 有 $\tilde{E}_1(D) = E(D') = 0$. □

性质 2　$\forall \tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X)$, 有 $\tilde{E}_1(\tilde{A}) = \tilde{E}_1((\tilde{A})^c)$.

证明　令 $\tilde{B} = (\tilde{A})^c$, 有

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \sum_{u\in J_x} f_x(u)/(1-u),$$

对于 $\forall x_i \in X,\ i = 1, 2, \cdots, N$, 有

$$C(\mu_{\tilde{B}}(x_i, u)) = \sum_{k=1}^{M_i} (1-u_{ik}) f_{x_i}(u_{ik}) \Big/ \sum_{k=1}^{M_i} f_{x_i}(u_{ik}) = 1 - \sum_{k=1}^{M_i} u_{ik} f_{x_i}(u_{ik}) \Big/ \sum_{k=1}^{M_i} f_{x_i}(u_{ik}) = 1 - C(\mu_{\tilde{A}}(x_i, u)) = (A'(x_i))^c. \tag{6}$$

式 (6) 表明 $B' = (A')^c$, 由模糊熵公理 4, 有

$$\tilde{E}_1(\tilde{A}) = E(A') = E((A')^c) = E(B') = \tilde{E}_1(B) = \tilde{E}_1((\tilde{A})^c).$$
□

定义 6　设 $[1/2] = 0.5/u_1 + 0.5/u_2 + \cdots + 0.5/u_N$ 为 $[0,1]$ 上的一个一型模糊集, 则二型模糊集 $[\tilde{1/2}]$ 定义为

$$[\tilde{1/2}] = [1/2]/x_1 + [1/2]/x_2 + \ldots + [1/2]/x_N. \tag{7}$$

即 $[\tilde{1/2}]$ 每点的隶属度都是一型模糊集 [1/2]. 如果将

[0,1] 区间离散化为 $0, 0.1, \cdots, 1$, 则 $[1\tilde{/}2]$ 可改写为

$$[1\tilde{/}2](x) = 0.5/0/x + 0.5/0.1/x + \cdots + 0.5/1/x,\quad x \in X. \tag{8}$$

性质 3　$\tilde{E}_1([1\tilde{/}2]) = \max\limits_{\tilde{A}\in\mathcal{F}_2(X)} \tilde{E}_1(\tilde{A})$.

证明　根据定义 6 所定义的 $[1\tilde{/}2]$, 有 $[1/2]' = [1/2]$, 所以对于 $\forall \tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X)$, 有

$$\tilde{E}_1(\tilde{A}) = E(A') \leqslant E([1/2]) = E([1/2]') = \tilde{E}_1([1\tilde{/}2]),$$

即 $\tilde{E}_1([1\tilde{/}2]) = \max\limits_{\tilde{A}\in\mathcal{F}_2(X)} \tilde{E}_1(\tilde{A})$. □

因为二型模糊集的隶属值是由一型模糊集表示的, 所以二型模糊集的模糊熵性质不满足一型模糊集的模糊熵公理 3.

例 1　设

$$X = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$\tilde{A} = (0.5/0.9)/x_1 + (0.2/0.7)/x_1 + (0.9/0.2)/x_1 + (0./0.)/x_2 + (0.6/0.6)/x_2 + (0.1/0.4)/x_2 + (0.7/0.3)/x_3 + (0.8/0.5)/x_3 + (0.3/0.2)/x_3,$$

根据式 (4), 有

$$A' = 0.481\,3/x_1 + 0.571\,4/x_2 + 0.372\,2/x_3.$$

采用由 Pedrycz 给出的一型模糊集的模糊熵[8]

$$E(A) = 2\sum_{i=1}^{N} \min\{A(x_i), 1 - A(x_i)\},$$

得到二型模糊集 $\tilde{A}$ 的模糊熵为

$$\tilde{E}_1(\tilde{A}) = E(A') = 2(0.483\,1 + 0.428\,6 + 0.372\,2) = 2.567\,8.$$

3.2　加权模糊熵

考虑到二型模糊集中每点的主隶属度的熵对整个模糊度的影响, 引入加权模糊熵定义.

