

文章编号: 1001-0920(2012)04-0494-07

具有多个通信时延的多智能体系统分布式 H_∞ 一致性控制

刘学良, 胥布工

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640)

摘要: 考虑具有多个时变时延和外部噪声干扰的一阶多智能体系统 H_∞ 一致性问题, 分别讨论了固定和变化网络拓扑情形. 首先, 对原来的系统作一个模型变换使之转化为一个降阶的子系统; 其次, 根据得到的降阶系统, 通过构建适当的 Lyapunov 函数, 得到了所有智能体状态达到一致并满足期望的 H_∞ 性能的充分条件. 仿真结果验证了所提出的一致性协议的正确性和有效性.

关键词: 多智能体系统; 一致性; H_∞ 控制; 多时延

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Distributed H_∞ consensus control for multiple-agent systems with communication delays

LIU Xue-liang, XU Bu-gong

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China.

Correspondent: LIU Xue-liang, E-mail: liuxueliang83@163.com)

Abstract: This paper considers H_∞ consensus problems for first-order multi-agent systems with multiple time-varying communication delays and external disturbances. Both networks under fixed and switching topologies are taken into consideration. Firstly, a model transformation is performed, and the original system is turned into a reduced order system. Then, based on the reduced order system, by constructing a proper Lyapunov function, sufficient conditions are derived for all agents to reach an agreement with the desired H_∞ performance. Finally, the simulation results show the correctness and effectiveness of the designed protocols.

Key words: multi-agent systems; consensus; H_∞ control; time delays

1 引言

近年来, 多智能体或多主体系统一致性问题已成为国内外研究者的关注点. 一致性问题是指随着时间的变化, 多智能体系统中各主体之间通过通信协调使所有智能体的状态趋于一致. 一致性问题有着广泛的应用背景, 如: 多智能体系统在无人驾驶飞机协调控制、多机器人编队控制^[1-3]、多智能体群集运动^[4-6]和分布式传感器网络^[7-10]的应用等. 近年来, 关于智能体的研究进展可参见文献 [11-13].

一致性问题的关键是设计适当的协议或算法使得多智能体系统的状态渐近地或有限时间内达到一致. 在实践中, 信息的发送和接收过程中不可避免地存在时延, 当存在通信时延时, 普通的一致性算法可

能不能实现一致性^[14]. 另一方面, 因为时延、噪声、丢包、通信带宽受限等原因, 智能体之间不能获得精确的邻居状态信息, 导致整个多智能体系统状态发散.

对于网络存在通信时延的一致性研究, 国内外学者得到了许多有价值的结果. 文献 [15] 考虑了多智能体系统中存在多个时变的通信时延和信道传输噪声情形, 用随机方法研究了固定和变化网络拓扑下的几乎处处一致性和均方一致性问题. [16] 研究了具有多个时延的有向网络多智能体平均一致性问题, 得到了通信时延的最大上界. [17] 考察了系统模型含有时变的通信时延、不确定性和外部干扰的分布式鲁棒 H_∞ 一致性问题, 通过模型变换简化了问题分析, 得到了智能体达到一致的充分条件. 但是, 以上文献均

收稿日期: 2010-10-10; 修回日期: 2011-01-16.

基金项目: 国家自然科学基金-广东省联合基金重点项目(U0735003); 国家自然科学基金项目(61174070); 海外及港澳合作项目(60828006); 国家教育部回国人员科研启动基金项目.

作者简介: 刘学良(1983-), 男, 博士生, 从事多智能体系统协调控制、时延系统的研究; 胥布工(1956-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制及其应用等研究.

假设智能体在每一个时刻点接收到其邻居信息具有同一时延. 本文在 [17] 提出的连续时间多智能体系统的基础上, 研究了个体从其邻居接收到不同通信时延, 得到多智能体系统达到一致性并满足期待的 H_∞ 性能的充分条件. 与 [15] 不同的是, 本文利用线性矩阵不等式方法来研究一致性问题.

符号说明如下: 对于任意两个对称矩阵 X 和 Y , $X \geq Y (X > Y)$ 表示 $X - Y$ 是一个半正定 (正定) 矩阵; 1_N 是每一个元素都是 1 的 $N \times 1$ 列向量; I_N 是 $N \times N$ 的单位矩阵; 上标 T 表示矩阵的转置; $\text{diag}\{A, B\}$ 是一个以 A 和 B 为对角元素的分块对角矩阵.

