

文章编号: 1001-0920(2012)03-0431-05

基于状态观测器的直接约束鲁棒预测控制

刘晓华, 马春妍, 高 荣, 魏新江

(鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

摘 要: 针对多包描述线性离散不确定系统, 提出一种在系统状态不可测时的直接约束鲁棒预测控制算法. 将控制器与观测器综合设计, 利用观测状态直接构造性能指标, 通过求解无穷时域性能指标的最小最大优化问题, 得到系统的最优状态反馈控制律. 采用参数依赖 Lyapunov 函数, 在满足输入和状态约束的情况下保证闭环系统稳定. 仿真结果验证了算法的有效性.

关键词: 鲁棒预测控制; 参数依赖 Lyapunov 函数; 状态观测器; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Direct constrained robust predictive control based on state observer

LIU Xiao-hua, MA Chun-yan, GAO Rong, WEI Xin-jiang

(School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China. Correspondent: LIU Xiao-hua, E-mail: xhliu_yt@sina.com)

Abstract: For multi-packet described linear discrete uncertain system, when the state can not be measured, an direct method of constrained robust model predictive control algorithm is proposed. The observer and controller are designed comprehensively, and observed state is used to structure performance index directly. Through solving the min-max optimization problem with infinite horizon performance cost, the system optimal state feedback control law is obtained. When the constrains of input/state is met, the parameter-dependent Lyapunov function are introduced to ensure the closed-loop system stability. Simulation examples show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: robust model predictive control; parameter-dependent Lyapunov function; state observer; linear matrix inequality

1 引 言

鲁棒预测控制将鲁棒控制与预测控制相结合, 成为一类具有良好鲁棒性的先进控制算法^[1-2]. 近年来, 基于状态可测的多包系统鲁棒预测控制得到了广泛的研究^[2-5]. 在假设状态可测的情况下, 文献[2]引入 min-max 鲁棒预测控制设计思想, 将预测控制的在线最小化问题转变为 min-max 问题描述, 求解控制律, 使得在最坏情况下的目标函数值最小. 由于设计方法采用单一的 Lyapunov 函数, 所设计的控制器具有一定的保守性. 为了解决这一问题, 文献[3]采用参数依赖 Lyapunov 函数设计控制器, 减少了单一 Lyapunov 函数设计时要求二次稳定的保守性, 并且可以获得更优的控制性能.

在实际问题中, 系统的状态无法直接测量, 量测设备在经济上和使用性上的限制会使状态反馈在物

理实现上成为不可能. 因此, 研究状态不可测的鲁棒预测控制算法更具有实际意义. 在假设状态不可测的情况下, 文献[4]指出输出反馈预测控制器闭环系统的鲁棒稳定性分析具有一定的困难. [5]利用离线 LMI 方法求解无穷时域二次性能指标的 min-max 优化问题, 提出了一种鲁棒输出反馈模型预测控制, 并给出了系统的鲁棒稳定性条件, 但它将控制器与观测器分开设计, 在处理系统约束时并没有考虑观测器的影响. [6]考虑到未来输入和状态受到观测误差的影响, 提出了约束时变不确定离散系统的输出反馈预测控制. 但是, 设计方法采用了单一的 Lyapunov 函数, 使得所设计的控制器具有较大的保守性, 且没有考虑闭环系统的稳定性.

系统的真实状态与观测状态之间是存在观测误差的, 并且系统的未来输入和状态会受到观测误差的

收稿日期: 2010-10-15; 修回日期: 2011-02-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174097, 61004163); 山东省自然科学基金项目(2009ZRB01521).

作者简介: 刘晓华(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、自适应控制理论及应用等研究; 马春妍(1986—), 女, 硕士生, 从事预测控制的研究.

影响, 因此, 在处理状态和输入约束时必须考虑观测器的影响. 本文将控制器与观测器综合考虑, 提出一种基于状态观测器的直接约束鲁棒预测控制. 在性能指标与控制器设计中直接利用观测状态, 使控制器满足鲁棒稳定性约束, 将无穷时域性能指标的优化问题最终转化为 min-max 优化问题. 在此基础上, 采用参数依赖 Lyapunov 函数, 分析了所得控制器闭环系统的稳定性.