定义 7　$\tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X)$ 的加权模糊熵 $\tilde{E}_2 : \mathcal{F}_2(X) \to R^+$ 定义为二型模糊集的主隶属度 (一型模糊集) 的模糊熵的平均值, 即

$$\tilde{E}_2(\tilde{A}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(\mu_A(x_i, u)). \tag{9}$$

性质 4　$\forall D \in P(X),\ \tilde{E}_2(D) = 0$.

证明　$\forall D \in P(X)$, 有 $\mu_D(x, u) \in P(X)$, 所以有 $\tilde{E}_2(D) = 0$. □

性质 5　$\tilde{E}_2([1\tilde{/}2]) = \max\limits_{\tilde{A}\in\mathcal{F}_2(X)} \tilde{E}_2(\tilde{A})$.

证明　对于 $\forall \tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X)$, 根据定义 6 的 $[1\tilde{/}2]$, 有

$$\tilde{E}_2(\tilde{A}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(\mu_A(x_i, u)) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E([1/2]) = \tilde{E}_2([1\tilde{/}2]),$$

即 $\tilde{E}_2([1\tilde{/}2]) = \max\limits_{\tilde{A}\in\mathcal{F}_2(X)} \tilde{E}_2(\tilde{A})$. □

性质 6　$\forall \tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X),\ \tilde{E}_2(\tilde{A}) = \tilde{E}_2((\tilde{A})^c)$.

证明　二型模糊集的补运算是对首隶属度求补, 而次隶属度保持不变, 对于模糊集 $\mu_A(x_i, \mu)(i = 1, 2, \cdots, N)$ 而言, 只是论域变为原来的补集, 而隶属度没变, 所以在求补后 $E(\mu_A(x_i, \mu))$ 不变, 有 $\tilde{E}_2(\tilde{A}) = \tilde{E}_2((\tilde{A})^c)$. □

定义 8　$\tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X)$ 的加权模糊熵 $\tilde{E}_3 : \mathcal{F}_2(X) \to R^+$ 定义为

$$\tilde{E}_3(\tilde{A}) = \frac{1}{n_A}\sum_{j=1}^{N_A} \lambda_j E(A_e^j). \tag{10}$$

其中: A_e^j 为 $\tilde{A}$ 的第 j 个内嵌一型模糊集[2,12]; $\lambda_j = t(f_{x_1}(u_1^j), f_{x_2}(u_2^j), \cdots, f_{x_N}(u_N^j))$; t 为 t- 范数.

性质 7　$\forall D \in P(X),\ \tilde{E}_3(D) = 0$.

证明过程略.

性质 8　$\forall \tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X),\ \tilde{E}_3(\tilde{A}) = \tilde{E}_3((\tilde{A})^c)$.

证明　存在

$$\tilde{E}_3(\tilde{A}) = \frac{1}{n_A}\sum_{j=1}^{n_A} \lambda_j E(A_e^j) = \frac{1}{n_A}\sum_{j=1}^{n_A} \lambda_j E((A_e^j)^c) = \tilde{E}_3((\tilde{A})^c).$$ □

注 1　加权模糊熵类似于二型模糊集的波浪切片, 所以计算量较大, 仅适于理论研究. $\tilde{E}_2$ 的计算量虽然很小, 但不够直观, 并且仅用到了次隶属度的信息, 因此还不完善, 有待进一步研究.

4　特殊的二型模糊集-区间值模糊集的模糊熵

第 3 节中构造的二型模糊集的模糊熵仅限于理论研究, 实际上, 区间值模糊集的熵已被广泛应用.