2 预备知识

令 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 为一个权重有向图, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 是顶点集合, 顶点 i 表示第 i 个智能体, \mathcal{E} 是边集合. 记图 \mathcal{G} 的一条有向边为一个有向对 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$, 有向边 (v_i, v_j) 表示智能体 j 能够接收到智能体 i 发来的信息. 智能体 j 是智能体 i 的一个邻居, 当且仅当智能体 i 能够接收到智能体 j 发送的信息. 将第 i 个智能体的所有邻居集合记为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$. 若智能体 i 没有邻居且它是别的智能体的邻居, 则将其称为一个源智能体 (源顶点); 如果智能体 i 没有邻居且它不是任何智能体的邻居, 则将其称为一个孤立智能体. 将 \mathcal{V} 中所有源智能体和孤立智能体集合记为 \mathcal{V}_s . 一列有序边 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ 称为顶点 $i_1 \sim i_k$ 的有向路径. 有向树是一个有向图, 除一个顶点是源顶点外, 其余的各顶点只有一个邻居. 图 \mathcal{G} 的一个有向生成树是一个有向树且顶点集合为 \mathcal{V} , 边集合是 \mathcal{E} 的一个子集.

$\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 称为图 \mathcal{G} 的权重邻接矩阵, 其中 \mathcal{A} 中的元素 a_{ij} 取 0 或 1, 且 \mathcal{A} 的对角线元素为 0. 若 $j \in \mathcal{N}_i$, 即图 \mathcal{G} 中含有有向边 (v_j, v_i) , 则 \mathcal{A} 中 (i, j) 元素 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$. 顶点 i 的入度和出度分别定义为 $\text{deg}_{\text{in}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 和 $\text{deg}_{\text{out}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$. 图 \mathcal{G} 是一个平衡图当且仅当每个顶点的入度和出度相等, 即 $\text{deg}_{\text{in}}(i) = \text{deg}_{\text{out}}(i), \forall i = 1, 2, \dots, N$. 图 \mathcal{G} 的拉氏矩阵 $\mathcal{L} = [l_{ij}]$ 定义为

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i; \\ \sum_{j=1}^N a_{ij}, & j = i. \end{cases}$$

3 系统模型

假设一个多智能体网络包含 N 个智能体, 记为 $1 \sim N$. 考虑如下一阶连续时间多智能体系统:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + \omega_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$z_i(t) = x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t). \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbf{R}$ 为智能体 i 的位置状态, $u_i(t) \in \mathbf{R}$ 为控制输入, $z_i(t) \in \mathbf{R}$ 为智能体 i 的输出状态, $\omega_i(t) \in l_2[0, \infty)$ 为外部干扰噪声. 智能体的初始状态 $x(0)$ 为已知常数.

注 1 目标是使多智能体系统状态达到一致, 结合智能体的相对状态信息, 定义智能体 i 的输出 $z_i(t)$ 为当前时刻它自身的状态与邻居状态平均的差.

协议 $u_i(t)$ 能够渐近地解决一致性问题当且仅当所有的智能体状态满足如下性质:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N.$$

为了解决一致性问题, 基于文献 [17] 中的单时延策略, 提出如下分布式多时延协议:

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & i \in \mathcal{V}_s; \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j(t - \tau_{i,j}(t)) - x_i(t - \tau_{i,j}(t))), & i \notin \mathcal{V}_s. \end{cases} \quad (2)$$

注 2 基于文献 [17] 中的研究方法, 提出多个状态时延一致性通信协议, 即智能体 $i (i = 1, 2, \dots, N)$ 每一时刻接收到不同邻居 j 的信息具有不同的时延 $\tau_{i,j}(t)$. 当 $\tau_{i,j}(t) = \tau(t)$ 时, 文献 [17] 提出的协议是协议 (2) 的一个特殊形式.

令智能体 $j (j = 1, 2, \dots, N)$ t 时刻从其邻居 k 接收到的信息含有时延 $\tau_{j,k}(t)$, 假设智能体 j 接收自己的状态信息没有时延, 即 $\forall j = 1, 2, \dots, N, \tau_{j,j}(t) = 0$, 则 t 时刻 N 个智能体在接收邻居信息的过程中, 不同时延总数为 r , 且 r 不超过 $N(N-1)$. 不妨将这些时延记为集合 $\Theta = \{\tau_{jk}(\cdot) : j, k = 1, 2, \dots, N\}$. 为了研究方便, 用 $\tau_i(t) \in \Theta (i = 1, 2, \dots, r, r \leq N(N-1))$ 表示 t 时刻的 r 个通信时延. 由于 N 个智能体通信中含有 r 个时延, 将系统状态分解为 r 个状态, 即 $x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t)), \dots, x(t - \tau_r(t))$, 并将拉氏矩阵 \mathcal{L} 拆分成 r 个拉氏矩阵 \mathcal{L}_i . 类似于拉氏矩阵 \mathcal{L} , 矩阵 $\mathcal{L}_i = [l_{ijk}]$ 定义为

$$l_{ijk} = \begin{cases} -a_{jk}, & k \neq j, \tau_i(\cdot) = \tau_{jk}(\cdot); \\ 0, & k \neq j, \tau_i(\cdot) \neq \tau_{jk}(\cdot); \\ \sum_{k=1}^N a_{jk}, & k = j. \end{cases} \quad (3)$$

