

文章编号: 1001-0920(2012)04-0584-09

多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关稳定判据

张庆杰^a, 沈林成^{a,b}, 朱华勇^a

(国防科学技术大学 a. 机电工程与自动化学院, b. 研究生院, 长沙 410073)

摘要: 考虑存在多个时变时延、有限能量扰动以及时变拓扑结构不确定等网络约束条件, 给出了多智能体系统实现鲁棒一致性的时延相关稳定判据. 首先, 利用状态分解将原问题转化为讨论不一致向量系统的鲁棒稳定性; 然后, 考虑到多个时变时延和动态拓扑, 采用构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函的方式分析系统鲁棒稳定性, 并利用自由权矩阵方法获得关于非线性矩阵不等式 (NLMI) 的可行解判据; 最后, 借鉴求解锥补问题的思想, 对 NLMI 判据进行非线性最小化处理, 以得到保守性低、易于求解的 LMI 稳定判据. 数值实例和仿真结果均验证了所提出判据的有效性.

关键词: 鲁棒一致性; Lyapunov-Krasovskii 泛函; 非线性矩阵不等式; 自由权矩阵

中图分类号: TP18

文献标识码: A

Delay-dependent stability criteria for robust consensus of multi-agent systems

ZHANG Qing-jie^a, SHEN Lin-cheng^{a,b}, ZHU Hua-yong^a

(a. College of Mechatronics Engineering and Automation, b. Graduate School, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China. Correspondent: ZHANG Qing-jie, E-mail: nudtzhang@hotmail.com)

Abstract: Considering the network restrictions such as multiple time-varying delays, disturbances with limited energy and time-varying topologies uncertainties, the delay-dependent stability criteria for robust consensus of multi-agent systems are proposed. Firstly, by using the idea of state decomposition, the condition for guaranteeing robust consensus is converted into verifying the robust stability of the disagreement systems. Considering multiple time-varying delays and switching topologies, Lyapunov-Krasovskii functional is constructed to analyse the robust stability. By using free-weighting matrices(FWM) method, the stability criteria can be obtained through solving the corresponding feasible nonlinear matrix inequality nonlinear matrix inequality(NLMI). Finally, according to solving cone complementarity problem, nonlinear minimization is employed to obtain the LMI criteria with lower conservativeness and be solved easily. Numerical examples and simulation results show the effectiveness of the proposed criteria.

Key words: robust consensus; Lyapunov-Krasovskii functional; nonlinear matrix inequality; free-weighting matrices

1 引言

近年来, 多智能体一致性理论已逐渐成为多机器人协调领域的研究热点之一, 其基本任务是基于多个智能体可能相冲突的输入信息, 采用一致性协议协调多智能体系统产生一致的公共输出, 并从理论上证明达到一致所需协调次数的上界与下界相同. 由于一致性理论具有无中心控制、局部信息交换的特点, 多智能体系统可通过简单的行为协调涌现出整体的自治行为, 从而受到了学术界的广泛关注. 迄今为止, 一致性理论已在多机器人系统编队控制^[1]、蜂拥^[2]和聚集^[3]、信息融合^[4]、协同决策^[5]以及耦合振荡器同

步^[6]等多个领域得到了广泛应用. 但在很多应用中, 由于存在智能体移动、通信拥塞或传输距离受限等因素, 研究一致性问题时不得不考虑时延对系统收敛性能的影响. 目前已有大量文献^[7-12]研究了具有通信时延的多智能体系统取得一致性的条件, 大体分为频域和时域两种分析方法. 尽管频域法^[7-8]能够给出系统实现一致所允许通信时延上界的解析表达, 但该方法通常仅适用于固定拓扑结构, 这是因为分析切换拓扑结构需要寻找公共的多个 Lyapunov 函数, 这在实际应用中是十分困难的^[9]. 对于时域法, 大都采用构造 Lyapunov-Krasovskii 函数方法给出系统取得一致的

收稿日期: 2010-10-19; 修回日期: 2011-04-12.

基金项目: 国防基础研究项目(A2820080247); 国家安全基础研究项目(6138101001).

作者简介: 张庆杰(1981—), 男, 博士生, 从事多智能体一致性理论与应用的研究; 沈林成(1965—), 男, 教授, 从事飞行器导航与规划、智能控制等研究.

稳定判据,如压缩理论和波形变量设计方法^[10]以及LMI方法^[11-12]等.由于这一类方法均以给出的稳定判据为充分条件,在判据的保守性方面仍存在进一步改善的可能.

除通信时延外,多智能体系统还会受到诸如执行器偏差、量测/计算误差以及通信拓扑变化等因素的干扰.同样,扰动的存在亦可能破坏多智能体系统的收敛性能或无法实现一致.文献[13-14]研究了噪声对多智能体系统稳定性的影响.进一步,人们开始关注含有时延和外界扰动情况下的多智能体系统鲁棒一致性问题,如频域方法^[9]、Lyapunov-Krasovskii泛函^[15-16]和Lyapunov-Razumikhin泛函^[17]等时域方法.考虑到时变时延和动态拓扑结构等问题,目前时域方法已成为研究和分析系统稳定判据的主流方法.但是,从现有的关于鲁棒一致性的研究成果看,在以下两方面的研究相对较弱:1)关于时延的假设过于苛刻,如[15-16]只考虑单个时变时延情况,[17]假定时延为足够小量;2)稳定性判据保守性大,如[15-16]采用保守性很强的“基本不等式”对Lyapunov-Krasovskii泛函导数进行放大.