Burillo 等人[6]首次提出区间值模糊集的熵概念, 其基本形式为

$$\tilde{E}(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{N} (A^+(x_i) - A^-(x_i)). \tag{11}$$

Zeng 等人[13]研究了区间值模糊集的熵的公理化, 同时给出了区间值模糊集的熵的度量

$$\tilde{E}(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1 - \max(1 - A^+(x_i), A^-(x_i))}{1 - \min(1 - A^+(x_i), A^-(x_i))}. \tag{12}$$

容易看出, 式 (11) 所定义的区间值模糊集的熵只用到了区间的未知度, 即 $A^+(x_i) - A^-(x_i)$. 当区间值模糊集退化为普通模糊集时, 其熵为零, 即不存在模糊度, 这显然不符合直觉. 式 (12) 定义的区间值模糊集熵虽然克服了 (12) 中当区间值模糊集退化为普通

模糊集时模糊度为零的缺点, 但其本身也存在不合理的地方. 如对于区间值模糊集 $\tilde{A},\tilde{B}: A^-(x_i)=0.1$, $A^+(x_i)=0.9$, $B^-(x_i)=0.4$, $B^+(x_i)=0.6$ $(\forall i=1,2,\cdots,N)$, 由式 (11) 有 $\tilde{E}(\tilde{A})=\tilde{E}(\tilde{B})=1$, 显然不符合直觉, 应该有 $\tilde{E}(\tilde{A})>\tilde{E}(\tilde{B})$.

定义 9 (改进的区间值模糊熵) 实函数 $\tilde{E}$: $\mathrm{IVFS}(X)\to R^+$ 称为区间值模糊集上的熵, 若其满足如下条件:

1) $\forall D\in P(X), \tilde{E}(D)=0$.

2) $\tilde{E}(\tilde{A})=\max\limits_{\tilde{B}\in \mathrm{IVFS}(X)}\tilde{E}(\tilde{B})$, 其中 $\forall x\in X$, $A^-(x)=0, A^+(x)=1$.

3) $\tilde{E}(\tilde{A})\leqslant\tilde{E}(\tilde{B})$, 如果 $\tilde{A}$ 不如 $\tilde{B}$ 模糊, 则对于 $\forall i=1,2,\cdots,N$, 存在:

① 当 $B^+(x_i)\leqslant 0.5$ 时, 有

$$A^-(x_i)\leqslant B^-(x_i),\ A^+(x_i)\leqslant B^+(x_i);$$

② 当 $B^-(x_i)\geqslant 0.5$ 时, 有

$$A^-(x_i)\geqslant B^-(x_i),\ A^+(x_i)\geqslant B^+(x_i);$$

③ 当 $B^-(x_i)<0.5<B^+(x_i)$ 时, 有

$$B^-(x_i)<A^-(x_i)<0.5<A^+(x_i)<B^+(x_i).$$

④ $\tilde{E}(\tilde{A})=\tilde{E}(\tilde{A}^c)$.

定理 1 由区间值模糊熵公理可知

$$\tilde{E}(\tilde{A})=\sum_{x_i\in X'}(A^+(x_i)-A^-(x_i))+\sum_{x_i\in X/X'}\frac{\min(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}{\max(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}\tag{13}$$

是一个区间值模糊集 $\tilde{A}$ 的模糊熵, 其中

$$X'=\{x_i|A^-(x_i)<0.5<A^+(x_i),\ i=1,2,\cdots,N\}.$$

证明 1) $\forall D\in P(X)$, 有 $D^-(x_i)=D^+(x_i)=0$ 或 $D^-(x_i)=D^+(x_i)=1$, 根据式 (4), 有 $\tilde{E}(D)=0$.