显然有

$$\sum_{i=1}^r \mathcal{L}_i = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}_i 1_N = 0, \quad r \leq N(N-1).$$

将协议 (2) 代入系统 (1) 并改写为向量形式, 得

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\sum_{i=1}^r \mathcal{L}_i x(t - \tau_i(t)) + \omega(t), \\ Z(t) &= Cx(t).\end{aligned}\quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned}x(s) &= x(0), \quad s \in (-\infty, 0], \\ x(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T \in \mathbf{R}^N, \\ Z(t) &= [z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t)]^T \in \mathbf{R}^N, \\ \omega(t) &= [\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_N(t)]^T \in \mathbf{R}^N, \\ C &= \begin{bmatrix} \frac{N-1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & \frac{N-1}{N} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

假设多智能体系统 (4) 中的时延满足

$$(C_1): 0 \leq \tau_i(t) \leq h_i, \dot{\tau}_i(t) \leq d_i,$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, r, h_i, d_i \geq 0;$$

或

$$(C_2): 0 \leq \tau_i(t) \leq h_i, \forall i = 1, 2, \dots, r, h_i \geq 0.$$

记正交矩阵 $U = [U_1, U_2]$, 其中: $U_2 = 1_N/\sqrt{N}$ 是矩阵 U 的最后 1 列, U_1 是剩余部分. 令

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \frac{1_N}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^t \omega_i(s) ds,$$

$$\varepsilon(t) = U_1^T \tilde{x}(t) \in \mathbf{R}^{N-1}, \delta(t) = U_2^T \tilde{x}(t) \in \mathbf{R}.$$

注意到 U 是一个正交矩阵, 则 $U_1^T U_2 = 0$. 因为 $U_2 = 1_N/\sqrt{N}$, $U_1 1_N = 0$, 可得到

$$\begin{aligned}U^T \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{\delta}(t) \end{bmatrix} + U^T \frac{1_N}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i(t) = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{\delta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (5)$$

由式 (4) 可知

$$\begin{aligned}U^T \dot{x}(t) &= \\ &= -\sum_{i=1}^r U^T \mathcal{L}_i U \begin{bmatrix} \varepsilon(t - \tau_i(t)) \\ \delta(t - \tau_i(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^T \omega(t) \\ U_2^T \omega(t) \end{bmatrix} = \\ &= -\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \hat{\mathcal{L}}_i & 0 \\ \sum_{i=1}^r \tilde{\mathcal{L}}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t - \tau_i(t)) \\ \delta(t - \tau_i(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^T \omega(t) \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (6)$$

其中: $\hat{\mathcal{L}}_i = U_1^T \mathcal{L}_i U_1$, $\tilde{\mathcal{L}}_i = U_2^T \mathcal{L}_i U_1$. 结合式 (5), (6) 有

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\sum_{i=1}^r \hat{\mathcal{L}}_i \varepsilon(t - \tau_i(t)) + U_1^T \omega(t),$$

$$\dot{\delta}(t) = -\sum_{i=1}^r \tilde{\mathcal{L}}_i \varepsilon(t - \tau_i(t)), \quad (7)$$

其中 $\delta(t)$ 为 t 时刻所有智能体的平均状态. 进一步, 由式 (7) 可知, $\dot{\delta}(t) = -\sum_{i=1}^r \tilde{\mathcal{L}}_i \varepsilon(t - \tau_i(t))$, 意味着 $\delta(t)$ 只与 $\varepsilon(t - \tau_i(t))$ 有关. 因此, 结合式 (4) 考虑如下降阶子系统:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= -\sum_{i=1}^r \hat{\mathcal{L}}_i \varepsilon(t - \tau_i(t)) + U_1^T \omega(t), \\ Z(t) &= Cx(t) = C\tilde{x}(t) = CUU^T \tilde{x}(t) = \\ &= [CU_1 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} = CU_1 \varepsilon(t).\end{aligned}\quad (8)$$

系统 (8) 等价于

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= -\hat{\mathcal{L}} \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^r \hat{\mathcal{L}}_i \eta_i(t) + U_1^T \omega(t), \\ Z(t) &= CU_1 \varepsilon(t).\end{aligned}\quad (9)$$

其中

$$\varepsilon(t) \in \mathbf{R}^{N-1}, \eta_i(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau_i(t)),$$

$$\hat{\mathcal{L}} = U_1^T \mathcal{L} U_1.$$

为了得到文中主要结果, 下面介绍 3 个已知结论.

引理 1 (Schur 引理)^[18] 对于任意给定的对称矩阵

$$\begin{aligned}S &= [S_{ij}], \quad S_{11} \in \mathbf{R}^{r \times r}, \quad S_{12} \in \mathbf{R}^{r \times (N-r)}, \\ S_{22} &\in \mathbf{R}^{(N-r) \times (N-r)}, \quad S < 0,\end{aligned}$$

当且仅当 $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{21}^T < 0$ 或者 $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

引理 2^[16] 对于任意的实可微向量函数 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $n \times n$ 常数矩阵 $W = W^T > 0$, 如下不等式成立:

$$\begin{aligned}h_i^{-1} [x(t) - x(t - \tau_i(t))]^T W [x(t) - x(t - \tau_i(t))] \leq \\ \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{x}^T(s) W \dot{x}(s) ds, \quad t \leq 0,\end{aligned}$$

其中 $\tau_i(t)$ 和 h_i 满足 C_1 或 C_2 .