本文在考虑同时存在通信时延、扰动以及拓扑结构不确定性等情况下,分析并给出了单积分器型多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关稳定判据.主要结论围绕固定拓扑、动态拓扑两种情况,重点关注如下几方面:1)Lyapunov-Krasovskii(公共)泛函的构造问题,以便判断更为复杂的通信时延等约束条件,如多时变时延、有限能量扰动和时变拓扑结构不确定;2)为降低判据保守性,在主要结论中引入自由权矩阵方法,以获得给定 H_∞ 性能指标 γ 下多智能体系统实现鲁棒一致所允许的更大范围的网络约束条件边界;3)如何获得形式简单、易于求解的稳定性判据.

为研究方便,文中的符号 \star 表示对称矩阵中的对称部分, $U > (\geq, <, \leq) 0$ 表示矩阵 U 是正定的(半正定、负定、半负定), $\mathbf{1}$ 表示向量 $[1, 1, \dots, 1]^T$, $\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{0}$ 表示零值或合适维零矩阵.符号 \otimes 为Kronecker乘积.

2 基础知识

2.1 图论

通常,多智能体间的交互关系可由一个加权的有向图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 描述.其中: $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 为图的节点集,且节点序号属于有限集合 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$; $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为图的边集, (v_i, v_j) 表示图的边; $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ 为邻接矩阵,其非负元素 a_{ij} 的取值与图中的边相对应.例如: $(v_i, v_j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ij} > 0$.节点 v_i 的紧邻节点集合可定义为 $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} : (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$.为研究方便,通常采用有向图拓扑结构相应的Laplacian矩阵

$L = [l_{ij}]$ 来描述节点间的邻接关系.其中

$$l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j.$$

令 $x_i \in \mathbf{R}^{N_d}$ 为节点 v_i 的 N_d 维状态值(如位置或温度等信息),则 $G_x = (G, x)$ 是指状态值为 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$,拓扑结构为 G 的多智能体系统.节点 v_i 和 v_j 状态达成一致当且仅当 $x_i = x_j$.多智能体所有节点实现一致当且仅当对于所有 $i, j \in \mathcal{I}, i \neq j, x_i = x_j$ 成立.此时,该一致值称为群决策值^[7].

2.2 定义和引理

在给出主要结论之前,首先介绍几个定义和引理.

定义1 强连通^[7].如果图中每个节点与其他任意节点间存在一个有向路径,则该图是强连通的.

定义2 平衡图^[7].有向图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 中的节点 v_i 是平衡的当且仅当它的入度和出度相等,如 $\deg_{\text{out}}(v_i) = \deg_{\text{in}}(v_i)$.图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是平衡的当且仅当它的所有节点是平衡的,或者满足

$$\sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}, \forall i \in \mathcal{I}.$$

定义3 平衡矩阵^[12].方阵 $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为平衡矩阵当且仅当 $\mathbf{1}_n^T F = 0$ 和 $F \mathbf{1}_n = 0$ 成立.

引理1 文献[7]研究表明,如果多智能体系统的图 G 是强连通的,则它的Laplacian矩阵 L 满足:1)矩阵 L 的秩为 $n-1$;2)零为矩阵 L 的一个特征值,其相应的特征向量为 $\mathbf{1}_n$;3)其余 $n-1$ 个特征值具有正实部.特别地,如果 G 为无向图,则其特征值均为正实数.

引理2 文献[12]的研究表明,对于完全图的Laplacian矩阵

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix},$$

如果 E_c 为Laplacian矩阵的特征向量所组成的矩阵,则它是一个正交矩阵.对于给定的任意平衡矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$,有下式成立:

$$E_c^T F E_c = \begin{bmatrix} \tilde{F} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 \tilde{F} 是正定矩阵.

引理3^[21]若给定合适维矩阵 $B = B^T, J, K$,则对于所有满足 $D^T(t)D(t) \leq I$ 的矩阵 $D(t)$,不等式 $B + JD(t)K + K^T D^T(t)J^T < 0$ 等价于

$$B + c_0^{-1} J J^T + c_0 K^T K < 0,$$

其中 c_0 为小常数.

引理 4^[22] 若存在一个对称矩阵 X 使得如下 2 个不等式成立:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} O_1 + X & Y_1 \\ * & H_1 \end{bmatrix} > 0, \\ \begin{bmatrix} O_2 - X & Y_2 \\ * & H_2 \end{bmatrix} > 0 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{bmatrix} O_1 + O_2 & Y_1 & Y_2 \\ * & H_1 & 0 \\ * & * & H_2 \end{bmatrix} > 0.$$

引理 5 (Schur)^[23] 若对于给定对称矩阵

$$\begin{aligned} Z &= [Z_{ij}], Z_{11} \in \mathbf{R}^{r \times r}, \\ Z_{12} &\in \mathbf{R}^{r \times (n-r)}, Z_{22} \in \mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}, \end{aligned}$$

则 $Z < 0$ 当且仅当 $Z_{11} < 0, Z_{22} - Z_{21}Z_{11}^{-1}Z_{12} < 0$ 或 $Z_{22} < 0, Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21} < 0$ 成立.

3 问题描述

本文讨论的智能体 i 采用如下连续时间域下的一阶积分器模型:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + \omega_i(t). \quad (2)$$

其中: $x_i(t)$ 为智能体 i 的状态值, $u_i(t)$ 为一致性协议, $\omega_i(t)$ 为外部干扰, 且 $x_i(t), u_i(t), \omega_i(t) \in \mathbf{R}^{N_d}$.