2 直接鲁棒预测控制算法

考虑变多包不确定离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $u \in R^m$, $x \in R^n$, $y \in R^r$ 分别为系统的控制输入、状态和输出; $[A(k)|B(k)] \in \Omega = \text{Co}\{[A_1|B_1], \dots, [A_L|B_L]\}$; 系统输入和输出约束分别为

$$\begin{aligned} -\bar{u} &\leq u(k+i) \leq \bar{u}, \\ -\bar{\Psi} &\leq \Psi y(k+i+1) \leq \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (2)$$

假设系统状态不可测, 针对系统 (1), 采用如下形式的状态观测器:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + L_p(y(k) - C\hat{x}(k)), \\ \hat{x}(0) &= x(0), \\ u(k+i|k) &= F\hat{x}(k+i|k). \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\hat{x}(k)$ 为系统的观测状态, L_p 为观测器增益, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ 为观测误差.

由于系统的状态 $x(k)$ 是不可测的, 在性能指标中直接采用观测状态, 目的是综合鲁棒预测控制器, 使得系统 (1) 的状态和输入最终被驱动到原点 $(x, u) = (0, 0)$, 同时在每个时刻 k 实现

$$\begin{aligned} \min_{u(k+i|k)[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} \max J_\infty(k), \\ J_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} [\|\hat{x}(k+i|k)\|_L^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2]. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{s.t. } \hat{x}(k+i+1|k) = (A - L_p C)\hat{x}(k+i|k) + Bu(k+i|k) + L_p Cx(k+i|k),$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k), \quad \forall i \geq 0; \quad (5)$$

$$u(k+i|k) = F(k)\hat{x}(k+i|k), \quad \forall i \geq 0; \quad (6)$$

$$-\bar{u} \leq u(k+i|k) \leq \bar{u}; \quad (7)$$

$$-\bar{\Psi} \leq \Psi Cx(k+i+1|k) \leq \bar{\Psi}, \quad i \geq 0. \quad (8)$$

由于输入约束与观测状态直接相关, 而状态约束是相对于真实状态的约束, 为了保证所设计的控制器满足系统约束, 在性能指标中直接采用观测状态来设计控制器. 将优化问题 (4) 分解为两部分, 即

$$\min_{u(k+i|k)[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} \max J_1(k),$$

$$\begin{aligned} J_1 = \sum_{i=0}^{N-1} [\|\hat{x}(k+i|k)\|_L^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2]; \\ \text{s.t. 式(5) ~ (8)}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \min_{u(k+i|k)[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} \max J_2(k), \\ J_2 = \sum_{i=N}^{\infty} [\|\hat{x}(k+i|k)\|_L^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2]; \\ \text{s.t. 式(5) ~ (8)}. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: 问题 (9) 是一个有限时域约束最小最大优化问题, 问题 (10) 是一个无穷时域约束最小最大优化问题.

为了克服控制器的保守性, 本文采用如下参数依赖 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{x}(k+i|k)) &= \hat{x}(k+i|k)^T P(k+i|k)\hat{x}(k+i|k), \\ \text{其中 } P(k+i|k) &\in \Omega, \text{ 即存在 } \lambda_i (i=1, 2, \dots, L), \text{ 使得} \end{aligned}$$

$$P(k+i|k) = \sum_{i=1}^L \lambda_i P_i(k+i|k), \quad \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1.$$

假设 Lyapunov 函数满足如下鲁棒稳定性约束:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{x}(k+i+1|k)) - \hat{V}(\hat{x}(k+i|k)) \leq \\ - [\|\hat{x}(k+i|k)\|_L^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