引理 3^[19] 一个有向图 \mathcal{G} 的非对称拉氏矩阵 \mathcal{L} 只有一个零特征值当且仅当图 \mathcal{G} 有一个有向生成树.

4 一致性条件

本节将证明降阶系统的状态在固定和变化网络拓扑下达到一致且满足给定的 H_∞ 性能指标 γ . 假设对于任意 $t < 0$, 每个智能体的状态为 0, 即 $\forall t < 0$, $x_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

4.1 固定网络拓扑和多时延情形

定理 1 考虑一个多智能体网络具有有向固定拓扑 \mathcal{G} , 假设条件 C_1 成立. 对于任意 $0 \leq d_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, r$, 存在适当的常数 $h_i > 0$ 使得系统 (9) 的

状态达到渐近一致并满足给定的 H_∞ 性能指标 γ 的充分条件是: 存在正定对称的矩阵 $P, Q_i, R_i \in \mathbf{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) 和常数 $\epsilon_1 > 0$ 使得下式成立:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & \Gamma_{13} \\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ * & * & \Gamma_{33} \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

其中

$$\Gamma_{11} = \begin{bmatrix} H & P\hat{\mathcal{L}}_1 + (1-d_1)R_1 \\ * & -h_1^{-1}Q_1 - (1-d_1)R_1 \\ \vdots & \vdots \\ * & * \\ \cdots & P\hat{\mathcal{L}}_r + (1-d_r)R_r \\ \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & -h_r^{-1}Q_r - (1-d_r)R_r \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{13} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathcal{L}}^T Q_1 & -\hat{\mathcal{L}}^T Q_2 & \cdots & -\hat{\mathcal{L}}^T Q_r \\ \hat{\mathcal{L}}_1^T Q_1 & \hat{\mathcal{L}}_1^T Q_2 & \cdots & \hat{\mathcal{L}}_1^T Q_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathcal{L}}_r^T Q_1 & \hat{\mathcal{L}}_r^T Q_2 & \cdots & \hat{\mathcal{L}}_r^T Q_r \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{22} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_N & U_1 P \\ * & -\epsilon_1^{-1} I_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{23} = \begin{bmatrix} U_1 Q_1 & U_1 Q_2 & \cdots & U_1 Q_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{33} = \text{diag}\{-h_1^{-1}Q_1 \quad -h_2^{-1}Q_2 \quad \cdots \quad -h_r^{-1}Q_r\},$$

$$H = -P\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i + \epsilon^{-1} I_{N-1} + U_1^T C^T C U_1.$$

证明 首先讨论在没有外部噪声干扰下系统(9)的稳定性, 即 $\omega(t) \equiv 0$. 选择如下 Lyapunov 候选函数:

$$V(t) = \epsilon^T(t) P \epsilon(t) + \sum_{i=1}^r \int_{-\tau_i(t)}^0 \int_{t+s}^t \dot{\epsilon}^T(\theta) Q_i \dot{\epsilon}(\theta) d\theta ds + \sum_{i=1}^r \int_{t-\tau_i(t)}^t \epsilon^T(\theta) R_i \epsilon(\theta) d\theta, \quad (11)$$

其中 $-\tau_i(t) < s < 0, i = 1, 2, \dots, r$. 沿系统(9)的轨迹求导, 得

$$\dot{V}(t) = 2\epsilon^T(t) P \dot{\epsilon}(t) + \sum_{i=1}^r \tau_i(t) \dot{\epsilon}^T(t) Q_i \dot{\epsilon}(t) - \sum_{i=1}^r \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{\epsilon}^T(s) Q_i \dot{\epsilon}(s) ds + \sum_{i=1}^r \epsilon^T(t) R_i \epsilon(t) -$$

$$\sum_{i=1}^r (1 - \dot{\tau}_i(t)) \epsilon^T(t - \tau_i(t)) R_i \epsilon(t - \tau_i(t)).$$