为实现状态一致, 采用如下考虑多个通信时延和拓扑不确定性的一致性协议:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \\ &\beta \sum_{q=1}^m \sum_{j \in N_i} (a_{ij} + \Delta a_{ij}) [x_j(t - \tau_q(t)) - x_i(t - \tau_q(t))]. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: Δa_{ij} 表示通信拓扑的不确定性, β 为一致性协议系数, $\tau_q(t) (q=1, 2, \dots, m)$ 为多个时变的通信时延. 则多智能体系统可描述为如下矩阵形式:

1) 固定拓扑

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \\ &-\beta \sum_{q=1}^m [(L_q + \Delta L_q) \otimes I_{N_d}] x(t - \tau_q) + \omega(t); \end{aligned} \quad (4)$$

2) 动态拓扑

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \\ &-\beta \sum_{q=1}^m [(L_{\sigma q} + \Delta L_{\sigma q}) \otimes I_{N_d}] x(t - \tau_q) + \omega(t). \end{aligned} \quad (5)$$

这里: $x(t) \in \mathbf{R}^{nN_d \times 1}$ 为状态向量, $\omega(t) \in \mathbf{R}^{nN_d \times 1}$ 为噪声向量, $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N_{ss}\}$ (简称为 σ) 为描述动态拓扑结构变换的切换信号. 定义输出方程为

$$z(t) = \Lambda x(t), \quad (6)$$

其中系数矩阵 Λ 定义如下:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \ddots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \dots & \dots & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}.$$

多智能体系统 (4) 或 (5) 渐近实现平均一致性当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (7)$$

且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0), \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (8)$$

本文假定 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, 且 Laplacian 描述的时变拓扑结构不确定性满足:

1) 固定拓扑

$$\Delta L_q = L_q^{(1)} \mathfrak{L}(t) L_q^{(2)}, \quad q = 1, 2, \dots, m; \quad (9)$$

2) 动态拓扑

$$\Delta L_{\sigma q} = L_{\sigma q}^{(1)} \mathfrak{L}_\sigma(t) L_{\sigma q}^{(2)}, \quad q = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

需要说明的是, 针对固定拓扑结构情况, $L_q^{(1)}$ 和 $L_q^{(2)}$ 为合适维常数矩阵, $\mathfrak{L}(t)$ 为未知时变矩阵且满足 $\mathfrak{L}^T(t) \mathfrak{L}(t) \leq I$; 动态拓扑结构情况下, 对于所有切换信号 $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N_{ss}\}$, $L_{\sigma q}^{(1)}$ 和 $L_{\sigma q}^{(2)}$ 为合适维常数矩阵, $\mathfrak{L}_\sigma(t)$ 为未知时变矩阵且满足 $\mathfrak{L}_\sigma^T(t) \mathfrak{L}_\sigma(t) \leq I$.

注 1 为讨论方便, 文中假定 $N_d = 1$. 但需要说明的是, 此后所给出的稳定性判据对于 $N_d > 1$ 的情况仍然适用.

4 主要结论

下面分别讨论固定拓扑和切换拓扑情况下, 多智能体系统实现鲁棒平均一致的稳定判据. 在给出主要结论之前, 先给出如下假设:

假设 1 多智能体系统的图拓扑是强连通的, 且为平衡有向图.

假设 2 存在 m 个通信时延 ($1 \leq m \leq n(n-1)$), 且有 $0 \leq \tau_i \leq \bar{\tau}_i, i = 1, 2, \dots, m$. 为方便讨论, 假定 $0 < \bar{\tau}_1 < \bar{\tau}_2 < \dots < \bar{\tau}_m$.

定理 1 对于多智能体系统 (4) 和 (6), 满足假设 1 和假设 2. 给定常量 $\bar{\tau}_i$ 和 $\bar{\mu}_i, i = 1, 2, \dots, m$, 如果存在合适维矩阵 $P > 0, Q_q \geq 0$ 和 $R_q \geq 0, q = 1, 2, \dots, m$, 自由权矩阵 $N_q = [N_q^{(1)}, N_q^{(2)}]^T, q = 1, 2, \dots, m$, 以及常数 c_0 满足如下 NLMI:

$$\sum_{q=1}^m \Xi_q < 0. \quad (11)$$

其中

$$\Xi_q = \begin{bmatrix} \Xi_q^{11} & \Xi_q^{12} & P & 0 & \bar{\tau}_q N_q^{(1)} \\ * & \Xi_q^{22} & 0 & -\beta \bar{\tau}_q L_q & \bar{\tau}_q N_q^{(2)} \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}_q & 0 \\ * & * & * & -\bar{\tau}_q R_q^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}_q R_q \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \bar{\tau}_q A^T & -\beta P L_q^{(1)} & 0 & & \\ 0 & 0 & c_0 [L_q^{(2)}]^T & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\beta \bar{\tau}_q L_q^{(1)} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -I & 0 & 0 & & \\ * & -c_0 I & 0 & & \\ * & * & -c_0 I & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Xi_q^{11} &= Q_q + N_q^{(1)} + [N_q^{(1)}]^T, \\ \Xi_q^{12} &= -\beta P L_q - N_q^{(1)} + [N_q^{(2)}]^T, \\ \Xi_q^{22} &= -(1 - \mu_q) Q_q - N_q^{(2)} - [N_q^{(2)}]^T. \end{aligned}$$

则采用一致性协议(3)的多智能体系统(4)和(6),可渐近取得鲁棒平均一致且满足指定 H_∞ 性能指标 γ .