2) 对于 $\tilde{A},\tilde{B}\in \mathrm{IVFS}(X)$, $\forall i=1,2,\cdots,N$, 有 $A^-(x_i)=0, A^+(x_i)=1$, 且 $\tilde{B}\neq\tilde{A}$. 由式 (11) 有

$$\tilde{E}(\tilde{A})=\sum_{i=1}^{N}(A^+(x_i)-A^-(x_i))=\sum_{i=1}^{N}1=N.$$

而对于 $\forall i=1,2,\cdots,N$, 当 $B^-(x_i)<0.5<B^+(x_i)$ 时, $B^+(x_i)-B^-(x_i)<1$, 对于其他情况, 有

$$\frac{\min(B^-(x_i),1-B^+(x_i))}{\max(B^-(x_i),1-B^+(x_i))}<1.$$

所以 $\tilde{E}(\tilde{B})<N=\tilde{E}(\tilde{A})$, 即

$$\tilde{E}(\tilde{A})=\max_{\tilde{B}\in \mathrm{IVFS}(X)}\tilde{E}(\tilde{B}),$$

$$\forall x\in X,\ A^-(x)=0,\ A^+(x)=1.$$

3) 设 $\tilde{A},\tilde{B}\in \mathrm{IVFS}(X)$, $\tilde{A}$ 不如 $\tilde{B}$ 模糊, 下面分 3 种情况进行讨论:

① 当 $B^-(x_i)<0.5<B^+(x_i)$ 时, 有 $B^-(x_i)<A^-(x_i)<0.5<A^+(x_i)<B^+(x_i)$, 显然, $A^-(x_i)\leqslant B^-(x_i)$, $A^+(x_i)\leqslant B^+(x_i)$;

② 当 $B^+(x_i)\leqslant 0.5$ 时, $A^-(x_i)\leqslant B^-(x_i)$, $A^+(x_i)\leqslant B^+(x_i)$, 则有

$$\frac{\min(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}{\max(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}=\frac{A^-(x_i)}{1-A^+(x_i)}\leqslant\frac{B^-(x_i)}{1-B^+(x_i)}=\frac{\min(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}{\max(A^-(x_i),1-A^+(x_i))};$$

③ 当 $B^-(x_i)\geqslant 0.5$ 时, $A^-(x_i)\geqslant B^-(x_i)$, $A^+(x_i)\geqslant B^+(x_i)$, 则有

$$\frac{\min(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}{\max(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}=\frac{1-A^+(x_i)}{A^-(x_i)}\leqslant\frac{1-B^+(x_i)}{B^-(x_i)}=\frac{\min(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}{\max(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}.$$

综合以上 3 种情况, 有 $\tilde{E}(\tilde{A})\leqslant\tilde{E}(\tilde{B})$.

④ 因为 $((\tilde{A})^c)^-(x)=1-A^+(x)$, $((\tilde{A})^c)^+(x)=1-A^-(x)$, 所以有

$$\begin{aligned}&\tilde{E}((\tilde{A})^c)=\\&\sum_{x_i\in X'}((1-A^-(x_i))-(1-A^+(x_i)))+\\&\sum_{x_i\in X/X'}\frac{\min(1-A^+(x_i),1-(1-A^-(x_i)))}{\max(1-A^+(x_i),1-(1-A^-(x_i)))}=\\&\sum_{x_i\in X'}(A^+(x_i)-A^-(x_i))+\\&\sum_{x_i\in X/X'}\frac{\min(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}{\max(A^-(x_i),1-A^+(x_i))}=\tilde{E}(\tilde{A}).\end{aligned}$$ □

本文构造的区间值模糊集的熵结合了文献 [12-13] 的熵定义, 同时考虑了隶属度的未知区间度和退化为普通模糊集时的模糊度, 弥补了不足, 符合直觉, 更适用于实际应用.

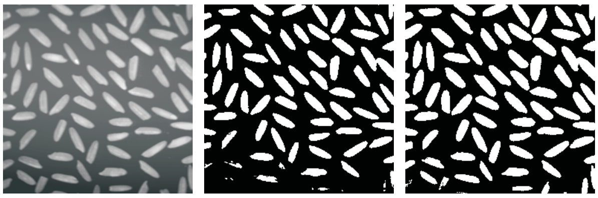
例 2 设区间值模糊集

$$\begin{aligned}\tilde{A}=&[0.1,0.4]/x_1+[0.2,0.7]/x_2+\\&[0.3,0.5]/x_3+[0.6,1]/x_4,\end{aligned}$$