利用式(9)和引理2, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & 2\epsilon^T(t) P \left[-\hat{\mathcal{L}}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^r \hat{\mathcal{L}}_i \eta_i(t) \right] + \sum_{i=1}^r \epsilon^T(t) R_i \epsilon(t) + \\ & \sum_{i=1}^r h_i \dot{\epsilon}^T(t) Q_i \dot{\epsilon}(t) - \sum_{i=1}^r h_i^{-1} \eta_i^T(t) Q_i \eta_i(t) - \\ & \sum_{i=1}^r (1 - d_i) [\epsilon(t) - \eta_i(t)]^T R_i [\epsilon(t) - \eta_i(t)] = \\ & \epsilon^T(t) \left[-P\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i \right] \epsilon(t) + \\ & \sum_{i=1}^r h_i \dot{\epsilon}^T(t) Q_i \dot{\epsilon}(t) + \\ & 2\epsilon^T(t) \sum_{i=1}^r [P\hat{\mathcal{L}}_i + (1 - d_i) R_i] \eta_i(t) + \\ & \sum_{i=1}^r \eta_i^T(t) [-h_i^{-1} Q_i - (1 - d_i) R_i] \eta_i(t) = \\ & \zeta^T(t) \Omega \zeta(t). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta^T(t) &= [\epsilon^T(t), \eta_1^T(t), \dots, \eta_r^T(t)]^T, \\ \Omega &= \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ * & \Omega_{22} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r h_i [-\hat{\mathcal{L}} \quad \hat{\mathcal{L}}_1 \quad \cdots \quad \hat{\mathcal{L}}_r]^T Q_i \times \\ & \quad [-\hat{\mathcal{L}} \quad \hat{\mathcal{L}}_1 \quad \cdots \quad \hat{\mathcal{L}}_r], \\ \Omega_{11} &= -P\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i, \\ \Omega_{12} &= [P\hat{\mathcal{L}}_1 + (1 - d_1)R_1 \quad P\hat{\mathcal{L}}_2 + (1 - d_2)R_2 \quad \cdots \rightarrow \\ & \leftarrow P\hat{\mathcal{L}}_r + 2(1 - d_r)R_r], \\ \Omega_{22} &= [-h_1^{-1}Q_1 - (1 - d_1)R_1 \quad -h_2^{-1}Q_2 - (1 - d_2)R_2 \rightarrow \\ & \leftarrow \cdots \quad -h_r^{-1}Q_r - (1 - d_r)R_r]. \end{aligned}$$

其次, 考虑闭环系统(9)在外部噪声干扰 $\omega(t)$ 下的性能. 计算 $\dot{V}(t)$ 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & 2\epsilon^T(t) P \left[-\hat{\mathcal{L}}\epsilon(t) + \sum_{i=1}^r \hat{\mathcal{L}}_i \eta_i(t) + U_1^T \omega(t) \right] + \\ & \sum_{i=1}^r h_i \dot{\epsilon}^T(t) Q_i \dot{\epsilon}(t) - \sum_{i=1}^r h_i^{-1} \eta_i^T(t) Q_i \eta_i(t) + \\ & \sum_{i=1}^r \epsilon^T(t) R_i \epsilon(t) - \sum_{i=1}^r (1 - d_i) [\epsilon(t) - \eta_i(t)]^T \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_i[\varepsilon(t) - \eta_i(t)] = & \\
\varepsilon^T(t) \left[-P\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i \right] \varepsilon(t) + & \\
2\varepsilon^T(t) \sum_{i=1}^r (P\hat{\mathcal{L}}_i + (1-d_i)R_i)\eta_i(t) + & \\
2\varepsilon^T(t) P U_1^T \omega(t) + \sum_{i=1}^r h_i \dot{\varepsilon}^T(t) Q_i \dot{\varepsilon}(t) + & \\
\sum_{i=1}^r \eta_i^T(t) [-h_i^{-1} Q_i - (1-d_i)R_i] \eta_i(t). & \quad (12)
\end{aligned}$$

事实上, 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}^n$ 和正定矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 有

$$2x^T y \leq x^T M x + y^T M^{-1} y \quad (13)$$

成立, 从而有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & \\
\varepsilon^T(t) \left[-P\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i + \epsilon_1^{-1} I_{N-1} \right] \varepsilon(t) + & \\
2\varepsilon^T(t) \sum_{i=1}^r (P\hat{\mathcal{L}}_i + (1-d_i)R_i)\eta_i(t) + & \\
\sum_{i=1}^r \eta_i^T(t) [-h_i^{-1} Q_i - (1-d_i)R_i] \eta_i(t) + & \\
\sum_{i=1}^r h_i \dot{\varepsilon}^T(t) Q_i \dot{\varepsilon}(t) + \epsilon_1 \omega^T(t) U_1 P P U_1^T \omega(t), & \quad (14)
\end{aligned}$$