证明 根据多智能体系统实现平均一致的条件(8), $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$ 为不变向量. 利用状态分解思想, $x(t)$ 可以描述为如下2个部分的组合,即

$$x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{1} + \delta(t).$$

因此,多智能体系统(4)和(6)实现鲁棒平均一致条件可以转换为判断如下不一致向量系统的零平衡点是否为鲁棒稳定的:

$$\dot{\delta}(t) = -\beta \sum_{q=1}^m (L_{\sigma q} + \Delta L_{\sigma q}) \delta(t - \tau_q) + \omega(t), \quad (12)$$

$$z^\dagger(t) = \Lambda \delta(t). \quad (13)$$

从而,对于给定 H_∞ 性能指标 γ 的多智能体系统,其渐近实现鲁棒一致需满足以下2个条件:

1) $\forall t \geq 0$, 状态方程(4)或(5)和输出方程(6)所描述的多智能体系统在 $\omega(t) = 0$ 条件下是渐近稳定的;

2) 在所有非零 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ 和给定 $\gamma > 0$ 的条件下有 $J(\omega) < 0$, 这里

$$J(\omega) = \int_0^\infty (z^\dagger{}^T(t) z^\dagger(t) - \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t)) dt.$$

下面分别给出满足上述2个条件的详细证明过程.

首先,构造如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned} V(t, \delta(t)) &= \\ &\delta^T(t) P \delta(t) + \sum_{q=1}^m \int_{t-\tau_q(t)}^t \delta^T(s) Q_q \delta(s) ds + \\ &\sum_{q=1}^m \int_{-\bar{\tau}_q}^0 \int_{t+\vartheta}^t \dot{\delta}^T(s) R_q \dot{\delta}(s) ds d\vartheta, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $P > 0$, $Q_q \geq 0$ 和 $R_q \geq 0$ 为合适维正定平衡矩阵, $q = 1, 2, \dots, m$.

由 Newton-Leibniz 定理可得

$$f(t) - f(t-r) = \int_{t-r}^t \dot{f}(s) ds. \quad (15)$$

给定适当维自由权矩阵

$$N_q = \begin{bmatrix} N_q^{(1)} \\ N_q^{(2)} \end{bmatrix}, \quad q = 1, 2, \dots, m,$$

则有

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^m 2[\delta^T(t) N_q^{(1)} + \delta^T(t - \tau_q(t)) N_q^{(2)}] \times \\ &[\delta(t) - \delta(t - \tau_q(t)) - \int_{t-\tau_q(t)}^t \dot{\delta}(s) ds] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

同样,对于合适任意矩阵

$$M_q = \begin{bmatrix} M_q^{(11)} & M_q^{(12)} \\ * & M_q^{(22)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, m,$$

下式成立:

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^m \left[\tau_q(t) \xi_{1q}^T(t) M_q \xi_{1q}(t) - \int_{t-\tau_q(t)}^t \xi_{1q}^T(t) M_q \xi_{1q}(t) ds \right] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\xi_{1q}(t) = [\delta^T(t), \delta^T(t - \tau_q(t))]^T$.

对泛函 $V(t, \delta(t))$ 求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \delta(t)) &= \\ &2\delta^T(t) P \dot{\delta}(t) + \sum_{q=1}^m [\delta^T(t) Q_q \delta(t) - \\ &(1 - \dot{\tau}_q(t)) \delta^T(t - \tau_q(t)) Q_q \delta(t - \tau_q(t))] + \\ &\sum_{q=1}^m \left[\bar{\tau}_q \dot{\delta}^T(t) R_q \dot{\delta}(t) - \int_{t-\bar{\tau}_q}^t \dot{\delta}^T(s) R_q \dot{\delta}(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

用式(12)替换(18)中的 $\dot{\delta}(t)$, 并添加式(16)和(17)等式的左边项,可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \delta(t)) &\leq \\ &-2\delta^T(t) P \sum_{q=1}^m \beta (L_q + \Delta L_q) \delta(t - \tau_q(t)) + \\ &2\delta^T(t) P \omega(t) + \sum_{q=1}^m [\delta^T(t) Q_q \delta(t) - \\ &(1 - \mu_q) \delta^T(t - \tau_q(t)) Q_q \delta(t - \tau_q(t))] + \\ &\sum_{q=1}^m \bar{\tau}_q [-\beta (L_q + \Delta L_q) \delta(t - \tau_q(t)) + \omega(t)]^T R_q \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [-\beta(L_q + \Delta L_q)\delta(t - \tau_q(t)) + \omega(t)] - \\
 & \sum_{q=1}^m \int_{t-\tau_q(t)}^t \delta^T(s)R_q\delta(s)ds + \\
 & \sum_{q=1}^m \left[\tau_q(t)\xi_{1q}^T(t)M_q\xi_{1q}(t) - \right. \\
 & \left. \int_{t-\tau_q(t)}^t \xi_{1q}^T(t)M_q\xi_{1q}(t)ds \right] + \\
 & \sum_{q=1}^m 2[\delta^T(t)N_q^{(1)} + \delta^T(t - \tau_q(t))N_q^{(2)}] \times \\
 & \left[\delta(t) - \delta(t - \tau_q(t)) - \int_{t-\tau_q(t)}^t \delta(s)ds \right]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

下面给出非零 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ 和给定 H_∞ 性能 $\gamma > 0$ 条件下的稳定性证明.