显然, $X'=\{x_2\}$, 则由式 (13) 得

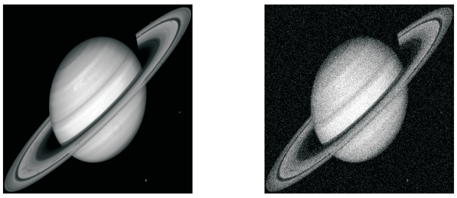
$$\tilde{E}(\tilde{A})=(0.7-0.2)+\frac{\min(0.1,1-0.4)}{\max(0.1,1-0.4)}+\frac{\min(0.3,1-0.5)}{\max(0.3,1-0.5)}+\frac{\min(0.6,1-1)}{\max(0.6,1-1)}=1.266\,7.$$

例 3 利用区间值模糊熵对图像进行全局阈值分割, 用 Matlab 分别对 rice 图像和 saturn 原图进行分割, 对比结果如图 2 和图 3 所示. 在图 2 和图 3 中, 图 2(b) 阈值为 135, 目标下部部分信息丢失, 图 2(c) 阈值为 113, 分割结果明显好于图 2(b). 图 3(b) 为图 3(a) 加入了 1 % 高斯噪声所得的图像, 图 3(c) 阈值为 66, 图 3(d) 阈值为 73, 由图 3(c) 和图 3(d) 可以看出, 新算法的抗噪能力比基于普通模糊集算法的抗噪能力要强.

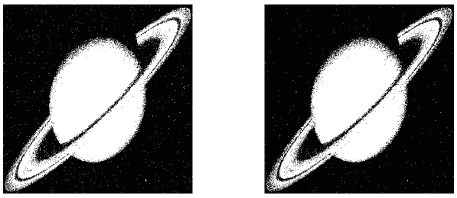


(a) rice原图　(b) 普通模糊熵分割结果　(c) 新算法分割结果

图 2　rice图像分割结果



(a) saturn原图　(b) 加噪后的saturn图



(c) 普通模糊熵分割结果　(d) 新算法分割结果

图 3　saturn图像分割结果

5 结　论

本文提出了基于质心的二型模糊集的模糊熵、加权模糊熵和一种新的区间值模糊熵的度量. 新的区间值模糊集的模糊熵融合了Bustince和Zeng给出的模糊熵, 将论域分成两个部分, 并分别给出了不同的表达式. 新的模糊熵克服了Bustince和Zeng给出的模糊熵的不足. 数值实例和仿真实验验证了新的模糊熵的合理性和实用性.

参考文献(**References**)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. Information Science, 1975, 8(3): 199-249.

[3] Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(2): 117-127.

[4] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004: 20-40.
(Hu B Q. Fundamentals of fuzzy theory[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2004: 20-40.)

[5] Niewiadomski A. Imprecision measures for type-2 fuzzy sets: Applications to linguistic summarization of databases[J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2008, 5097: 285-294.

[6] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 78(3): 305-316.

[7] 俞峰, 杨成梧. 直觉区间值模糊集的熵、距离测度和相似测度[J]. 计算机科学, 2008, 35(6): 199-201.
(Yu F, Yang C W. Entropy, distance measure and similarity measure of intuitionistic interval-valued fuzzy sets[J]. Computer Science, 2008, 35(6): 199-201.)

[8] De Luca A, Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in setting of fuzzy sets theory[J]. Information and Control, 1972, 20(4): 301-312.

[9] Pedyrez W. Why triangular membership function[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(1): 21-30.

[10] Pedyrez W. Interfaces of fuzzy models: A study in fuzzy information processing[J]. Information Science, 1996, 90(1-4): 231-280.

[11] Chen Y H, Wang W J. Fuzzy entropy management via scaling, elevation and saturation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95(2): 173-178.

[12] Wu D R, Mendel J M. Uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(23): 5378-5393.

[13] Zeng W Y, Li H X. Relationship between similarity measure and entropy of interval valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(11): 1447-1484.