其中 ϵ_1 为大于零的常数. 对于任意 $T > 0$, 考虑如下 H_∞ 性能:

$$J_T = \int_0^T [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)] dt.$$

对于任意非零 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, $t \geq 0$, 结合式 (14), 有

$$\begin{aligned}
J_T = \int_0^T [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)] dt = & \\
\int_0^T [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)] dt - & \\
V(T) + V(0) \leq & \\
\int_0^T \varsigma^T(t) \Xi \varsigma(t) dt - V(T). &
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varsigma^T(t) = & (\varepsilon^T(t), \eta_1^T(t), \dots, \eta_r^T(t), \omega^T(t)), \\
\Xi = & \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ * & \Xi_{22} \end{bmatrix} + \\
& \sum_{i=1}^r h_i [-\hat{\mathcal{L}} \quad \hat{\mathcal{L}}_1 \quad \dots \quad \hat{\mathcal{L}}_r \quad U_1^T]^T Q_i \times \\
& [-\hat{\mathcal{L}} \quad \hat{\mathcal{L}}_1 \quad \dots \quad \hat{\mathcal{L}}_r \quad U_1^T], \\
\Xi_{11} = & -P\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i + \\
& \epsilon^{-1} I_{N-1} + U_1^T C^T C U_1, \\
\Xi_{12} = &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P\hat{\mathcal{L}}_1 + (1-d_1)R_1 \quad P\hat{\mathcal{L}}_2 + (1-d_2)R_2 \quad \dots \rightarrow & \\
\leftarrow P\hat{\mathcal{L}}_r + 2(1-d_r)R_r \quad 0], & \\
\Xi_{22} = & \\
[-h_1^{-1}Q_1 - (1-d_1)R_1 \quad -h_2^{-1}Q_2 - (1-d_2)R_2 \rightarrow & \\
\leftarrow \dots - h_r^{-1}Q_r - (1-d_r)R_r \quad -\gamma^2 + U_1^T C^T C U_1]. &
\end{aligned}$$

因此, 若 $\Xi < 0$, 则有 $J_T < 0$ 成立, 即

$$\int_0^T z^T(t)z(t) dt < \gamma^2 \int_0^T \omega^T(t)\omega(t) dt.$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 得到 $\|z(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\omega(t)\|_2^2$, 即 $\|T_{wz}(s)\|_\infty < \gamma$. 根据 Schur 引理可知, 当条件 $\Gamma < 0$ 成立时, 有 $\Xi < 0$. 因此, 只要条件 $\Gamma < 0$ 成立, 所有智能体的状态都能够达到渐近一致且满足给定的 H_∞ 性能指标. \square

注 3 由式 (10) 可知, $\Gamma < 0$ 成立的必要条件是 $H < 0$. 而矩阵

$$\begin{aligned}
H = -P\hat{\mathcal{L}} - \hat{\mathcal{L}}^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i + & \\
\epsilon^{-1} I_{N-1} + U_1^T C^T C U_1 < 0 &
\end{aligned}$$

意味着 $-\hat{\mathcal{L}}$ 是霍尔维茨矩阵, 由 $\hat{\mathcal{L}} = U_1^T \mathcal{L} U_1$ 可知, 矩阵 \mathcal{L} 只有一个零特征值, 其他 $N-1$ 个特征值均大于零. 利用引理 3, 多智能体系统 (9) 状态达到一致的必要条件是图 \mathcal{G} 包含一个有向生成树.

注 4 对于任意 $0 \leq d_i < 1$, 定理 1 保证一致性的最大时延上界 h_i 可以由下述最优问题解出:

$$\begin{aligned}
\max h_i; & \\
\text{s.t. } 0 \leq d_i < 1, P > 0, Q_i > 0, R_i > 0, & \text{式 (10)}.
\end{aligned}$$

利用线性矩阵不等式工具箱^[18]容易求解上述最优化问题.

4.2 变化网络拓扑和多时延情形

定理 1 只适用于具有固定拓扑结构的有向网络, 而在实际环境中, 网络拓扑结构不可避免地会发生变化, 所以本节讨论发生变化的情况. 考虑具有变化拓扑结构的有向平衡图 $\{\mathcal{G}_s : s = \sigma(t) \in \mathbf{S}\}$. 其中: $\mathcal{G}_s \in \mathbf{S}_H$; $\mathbf{S} \in \mathbf{Z}^+$; 映射 $\sigma(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ 表示变化信号, 其取值决定网络的拓扑结构; \mathbf{S}_H 为一个有限集合, 其元素是由 N 个智能体构成的所有可能的有向平衡图.

将协议 (2) 改写为

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & i \in \mathcal{V}_s; \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i(s)} a_{ij}(s)(x_j(t - \tau_{i,j}(t)) - x_i(t - \tau_{i,j}(t))), & \\ i \in \mathcal{V} - \mathcal{V}_s. & \end{cases} \quad (15)$$

其中: $\mathcal{N}_i(s)$ 为有向图 \mathcal{G}_s 中智能体 i 的邻居集合, $a_{ij}(s)$ 为图 \mathcal{G}_s 邻接矩阵 $\mathcal{A}(s)$ 中的 (i, j) 元素.

将协议(15)代入系统(1), 通过一个相似的模型变换可得到以下系统:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= -\hat{\mathcal{L}}_s \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^r \hat{\mathcal{L}}_{is} \eta_i(t) + U_1^T \omega(t), \\ Z(t) &= Cx(t) = C\tilde{x}(t) = CUU^T \tilde{x}(t) = \\ & [CU_1 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} = CU_1 \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $\eta_i(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau_i(t))$, $\hat{\mathcal{L}}_s = U_1^T \mathcal{L}_s U_1$.