由式 (19) 可知

$$\begin{aligned}
 & \dot{V}(t, \delta(t)) + z^\dagger T(t)z^\dagger(t) - \gamma^2\omega^T(t)\omega(t) \leq \\
 & \sum_{q=1}^m \xi_{2q}^T(t)\Xi_{2q}\xi_{2q}(t) - \\
 & \sum_{q=1}^m \int_{t-\tau_q(t)}^t \xi_{3q}^T(t, s)\Xi_{3q}\xi_{3q}(t, s)ds. \quad (20)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \xi_{2q}(t) = [\xi_{1q}(t), \omega^T(t)]^T, \\
 & \xi_{3q}(t, s) = [\xi_{1q}(t), \delta^T(s)]^T, \\
 & \Xi_{2q} = \\
 & \begin{bmatrix} \Xi_{2q}^{(11)} & \Xi_{2q}^{(12)} & P \\ * & \Xi_{2q}^{(22)} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + [A, 0, 0]^T[A, 0, 0] + \\
 & \bar{\tau}_q[0, -\beta(L_q + \Delta L_q), 1]^T R_q[0, -\beta(L_q + \Delta L_q), 1], \\
 & \Xi_{2q}^{(11)} = Q_q + N_q^{(1)} + [N_q^{(1)}]^T + \bar{\tau}_q M_q^{(11)}, \\
 & \Xi_{2q}^{(12)} = \\
 & -\beta(PL_q + P\Delta L_q) - N_q^{(1)} + [N_q^{(2)}]^T + \bar{\tau}_q M_q^{(12)}, \\
 & \Xi_{2q}^{(22)} = -(1 - \mu_q)Q_q - N_q^{(2)} - [N_q^{(2)}]^T + \bar{\tau}_q M_q^{(22)}, \\
 & \Xi_{3q} = \begin{bmatrix} M_q^{(11)} & M_q^{(12)} & N_q^{(1)} \\ * & M_q^{(22)} & N_q^{(2)} \\ * & * & R_q \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

显然, 如果 $\sum_{q=1}^m \Xi_{2q} < 0$ 和 $\sum_{q=1}^m \Xi_{3q} > 0$ 成立, 则 $\dot{V}(t, \delta(t)) + z^\dagger T(t)z^\dagger(t) - \gamma^2\omega^T(t)\omega(t) < 0$. 对区间 $[0, \infty)$ 取积分, 并令初始值 $V(0) = 0$, 有

$$\int_0^\infty [\dot{V}(t, \delta(t)) + z^\dagger T(t)z^\dagger(t) - \gamma^2\omega^T(t)\omega(t)]dt < 0, \quad (21)$$

或简写为 $\|z^\dagger(t)\|_2 < \gamma\|\omega(t)\|_2$.

用式 (9) 替换 Ξ_{2q} 中的 ΔL_q . 根据引理 4 和引理 5, 对于任意 $q \in [1, m]$, 有 $\Xi_{2q} < 0$ 和 $\Xi_{3q} > 0$ 同时成立等

价于

$$\begin{bmatrix} \Xi_{2qa} & \Xi_{2qb} & \Xi_{2qc} & \Xi_{2qd} \\ * & -\bar{\tau}_q R_q^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{\tau}_q R_q & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

其中

$$\Xi_{2qa} = \begin{bmatrix} \Xi_{2qa}^{(11)} & \Xi_{2qa}^{(12)} & P \\ * & \Xi_{2qa}^{(22)} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{2qa}^{(11)} = \Xi_{2q}^{(11)} - \bar{\tau}_q M_q^{(11)},$$

$$\Xi_{2qa}^{(12)} = \Xi_{2q}^{(12)} - \bar{\tau}_q M_q^{(12)},$$

$$\Xi_{2qa}^{(22)} = \Xi_{2q}^{(22)} - \bar{\tau}_q M_q^{(22)},$$

$$\Xi_{2qb} = \bar{\tau}_q[0, -\beta(L_q + L_q^{(1)})\mathfrak{L}(t)L_q^{(2)}, 1]^T,$$

$$\Xi_{2qc} = \bar{\tau}_q[[N_q^{(1)}]^T, [N_q^{(2)}]^T, 0]^T,$$

$$\Xi_{2qd} = \bar{\tau}_q[A, 0, 0]^T.$$

进一步, 不等式 (22) 可整理为

$$\Phi_q + \Psi_{q1}\mathfrak{L}(t)\Psi_{q2}^T + \Psi_{q2}\mathfrak{L}^T(t)\Psi_{q1}^T < 0. \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \Phi_q = \\
 & \begin{bmatrix} \Phi_q^{(11)} & \Phi_q^{(12)} & P & 0 & \bar{\tau}_q N_q^{(1)} & \bar{\tau}_q A^T \\ * & \Phi_q^{(22)} & 0 & -\bar{\tau}_q \beta L_q & \bar{\tau}_q N_q^{(2)} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}_q & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\tau}_q R_q^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}_q R_q & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\Phi_q^{(11)} = \Xi_{2qa}^{(11)}, \quad \Phi_q^{(12)} = \Xi_{2qa}^{(12)} + \beta P \Delta L_q,$$

$$\Phi_q^{(22)} = \Xi_{2qa}^{(22)},$$

$$\Psi_{q1} = [-\beta P L_q^{(1)} \quad 0 \quad 0 \quad -\beta \bar{\tau}_q L_q^{(1)} \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\Psi_{q2} = [0 \quad L_q^{(2)T} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

应用引理 3, 式 (23) 等价于

$$\Phi_q + c_0^{-1}\Psi_{q1}\Psi_{q1}^T + c_0\Psi_{q2}\Psi_{q2}^T < 0 \sim \Xi_q < 0. \quad (24)$$

也就是说, 如果 $\sum_{q=1}^m \Xi_q < 0$ 成立, 则式 (21) 成立. 因此, 不一致向量系统 (12) 和 (13) 的零平衡点在非零 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ 和给定 $\gamma > 0$ 条件下是稳定的.