当闭环系统稳定时, 有

$$\hat{x}(\infty|k) = 0, \quad \hat{V}(\hat{x}(\infty|k)) = 0.$$

将式 (11) 从 $i = N$ 叠加到 $i = \infty$, 得

$$\max J_2(k) \leq \hat{V}(\hat{x}(k+N|k)).$$

因此, 优化问题 (10) 可转化为最小化 $\hat{V}(\hat{x}(k+N|k))$, 优化问题 (4) 可以转化为如下最小最大优化问题:

$$\min_{u(k+i|k)[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} \max \bar{J}(k), \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{J}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} [\|\hat{x}(k+i|k)\|_L^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2] + \\ \|\hat{x}(k+N|k)\|_p^2. \end{aligned}$$

令 $u(k+i|k) = F(k)\hat{x}(k+i|k)$, $\forall i \geq 0$, 则鲁棒稳定性约束 (11) 等价于

$$\begin{aligned} \|(A + BF)\hat{x}(k+i|k) + L_p Ce(k+i|k)\|_p^2 - \\ \|\hat{x}(k+i|k)\|_L^2 \leq \\ - \|\hat{x}(k+i|k)\|_L^2 - \|\hat{x}(k+i|k)\|_R^2. \end{aligned} \quad (13)$$

在式 (13) 中, 省略 $e(k+i|k)$ (等价于仅在考虑最优性时进行无误差观测状态的假设), 则式 (13) 等价于

$$(A + BF)^T P(A + BF) - P \leq -L - F^T R F. \quad (14)$$

引理 1^[10](投影引理) 令矩阵 $U \in R^{n \times m}$, $W \in R^{n \times n}$, $Y = Y^T \in R^{n \times m}$, 则以下两种描述等价:

- 1) 存在矩阵 V , 满足 $Y + UVW + (UVW)^T > 0$.
- 2) $U_\perp Y(U_\perp)^T YW^\perp > 0$.

为了增加优化的自由度, 本文引入松弛矩阵 G , 定义标量 $\gamma > 0, \gamma_1 > 0$. 令 $Q = \gamma p^{-1}, Y = FQ$, 利用引理 1, 式 (14) 可以转化为如下 LMI:

$$\begin{bmatrix} \gamma Q & * & * & * \\ G^T(AQ + BY) & -\gamma Q + G + G^T & * & * \\ L^{1/2} & 0 & I & * \\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (15)$$

松弛矩阵 G 的引入, 一般可以增强控制律的最优性^[11]. 对于不确定系统 (1), 可以得到系统的估计状态预测为

$$\begin{aligned} & [\hat{x}(k+1|k) \ \hat{x}(k+2|k) \ \cdots \ \hat{x}(k+N|k)]^T = \\ & \begin{bmatrix} A(k) \\ A(k+1)A(k) \\ \vdots \\ M \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N-1) \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} B(k) & 0 & \cdots & 0 \\ A(k)B(k) & B(k+1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M' & \cdots & \cdots & B(k+N-1) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} L_p C & 0 & \cdots & 0 \\ A(k)L_p C & L_p C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M'' & \cdots & \cdots & B(k+N-1) \end{bmatrix} \times \\ & [e(k) \ e(k+1) \ \cdots \ e(k+N-1)]^T, \\ & M = A(k+N-1) \cdots A(k+1)A(k), \\ & M' = A(k+N-1) \cdots A(k+1)B(k), \\ & M'' = A(k+N-2) \cdots A(k)L_p C. \end{aligned} \quad (16)$$

式 (16) (省略 $e(k+i)$ 等价于仅在考虑最优性时作无误差观测状态的假设) 可以改写为

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{x}}(k+1) \\ \hat{\tilde{x}}(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(k)(k+1) \\ \tilde{A}_N(k) \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} \tilde{B}(k)(k+1) \\ \tilde{B}_N(k) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} & \tilde{x}(k+1) = \\ & [\tilde{x}(k+1|k)^T \ \tilde{x}(k+2|k)^T \ \cdots \ \tilde{x}(k+N-1|k)^T]^T. \end{aligned}$$