定理2 考虑一个多智能体网络具有变化的有向拓扑 \mathcal{G}_s , 假设条件 C_1 成立, 且 $\forall s \in \mathbf{S}_H$, \mathcal{G}_s 包含一个有向生成树的平衡图. 对于任意 $0 \leq d_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, r$, 存在适当的常数 $h_i > 0$ 使得系统(16)的状态达到渐近一致并满足给定的 H_∞ 性能指标 γ 的充分条件是: 存在正定对称的矩阵 $P, Q_i, R_i \in \mathbf{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) 和常数 $\epsilon_2 > 0$ 使得下式成立:

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} \Gamma_{11s} & 0 & \Gamma_{13s} \\ * & \Gamma_{22s} & \Gamma_{23s} \\ * & * & \Gamma_{33s} \end{bmatrix} < 0, \quad s \in \mathbf{S}. \quad (17)$$

其中

$$\Gamma_{11s} = \begin{bmatrix} \bar{H} & P\hat{\mathcal{L}}_{1s} + (1-d_1)R_1 \\ * & -h_1^{-1}Q_1 - (1-d_1)R_1 \\ \vdots & \vdots \\ * & * \\ \cdots & P\hat{\mathcal{L}}_{rs} + (1-d_r)R_r \\ \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & -h_r^{-1}Q_r - (1-d_r)R_r \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{13s} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathcal{L}}_s^T Q_1 & -\hat{\mathcal{L}}_s^T Q_2 & \cdots & -\hat{\mathcal{L}}_s^T Q_r \\ \hat{\mathcal{L}}_{1s}^T Q_1 & \hat{\mathcal{L}}_{1s}^T Q_2 & \cdots & \hat{\mathcal{L}}_{1s}^T Q_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathcal{L}}_{rs}^T Q_1 & \hat{\mathcal{L}}_{rs}^T Q_2 & \cdots & \hat{\mathcal{L}}_{rs}^T Q_r \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{22s} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_N & U_1 P \\ * & -\epsilon_2^{-1} I_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{23s} = \begin{bmatrix} U_1 Q_1 & U_1 Q_2 & \cdots & U_1 Q_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{33s} = \text{diag}\{-h_1^{-1}Q_1 \quad -h_2^{-1}Q_2 \quad \cdots \quad -h_r^{-1}Q_r\},$$

$$\bar{H} = -P\hat{\mathcal{L}}_s - \hat{\mathcal{L}}_s^T P + \sum_{i=1}^r d_i R_i +$$

$$\epsilon_2^{-1} I_{N-1} + U_1^T C^T C U_1.$$

定理2的证明过程类似于定理1, 此略.

5 数值仿真

考虑1个由4个智能体组成的多智能体网络, 如

图1所示. 为了方便, 假设 $\tau_{4j}(t) = \tau_1, \tau_{ij}(t) = \tau_2, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$, 即 $r = 2$. 选择性能指标 $\gamma = 1, d_1 = 0.2, d_2 = 0.5$. 首先, 考虑固定网络拓扑 \mathcal{G}_1 , 使用文献[18]的工具箱并通过求解式(10), 得到时延界的估计 $h_i (i = 1, 2), h_1 \leq 0.4393, h_2 \leq 0.5901$. 其次, 考虑变化拓扑情形, 假设4个智能体之间的通信关系是在图1中的两个图 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ 中变化, 始于图 \mathcal{G}_1 , 每隔1s变化到下一个图, 即 $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots$, 如图2所示. 使用文献[18]的工具箱并通过求解式(17), 得到时延界的估计 $h_i (i = 1, 2), h_1 \leq 0.4211, h_2 \leq 0.5635$. 取初始时刻的状态为 $x(0) = [-10 \quad -5 \quad 5 \quad 10]^T$, 时滞为 $\tau_1 = 0.4, \tau_2 = 0.56$. 图3和图4分别描述了4个智能体在外部噪声为 $\omega(t) = [\sin(20t), \sin(30t), \sin(40t), \sin(50t)]^T$ 和不同的通信网络拓扑下的状态轨迹. 由图3和图4可知, 在允许的时延范围内闭环系统的状态都能够达到渐近一致并满足 H_∞ 性能指标 $\|T_{wz}(s)\|_\infty < 1$.