类似地, 可以得到 $\omega(t) = 0$ 条件下的不一致向量系统稳定性结论. 令 $\omega(t) = 0$, 式 (19) 可重写为

$$\begin{aligned}
 & \dot{V}(t, \delta(t)) \leq \sum_{q=1}^m \xi_{1q}^T(t)\Xi_{1q}\xi_{1q}(t) - \\
 & \sum_{q=1}^m \int_{t-\tau_q(t)}^t \xi_{3q}^T(t, s)\Xi_{3q}\xi_{3q}(t, s)ds. \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min & \operatorname{Tr} \left\{ \sum_{i=1}^m (\tilde{Y}_q \tilde{Y}'_q + \tilde{R}'_q \tilde{R}_q) \right\}; \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m \tilde{\Xi}_q < 0, \sum_{q=1}^m \begin{bmatrix} \tilde{Y}'_q & I \\ * & \tilde{R}'_q \end{bmatrix} \geq 0, \\ & \sum_{q=1}^m \begin{bmatrix} \tilde{Y}_q & I \\ * & \tilde{Y}'_q \end{bmatrix} \geq 0, \sum_{q=1}^m \begin{bmatrix} \tilde{R}_q & I \\ * & \tilde{R}'_q \end{bmatrix} \geq 0, \\ & \tilde{Y}_q > 0, q = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\tilde{\Xi}_q = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_q^{11} & \tilde{\Xi}_q^{12} & \tilde{P} & 0 & \bar{\tau}_q \tilde{N}_q^{(1)} \\ * & \tilde{\Xi}_q^{22} & 0 & -\beta \bar{\tau}_q \tilde{L}_q & \bar{\tau}_q \tilde{N}_q^{(2)} \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}_q & 0 \\ * & * & * & -\bar{\tau}_q \tilde{Y}_q & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}_q \tilde{R}_q \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \bar{\tau}_q \tilde{A}^T & -\beta \tilde{P} \tilde{L}_q^{(1)} & 0 & & \\ 0 & 0 & -\beta c_0 [\tilde{L}_q^{(2)}]^T & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\beta \bar{\tau}_q \tilde{L}_q^{(1)} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -I & 0 & 0 & & \\ * & -c_0 I & 0 & & \\ * & * & -c_0 I & & \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_q^{11} &= \tilde{Q}_q + \tilde{N}_q^{(1)} + [\tilde{N}_q^{(1)}]^T, \\ \tilde{\Xi}_q^{12} &= -\beta \tilde{P} \tilde{L}_q - \tilde{N}_q^{(1)} + [\tilde{N}_q^{(2)}]^T, \\ \tilde{\Xi}_q^{22} &= -(1 - \mu_q) \tilde{Q}_q - \tilde{N}_q^{(2)} - [\tilde{N}_q^{(2)}]^T. \end{aligned}$$

用 $\tilde{L}_{\sigma q}, \tilde{L}_{\sigma q}^{(1)}, \tilde{L}_{\sigma q}^{(2)}$ 替换式 (31) 中的 $\tilde{L}_q, \tilde{L}_q^{(1)}, \tilde{L}_q^{(2)}$, 可以得到关于动态拓扑结构情况 (定理 2) 的稳定性结论. 限于篇幅, 此处不再赘述.

5 数值实例和仿真结果

考虑图 1 中的 3 个强连通平衡图, 假定它们的邻接矩阵中只含 0, 1 元素.

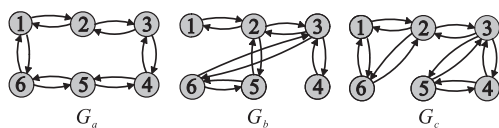


图 1 3 个强连通平衡图

5.1 数值实例

例 1 给定 H_∞ 性能指标 γ , 求多智能体系统允许的最大时延上界.

以图 1 中固定拓扑 G_a 为例, 假定存在如下 2 种时延:

$$\begin{aligned} \tau_1(t) &= \tau_{12}(t) = \tau_{21}(t) = \tau_{34}(t) = \\ & \tau_{43}(t) = \tau_{56}(t) = \tau_{65}(t), \\ \tau_2(t) &= \tau_{16}(t) = \tau_{61}(t) = \tau_{23}(t) = \\ & \tau_{32}(t) = \tau_{45}(t) = \tau_{54}(t), \end{aligned}$$

且满足 $\bar{\tau}_1 < \bar{\tau}_2$. 令 $L_1^{(1)} = 0.2I, L_1^{(2)} = L_1, L_2^{(1)} = 0.2I, L_2^{(2)} = L_2$. 给定 H_∞ 性能指标 $\gamma = 1$, 可行的通信时延上界可由式 (31) 计算得到. 表 1 列出了四因素-三水平正交实验结果.

表 1 四因素-三水平正交实验结果

序号	因素				性能指标值 $\bar{\tau}_2$
	β	$\bar{\tau}_1$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	
1	1.000	0.050	0	0	0.549
2	1.000	0.100	0.500	0.500	0.499
3	1.000	0.200	0.900	0.900	0.399
4	1.500	0.050	0.500	0.900	0.849
5	1.500	0.100	0.900	0	0.799
6	1.500	0.200	0	0.500	0.699
7	2.000	0.050	0.900	0.500	0.749
8	2.000	0.100	0	0.900	0.699
9	2.000	0.200	0.500	0	0.599
\bar{I}_1	0.482	0.716	0.649	0.649	
\bar{I}_2	0.782	0.666	0.649	0.649	
\bar{I}_3	0.682	0.566	0.649	0.649	
极差	0.300	0.150	0	0	

表 1 的实验结果表明:

1) 从平均水平的极差看, 影响最大通信时延上界的主要因素是一致性协议系数项 β , 通信时延 $\bar{\tau}_1$ 次之, 而时延变化率 $\bar{\mu}_1$ 和 $\bar{\mu}_2$ 则没有任何影响.