由式 (17) 可知, 矩阵 $[\tilde{A}(k) \ \tilde{B}(k)]$ 为一系列顶点的凸组合, 其顶点数为 $\tilde{L} = L^{N-1}$. $[\tilde{A}_N(k) \ \tilde{B}_N(k)]$ 也是一系列顶点的凸组合, 其顶点数为 $\tilde{L}_N = L^N$, 即

$$\begin{aligned} [\tilde{A}(k) \ \tilde{B}(k)] &= \sum_{i=1}^L \lambda_i [\tilde{A}_i(k) \ \tilde{B}_i(k)], \quad \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1; \\ [\tilde{A}_N(k) \ \tilde{B}_N(k)] &= \sum_{i=1}^{\tilde{L}_N} \lambda_i [\tilde{A}_{N_i}(k) \ \tilde{B}_{N_i}(k)], \quad \sum_{i=1}^{\tilde{L}_N} \lambda_i = 1. \end{aligned}$$

令

$$\|\tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k)\|_L^2 + \|\tilde{u}(k)\|_R^2 \leq \gamma_1, \quad (18)$$

$$\|\tilde{A}_N\tilde{x}(k) + \tilde{B}_N\tilde{u}(k)\|_p^2 \leq \gamma. \quad (19)$$

优化问题 (4) 转化为

$$\begin{aligned} & \min \|\tilde{x}(k)\|_L^2 + \gamma_1 + \gamma, \\ & \text{s.t. 式(18)和(19)}. \end{aligned}$$

利用 Schur 补引理, 式 (18) 和 (19) 可转化为如下 LMI:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & * & * \\ \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} & \tilde{L}^{-1} & * \\ \tilde{u} & 0 & \tilde{R}^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ \tilde{A}_N\tilde{x} + \tilde{B}_N\tilde{u} & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (21)$$

下面, 基于状态观测器 (3), 推导使得系统的真实状态、观测状态和观测误差都保持在同一个椭圆内部的条件.

定理 1 假设存在 Q , 使得

$$\begin{aligned} & x(0)^T Q^{-1} x(0) \leq 1, \ \hat{x}(0)^T Q^{-1} \hat{x}(0) \leq 1, \\ & e(0)^T Q^{-1} e(0) \leq 1, \end{aligned}$$

那么在 k 时刻, 如果存在标量 $\theta, 0 < \theta < 1$ 和适当维数的矩阵 Y, L_p 以及对称正定矩阵, 使得如下条件满足:

$$\begin{bmatrix} (1-2\theta)Q & * \\ B_l Y & Q \end{bmatrix} \geq 0, \ l = 1, 2, \dots, L; \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \theta^2 Q & * \\ A_l Q + B_l Y & Q \end{bmatrix} \geq 0, \ l = 1, 2, \dots, L; \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \theta Q & * \\ L_p C Q & Q \end{bmatrix} \geq 0; \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} (1-\theta)Q & * \\ A_l Q + B_l Y & Q \end{bmatrix} \geq 0, \ l = 1, 2, \dots, L; \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} (1-2\theta)^2 Q & * \\ A_l Q - L_p C Q & Q \end{bmatrix} \geq 0, \ l = 1, 2, \dots, L. \quad (26)$$

则采用控制律 $u(k) = YQ^{-1}x(k)$ 后, 系统 (1) 的真实状态、观测状态和观测误差保持在同一个椭圆内部, 即

$$\begin{aligned} & x(k)^T Q^{-1} x(k) \leq (1-\theta)^{2k}, \\ & \hat{x}(k)^T Q^{-1} \hat{x}(k) \leq 1, \\ & e(k)^T Q^{-1} e(k) \leq (1-\theta)^{2k}, \ \forall k \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

证明 由式 (1) 和 (3) 可得

$$\begin{aligned} & x(k+1) = [A(k) + B(k)F]x(k) - B(k)Fe(k), \\ & e(k+1) = [A(k) - L_p C]e(k), \\ & \hat{x}(k+1) = [A(k) + B(k)F]\hat{x}(k) + L_p Ce(k). \end{aligned} \quad (28)$$