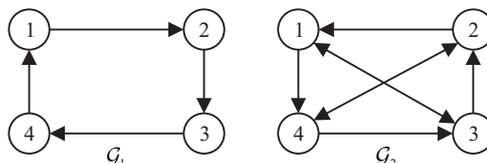


图1 两个有向图拓扑结构

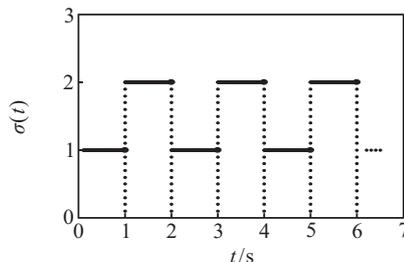


图2 描述变化通信拓扑结构的变化信号 $\sigma(t)$

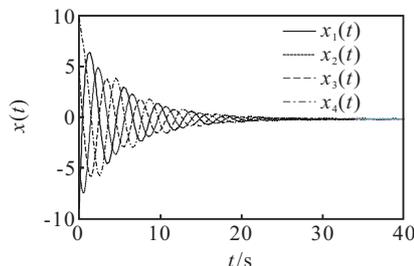


图3 固定网络拓扑 \mathcal{G}_1 下的状态曲线

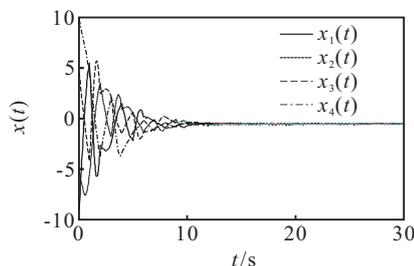


图4 变化网络拓扑 $\mathcal{G}_i (i = 1, 2)$ 下的状态曲线

6 结 论

本文研究了多个通信时延和外部噪声干扰下的多智能体系统 H_∞ 一致性问题. 各智能体的控制输入只与其自身状态和邻居状态有关. 为了简化分析, 对原来的系统作模型变换使之转化为降阶的子系统. 根据得到的降阶系统, 构建一个适当的 Lyapunov 函数, 得到了所有智能体状态达到渐近一致并满足期待的 H_∞ 性能的充分条件. 最后, 通过仿真例子验证了本文所提出的方法的有效性和可行性.

参考文献(References)

[1] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.

[2] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2605-2611.

[3] 吴正平, 关治洪, 吴先用. 基于一致性理论的多机器人系统队形控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(11): 1241-1244. (Wu Z P, Guan Z H, Wu X Y. Consensus based formation control of multi-robot system[J]. Control and Decision, 2007, 22(11): 1241-1244.)

[4] Reynolds C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavior model[J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 5-34.

[5] Saber R O. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.

[6] Cucker F, Smale S. Emergent behavior in flocks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(5): 852-862.

[7] Saber R O. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters[C]. Proc of the Joint CDC-ECC Conf. Seville, 2005: 8179-8184.

[8] Saber R O, Shamma J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion[C]. Proc of the Joint CDC-ECC Conf. Seville, 2005: 6698-6703.

[9] Ren W, Beard R W, Kingston D B. Multi-agent Kalman consensus with relative uncertainty[C]. Proc of the

American Control Conf. Portland: IEEE Press, 2005: 1865-1870.

[10] Xiao L, Boyd S, Lall S. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus[C]. Proc of the Int Conf on Information Process in Sensor Networks. Los Angeles: IEEE Press, 2005: 63-70.

[11] Ren W, Beard R W, Atkins E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination[C]. American Control Conf. Portland: IEEE Press, 2005: 1859-1864.

[12] 杨文, 汪小帆, 李翔. 一致性问题综述[C]. 第 25 届中国控制会议. 哈尔滨, 2006: 1491-1495. (Yang W, Wang X F, Li X. A survey of consensus problem in multi-agent systems[C]. Proc of the 25th Chinese Control Conf. Harbin, 2006: 1491-1495.)

[13] 刘成林, 田玉平. 具有时延的多个体系统的一致性问题综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1601-1608. (Liu C L, Tian Y P. Survey on consensus problem of multi-agent systems with time delays[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1601-1608.)

[14] Xiao F, Wang L. Consensus protocols for discrete-time multi-agent systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2577-2582.

[15] Liu S, Xie L H, Zhang H S. Distributed consensus for multi-agent systems with delays and noises in transmission channels[J]. Automatica, 2010, 47(5): 920-934.

[16] Sun Y G, Wang L, Xie G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(2): 175-183.

[17] Lin P, Jia Y M, Li L. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(8): 643-653.

[18] Gahient P, Nemirovski A, Laub A, et al. LMI control toolbox user's guide[M]. Natick: the Math Works, 1995: 196-209.

[19] Ren W, Beard R W. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: Theory and applications[M]. London: Springer-Verlag, 2008: 28-34.

下 期 要 目

基于分布参数机械臂协调操作柔性负载双时标控制 李元春, 等

一种新的 AdaBoost 视频跟踪算法 徐建军, 等

面向数据删除的核属性更新算法 葛 浩, 等

一类连续广义 Markov 跳变系统的镇定性研究 常 华, 等

不确定性下多主从博弈中均衡的存在性 杨 哲, 蒲勇健

用于传感网功率控制的并行传输 MAC 协议 赵学健, 庄 毅