2) 针对多个通信时延情况, 时延上界 $\bar{\tau}_1$ 的数值越小, 系统所允许的最大通信时延上界 $\bar{\tau}_2$ 越大.

3) 合适地选取一致性协议系数项 β 值, 可以在一定程度上抑制通信时延和拓扑结构不确定性对一致性收敛性能带来的影响.

注 4 大量实验表明, 针对多时延情况, 时延变化率对系统允许通信时延上界的影响甚微, 若去掉式 (14) 中的第 2 项, 则可以得到时延相关/时延变化率无关稳定判据.

例 2 给定通信时延上界, 最小化多智能体系统的 H_∞ 性能指标 γ .

给定 H_∞ 性能指标 γ , 则由本文所得到的稳定判据, 可以得到针对不同的 $\bar{\mu}_2, \bar{\tau}_1, \bar{\mu}_1$ 和 β 的最大通信时延上界 $\bar{\tau}_2$; 反之, 给定最大通信时延上界 $\bar{\tau}_2$ 以及不同的 $\bar{\mu}_2, \bar{\tau}_1, \bar{\mu}_1$ 和 β 值可得到最小化 H_∞ 性能 γ .

下面以图 1 中拓扑集合 $\{G_b, G_c\}$ 动态切换为例, 讨论多智能体系统存在单个时变通信时延的情况. 令 $L_b^{(1)} = 0.2I, L_b^{(2)} = L_b, L_c^{(1)} = 0.2I, L_c^{(2)} = L_c$. 针对任意切换信号 $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \{G_b, G_c\}$, 对定理 2 进行非线性最小化和矩阵降阶处理, 可计算得到给定最大通信时

延上界时的最小 H_∞ 性能 γ , 见表2.

表2 给定通信时延上界 ($\tau=0.25$) 时的最小化 H_∞ 性能 γ

	$\bar{\mu} = 0$	$\bar{\mu} = 0.5$	$\bar{\mu} = 0.9$	任意 $\bar{\mu}$
$\beta = 1.0$	0.713	0.713	0.713	0.713
$\beta = 1.5$	0.372	0.373	0.373	0.373
$\beta = 2.0$	0.278	0.282	0.282	0.281
$\beta = 2.5$	0.304	0.317	0.317	0.316

从表2的结果可以得到如下主要结论:

1) 在给定通信时延上界的前提下, 决定鲁棒性能指标 γ 大小的主要因素是一致性协议系数 β , 而时延变化率对最终结果的影响甚微.

2) $\beta = 2.0$ 时得到的 γ 值远小于 $\beta = 1.0, 1.5$ 和 2.5 时的值, 从而可以推断, 随着 β 值的增大, β 与 γ 之间呈现一种“凹”函数关系的特征.

5.2 判据保守性比较

为体现本文所提出的判据在保守性方面的优势, 下面以固定拓扑 G_a 为例, 分别利用本文判据和文献[15]所得结论, 讨论多智能体系统满足性能指标 $\gamma = 2$ 前提条件下实现鲁棒一致所允许的最大通信时延上界.

表3给出了不同时延变化率情况下的最大通信时延上界. 结果表明, 本文所提出的稳定判据较文献[15]具有更低的保守性. 主要原因是自由权矩阵方法的引入, 没有对 $V(t, \delta(t))$ 导数过度地放大. 因此, 在保守性方面优于采用基本不等式方法的文献[15]所得结论. 此外, 本文所提出的判据能够得到任意时变时延情况下的最大上界, 而文献[15]只适合求解固定时延情况.

表3 不同时延变换率条件下所允许的最大时延上界

	$\bar{\mu} = 0$	$\bar{\mu} = 0.5$	$\bar{\mu} = 0.9$	任意 $\bar{\mu}$
文献[15]中的定理3	0.194	-	-	-
本文判据	2.999	2.999	2.999	2.999

5.3 鲁棒一致性仿真

为进一步验证例1和例2中所得结果的正确性, 选择表1和表2中相应数据分别对如下两种情况进行仿真实验.

1) 固定拓扑 G_a

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.2|\sin(0.9/0.2t)|, \\ \tau_2 &= 0.399|\sin(0.9/0.399t)|, \beta = 1. \end{aligned}$$

2) 动态拓扑 G_b, G_c

$$\begin{aligned} \tau &= 0.25|\sin(0.5/0.25t)|, \beta = 2; \\ \sigma(t) &= \begin{cases} G_b, t \in [kT, kT + 1); \\ G_c, t \in [kT + 1, kT + 2); \end{cases} \quad T = 1\text{s}. \end{aligned}$$

令

$$\mathcal{L}(t) = \begin{bmatrix} \sin t & \mathbf{0}_{1 \times 5} \\ \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{0}_{5 \times 5} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

显然, 式(32)满足条件 $\mathcal{L}^T(t)\mathcal{L}(t) \leq I$. 同时选择文献[15-16]所采用的脉冲信号扰动作为有限能量扰动, 即

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, t \in [1, 64); \\ 1, t \in [64, 65); \\ 0, t \in [65, 137]. \end{cases}$$

图2和图3分别给出了固定拓扑和动态拓扑情况下多智能体系统状态演化曲线.