当 $k=0$ 时, 式 (27) 成立. 当 $k > 0$ 时, 令

$$\|B(k)Fe(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq (1-2\theta)e(k)^T Q^{-1}e(k) \leq (1-2\theta)(1-\theta)^{2k}, \quad (29)$$

$$\|[A(k)+B(k)F]x(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq \theta^2 x(k)^T Q^{-1}x(k) \leq \theta^2(1-\theta)^{2k}. \quad (30)$$

应用式(28), 得到

$$\begin{aligned} \|x(k+1)\|_{Q^{-1}}^2 &= \\ \|[A(k)+B(k)F]x(k) - B(k)Fe(k)\|_{Q^{-1}}^2 &\leq \\ \|[A(k)+B(k)F]x(k)\|_{Q^{-1}}^2 + \|B(k)Fe(k)\|_{Q^{-1}}^2 &\leq \\ (1-\theta)^{2k+2}. \end{aligned}$$

根据式(27), 得到式(29)和(30)成立的充分条件为

$$[B(k)F]^T Q^{-1}[B(k)F] \leq (1-2\theta)Q^{-1}, \quad (31)$$

$$[A(k)+B(k)F]^T Q^{-1}[A(k)+B(k)F] \leq \theta^2 Q^{-1}. \quad (32)$$

利用 Schur 补引理, 式(31)和(32)可以转化为如下矩阵不等式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (1-2\theta)Q & * \\ B_l Y & Q \end{bmatrix} &\geq 0, \quad l=1, 2, \dots, L; \\ \begin{bmatrix} \theta^2 Q & * \\ A_l Q + B_l Y & Q \end{bmatrix} &\geq 0, \quad l=1, 2, \dots, L. \end{aligned}$$

类似地, 令

$$\|L_p Ce(k)\|_{Q^{-1}}^2 \leq \theta e(k)^T Q^{-1}e(k) \leq \theta, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \|[A(k)+B(k)F]\hat{x}(k)\|_{Q^{-1}}^2 &\leq \\ (1-\theta)\hat{x}(k)^T Q^{-1}\hat{x}(k) &\leq 1-\theta. \end{aligned} \quad (34)$$

则应用式(28), 得

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(k+1)\|_{Q^{-1}}^2 &= \\ \|[A(k)+B(k)F]\hat{x}(k) + L_p Ce(k)\|_{Q^{-1}}^2 &\leq \\ \|[A(k)+B(k)F]\hat{x}(k)\|_{Q^{-1}}^2 + \|L_p Ce(k)\|_{Q^{-1}}^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

根据式(27), 得到式(33)和(34)成立的充分条件为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta Q & * \\ L_p C Q & Q \end{bmatrix} &\geq 0; \\ \begin{bmatrix} (1-\theta)Q & * \\ A_l Q + B_l Y & Q \end{bmatrix} &\geq 0, \quad l=1, 2, \dots, L. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \|[A(k)-L_p C]e(k)\|_{Q^{-1}}^2 &\leq \\ (1-2\theta)^2 e(k)^T Q^{-1}e(k) &\leq (1-\theta)^{2k+2}, \end{aligned} \quad (35)$$

考虑式(35)与(27)成立的充分条件为

$$[A(k)-L_p C]^T Q^{-1}[A(k)-L_p C] \leq (1-2\theta)^2 Q^{-1}. \quad (36)$$

利用 Schur 补引理, 式(36)等价于

$$\begin{bmatrix} (1-2\theta)^2 Q & * \\ A_l Q + L_p C Q & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad l=1, 2, \dots, L. \quad \square$$

进一步, 式(4)中输入和状态约束满足的充分条件为

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ Y & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{jj} \leq \bar{u}_{j,\max}^2, \quad j=1, 2, \dots, m; \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * \\ 0 & Q & * \\ \sqrt{2}\Psi C(A_l Q + B_l Y) & -\sqrt{2}\Psi C B_l Y & \Gamma \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$l=1, 2, \dots, L, \quad \Gamma_{ss} \leq \bar{\Psi}_s^2, \quad s=1, 2, \dots, q. \quad (38)$$