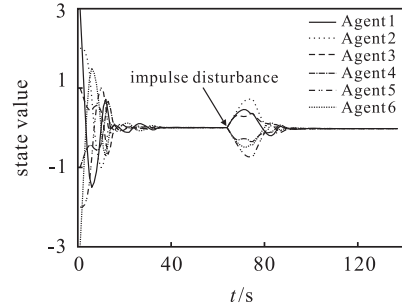


图2 固定拓扑情况下 G_a 多智能体系统状态演化曲线

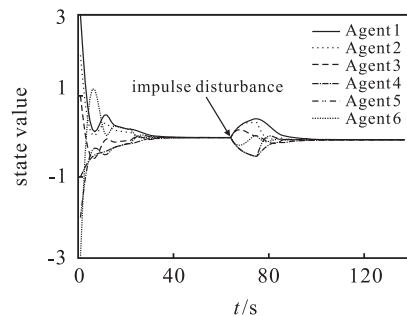


图3 动态拓扑情况下 G_b, G_c 多智能体系统状态演化曲线

由图2和图3可看到, 在给定单位脉冲扰动前, 多智能体系统与邻居节点进行状态交换、调整, 均能收敛到平均一致的状态值. 在给定单位脉冲扰动 (64s) 后, 智能体状态经历短暂调整后能够迅速恢复到原来的收敛值. 仿真结果表明, 采用一致性协议(3)的多智能体系统能够克服有界通信时延、脉冲扰动和时变通信拓扑不确定性等受限通信条件的影响, 且在给定 H_∞ 性能指标 γ 情况下渐近实现鲁棒一致, 从而验证了本文所提出的时延相关LMI稳定判据的有效性.

6 结论

本文给出了网络约束条件下多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关LMI稳定判据. 不同于已往研究成果^[15-17], 它可用于判断同时存在多个时变时延、有限能量扰动以及时变拓扑结构不确定等网络约束条件下的一致性收敛问题. 最后通过数值仿真验证了所提出判据的有效性.

本文主要结论包括以下几方面:

1) 通过判断Lyapunov-Krasovskii泛函的存在性可得到NLMI表达的时延相关稳定判据. 同时, 自由权矩阵的引入, 可确保该判据比文献[15]具有更低的保守性.

2) 为减少NLMI求解难度, 消除奇异Laplacian矩阵对可行解结果的影响, 采用非线性最小化和降阶处理方法将NLMI判据转化为可直接利用数学工具求解的LMI形式, 不同于频域方法在构造Lyapunov-Krasovskii泛函(公共)所表现出的难度, 它可借助数学手段方便地获得一致性收敛所允许的多个通信时延上界.

3) 该稳定判据同时建立了通信时延、时延变化率、一致性协议系数以及给定 H_∞ 性能之间的相互关系, 这便为网络约束条件下满足给定 H_∞ 性能的鲁棒一致性协议设计提供了理论依据.

下一步将探索优化选取 β 准则, 并对如何构造合适的Lyapunov-Krasovskii泛函, 获得更低保守性的稳定判据等方面展开研究.

参考文献(References)

- [1] Porfiri M, Roberson D G, Stilwell D J. Tracking and formation control of multiple autonomous agents: A two-level consensus approach[J]. *Automatica*, 2007, 43(8): 1318-1328.
- [2] Su H, Wang X, Lin Z. Flocking of multi-agents with a virtual leader[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(2): 293-307.
- [3] Lin J, Morse A S, Anderson B D O. The multi-agent rendezvous problem, Part 1: The synchronous case[J]. *SIAM J on Control and Optimization*, 2007, 46(6): 2096-2119.
- [4] Saber R O. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters[C]. 44th IEEE Conf on Decision and Control & European Control Conf. Seville: IEEE, 2005: 8179-8184.
- [5] Bauso D, Giarre L, Pesenti R. Distributed consensus protocols for coordinating buyers[C]. 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Maui: IEEE, 2003: 588-592.
- [6] Jadbabaie A, Motee N, Barahona M. On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators[C]. Proc of the 2004 American Control Conf. Boston: IEEE, 2004: 4296-4301.
- [7] Saber R O, Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [8] Bliman P A, Trecate G F. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications[J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 1985-1995.
- [9] Tian Y, Liu C. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations[J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1347-1353.
- [10] Wang W, Slotine J. Contraction analysis of time-delayed communications and group cooperation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(4): 712-717.
- [11] Sun Y, Wang L, Me G. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays[J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(2): 175-183.
- [12] Lin P, Jia Y. Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay[J]. *Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications*, 2008, 387(1): 303-313.
- [13] Sun Y, Ruan J. Consensus problems of multi-agent systems with noise perturbation[J]. *Chinese Physics B*, 2008, 17(11): 4137-4141.
- [14] Wang L, Liu Z. Robust consensus of multi-agent systems with noise[J]. *Science China Series F*, 2009, 52(5): 824-834.
- [15] Lin P, Jia Y, Li L. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay[J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(8): 643-653.
- [16] Lin P, Jia Y. Robust H_∞ consensus analysis of a class of second-order multi-agent systems with uncertainty[J]. *Institution of Engineering and Technology Control Theory & Application*, 2010, 4(3): 487-498.
- [17] Hu J. On robust consensus of multi-agent systems with communication delays[J]. *Kybernetika*, 2009, 45(5): 768-784.
- [18] Wu M, He Y, She J, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(8): 1435-1439.
- [19] He Y, Wu M, She J, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(5): 828-832.
- [20] He Y, Wu M, She J, et al. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51(1): 57-65.
- [21] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear system[J]. *Automatica*, 1986, 22(4): 397-411.
- [22] Gu K. A further refinement of discretized Lyapunov functional method for the stability of time-delay systems[J]. *Int J of Control*, 2001, 74(10): 967-976.
- [23] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[C]. Society for Industrial and Applied Mathematics Studies in Applied Mathematics. Philadelphia: SIAM, 1994: 28.
- [24] Ghaoui E L, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithms for static output feedback and related problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171-1176.