这样, 鲁棒预测控制问题(4)和(8)被近似地转化为如下 LMI 优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_1, \gamma, Q, Y, Z, \Gamma, G} &\|\hat{x}(k)\|_L^2 + \gamma_1 + \gamma, \\ \text{s.t.} &\text{式(20)} \sim \text{(26), (33)和(34)}. \end{aligned} \quad (39)$$

3 闭环稳定性

当在线实施观测器和控制器时, 根据现在时刻的观测状态 $\hat{x}(k)$ 得到状态反馈增益矩阵 $F(k)$. 假设 $F(k)$ 是独立于系统观测状态 $\hat{x}(k)$ 的, 并且 $F(k)$ 属于不确定集合 $\Psi = \text{Co}(F_1, F_2) \cup \dots \cup (F_{N-1}, F_N)$, 则系统(1)的扩增闭环系统为

$$\chi(k+1) = A_{\text{aug}}(k)\chi(k). \quad (40)$$

其中

$$\chi(k) = [x(k) \quad \hat{k}]^T,$$

$$A_{\text{aug}}(k) = \begin{bmatrix} A(k) & B(k)F(k) \\ L_p C & A(k) + B(k)F(k) - L_p C \end{bmatrix}.$$

定理 2(闭环稳定性) 如果存在正定对称矩阵 $Q > 0$, 使得对于 Ω 内的所有顶点和 Ψ 内的任意 $F_i (i=1, 2, \dots, N)$, 满足如下不等式:

$$\begin{bmatrix} Q & Q A_{\text{aug},i,j}^T \\ A_{\text{aug},i,j} Q & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (41)$$

则扩增系统(40)是闭环稳定的, 其中

$$A_{\text{aug},i,j} = \begin{bmatrix} A_j & B_j F_i \\ L_p C & A + B F_i - L_p C \end{bmatrix},$$

$$j=1, 2, \dots, L, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

证明 对于系统(40), 如果 Ω 内的所有顶点和 Ψ 内的任意 $F_i (i=1, 2, \dots, N)$ 满足式(41), 则对于系统矩阵 $[A \ B] \in \Omega, F_k \in \Psi$, 有

$$\begin{bmatrix} Q & Q A_{\text{aug},i,j}^T \\ A_{\text{aug},i,j} Q & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (42)$$

利用 Schur 补引理, 令 $p = Q^{-1}$, 则式(42)等价于

$$P - A_{\text{aug}}^T P A_{\text{aug}} > 0,$$

即扩增系统的二次型函数 $\chi^T P \chi$ 是单调递减的. \square

4 仿真例子

考虑一个顶点数为 $L=2$ 的多包不确定系统

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.86 & 0 \\ 1 - \alpha(k) & 0.86 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.86 & 0 \\ 1 + \alpha(k) & 0.86 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha(k) \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 + \alpha(k) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0 \ 1 - \alpha(k)], C_2 = [0 \ 1 + \alpha(k)],$$

其中 $\alpha(k) \in [-0.5 \ 0.5]$ 为时变不确定参数. 输入约束为 $|u| \leq 1.5$, 取 $L = I, R = I, \theta = 0.05$, 满足 $0 < \theta < 1$, 初始状态为 $X(0) = [0.067, -0.012]^T$.

当 $\alpha(k) = 0.5 \sin(40k)$ 时, 分别选取观测器增益为 $L_{p1} = [0.003 \ -0.04]$ 和 $L_{p2} = [0.01 \ 0.012]$, 得到闭环系统的状态轨迹和控制律曲线如图1~图4所示.

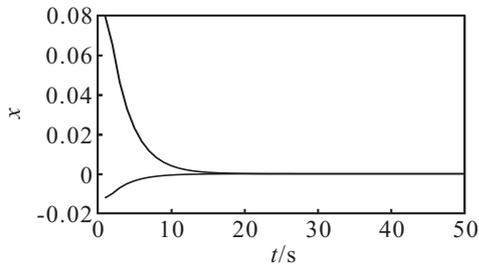


图1 观测增益为 L_{p1} 时对应的闭环系统的状态轨迹

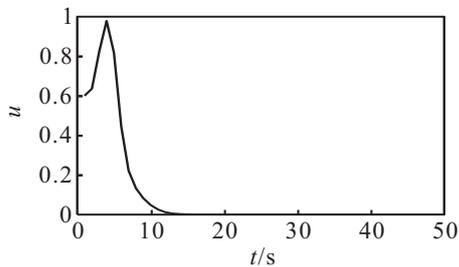


图2 观测增益为 L_{p1} 时对应的控制律曲线

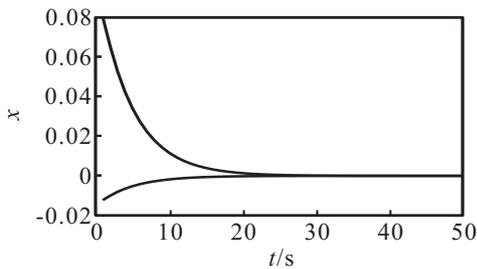


图3 观测增益为 L_{p2} 时对应的闭环系统的状态轨迹

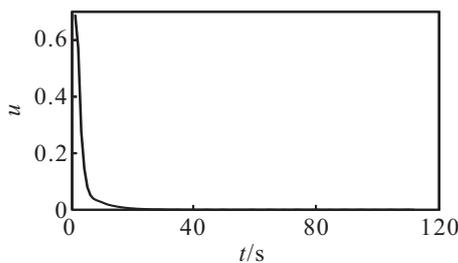


图4 观测增益为 L_{p2} 时对应的控制律曲线

由图1和图3可见, 观测器增益的选取只影响闭环系统达到稳态时所需要的时间, 并不影响控制器的稳定性. 因此, 本文所设计的基于状态观测器的直接约束鲁棒预测控制器是一种稳定且有效的约束鲁棒预测控制器.

5 结 论

本文针对具有约束的时变不确定离散系统, 给出了一种基于状态观测器的直接约束鲁棒预测控制. 由于系统的状态不可测, 直接采用观测状态设计控制器使得闭环系统在有观测误差的情况下, 仍然满足输入和状态约束. 在控制器设计过程中采用参数依赖 Lyapunov 函数, 从而降低二次稳定条件存在的保守性, 利用 LMI 将无穷时域 min-max 优化问题转化为线性规划问题. 利用 Lyapunov 稳定性定理, 证明了所得控制器具有闭环稳定性.

参考文献(References)

- [1] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.
- [2] Mayuresh V Kothare, Venkataramanan Balakrishnan, Manfred Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [3] Francesco A Cuzzola, Jose C Geromel, Manfred Morari. An improved approach for constrained model predictive control[J]. Automatica, 2002, 38(7): 1183-1189.
- [4] Bemporad A, Morari M. Robustness in identification and control[J]. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1999, 245: 207-226.
- [5] Wan Z, Kothare M V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities[J]. J of Process control, 2002, 12(7): 763-774.
- [6] 丁宝苍, 邹涛. 约束时变不确定离散系统的输出反馈预测控制综合[J]. 自动化学报, 2007, 33(1): 78-83. (Ding B C, Zou T. Synthesizing output feedback predictive control for constrained uncertain time-varying discrete systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(1): 78-83.)
- [7] Vesely V, Rosinova D. Robust output model predictive control design: BMI approach[J]. ICIC Int, 2009, 5(4): 1115-1123.
- [8] Hayco H J B, Ton J J B, Henk B V. Optimizing the end-point state-weighting matrix in model-based predictive control[J]. Automatica, 2002, 38(6): 1061-1068.
- [9] 郑鹏远, 席预庚, 李德伟. 基于参数李亚普诺夫函数的鲁棒预测控制器[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(9): 1065-1076. (Zheng P Y, Xi Y G, Li D W. Robust model predictive controller based on parameter-dependent Lyapunov function[J]. J System Science and Mathematical Science, 2008, 28(9): 1065-1076.)

(下转第440页)