

文章编号: 1001-0920(2012)05-0781-06

## 欠驱动不对称船舶全局 $K$ 指数镇定的解耦实现

于瑞亭, 朱齐丹, 刘志林, 王 岩

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 研究一类欠驱动不对称船舶的全局  $K$  指数镇定问题, 并且提出一种新的解耦控制方法. 首先, 对船舶系统进行全局微分同胚变换和状态时变变换, 并将其解耦为线性子系统和线性时变子系统, 从而将整个系统的镇定控制问题转化为两个简单子系统的镇定问题, 简化了控制器的设计; 然后, 为每个子系统分别设计独立的全局时变指数镇定控制律, 实现了欠驱动不对称船舶的全局  $K$  指数镇定; 最后, 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

**关键词:** 欠驱动船舶; 时变反馈; 指数镇定; 解耦控制

中图分类号: U664

文献标识码: A

## Decoupling implementation of global $K$ -exponential stabilization of underactuated non-symmetric surface vessel

YU Rui-ting, ZHU Qi-dan, LIU Zhi-lin, WANG Yan

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China. Correspondent: YU Rui-ting, E-mail: ruitingyu@yahoo.com.cn)

**Abstract:** The stabilization problem of an underactuated non-symmetric surface vessel is considered, and a new decoupling method is proposed. Based on the global diffeomorphism and time-varying coordinate transformation, the ship dynamic system can be decoupled into two linear subsystems, and the isolated global exponential stabilizing controllers are designed. Then a global  $K$ -exponential stabilizing controller for the whole system is constructed for the ship in consideration. Finally, simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** underactuated surface vessel; time-varying feedback; exponential stabilization; decoupling control

### 1 引言

近年来, 欠驱动水面船舶 (USV) 的镇定问题已成为控制界备受关注的热点问题, 并取得了大量的研究成果. 由于 USV 存在加速度二阶非完整约束, 不满足 Brockett 定理的必要条件, 不存在任何光滑 (或甚至连续) 时不变的反馈控制律, 使得系统渐近或指数稳定, 为此学者均采用不连续<sup>[1-5]</sup>或时变<sup>[6-8]</sup>的控制方法来解决 USV 的镇定问题<sup>[9]</sup>. 近年来, USV 的渐近镇定问题得到了深入研究, 并取得了丰硕成果<sup>[2-4,7]</sup>, 而对于指数镇定的研究却相对缺乏. 针对简化的前后左右对称型 USV 模型, 文献 [1] 设计了不连续的反馈控制律, 使船舶系统的状态指数收敛至平衡点, 然而船舶初始状态存在诸多假设, 仅实现了一定条件下的指数镇定; [2] 利用反步法设计了不连续反馈控制律, 弱化了 [1] 中的不连续性, 但航向控制以角速度为控制输入, 缺乏动力学特性; [3] 对 [1] 进行了补充, 完成了

包含动力学特性的控制器设计, 但要求船舶的初始艏摇角不能为零; [5] 在初始状态非零条件下, 基于  $\sigma$  变换法将非线性系统转化为线性时不变系统, 并针对零初始条件下的情况单独设计控制律以驱动船舶至非零状态, 从而以切换控制的方式实现了 USV 的全局  $K$  指数镇定.

以上文献对 USV 的研究均假设船体是前后左右对称的, 然而这类船舶在现实中并不常见. 在该假设条件下, 船舶运动系统的惯性参数矩阵和阻尼参数矩阵均为标准的对角线型, 非对角线位置不存在非零项, 弱化了运动状态之间的耦合特性. 因此, 本文将对 USV 镇定的研究转移到不对称船舶, 使其运动模型更贴近现实中的船舶.

### 2 不对称 USV 的运动模型

不对称 USV 的运动学和动力学方程为<sup>[10]</sup>

收稿日期: 2010-11-04; 修回日期: 2011-05-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (50909026); 黑龙江省自然科学基金项目 (F200916); 中央高效基本科研业务费项目 (HEUCFR1116).

作者简介: 于瑞亭(1984—), 男, 博士生, 从事智能控制理论及应用、船舶控制等研究; 朱齐丹(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制理论及应用、智能机器人技术等研究.

$$\dot{\eta} = J(\psi)\nu, M\dot{\nu} + C(\nu)\nu + D(\nu)\nu = \tau. \quad (1)$$

其中

$$\eta = [x, y, \psi]^T, \nu = [u, v, r]^T, \tau = [\tau_u, 0, \tau_r]^T,$$

$$J = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{13} = -m_{22}v - 0.5(m_{23} + m_{32})r, C_{23} = m_{11}u.$$

这里:  $(x, y)$  和  $\psi$  分别为大地坐标系中 USV 的位置和航向角;  $u, v, r$  分别为船体坐标系中 USV 的纵向速度、横荡速度及艏摇角速度; 控制输入  $\tau_u$  和  $\tau_r$  分别为船舶的纵向推力和转向力矩;  $d_{11}, d_{22}, d_{33}, d_{23}, d_{32}$  和  $m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{23}, m_{32}$  分别为水动力阻尼系数和包括附加质量在内的惯性参数;  $M$  为惯性参数矩阵;  $D$  为阻尼参数矩阵;  $C(\nu)$  为科里奥利矩阵. 由于所研究的船舶为左右对称而前后不对称的, 这意味着惯性矩阵  $M$  中的  $m_{23} = m_{32} \neq 0$ , 水动力阻尼项  $d_{23} \neq d_{32} \neq 0$ . 引入微分同胚变换和输入变换<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \varepsilon(\cos \psi - 1), \\ \bar{y} &= y + \varepsilon \sin \psi, \bar{v} = v + \varepsilon r, \\ \tau_u &= m_{11}\bar{\tau}_u - m_{22}vr - 0.5(m_{23} + m_{32})r^2 + d_{11}u, \\ \tau_r &= \\ &(m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32})\bar{\tau}_r/m_{22} - ((m_{11}m_{22} - \\ &m_{22}^2)uv + (m_{11}m_{32} - 0.5m_{22}(m_{23} + m_{32}))ur + \\ &(m_{32}d_{22} - m_{22}d_{32})v - (m_{22}d_{33} - m_{32}d_{32})r)/m_{22}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $\varepsilon = m_{23}/m_{22}$ ,  $\alpha = m_{11}/m_{22}$ ,  $\beta = d_{22}/m_{22}$ ,  $\gamma = d_{22}m_{23}/m_{22}^2 - d_{23}/m_{22}$ ,  $\bar{\tau}_u$  和  $\bar{\tau}_r$  为新的控制输入. 由式(2)可知, 若  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{x}, \bar{y}, \psi, u, \bar{v}, r) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  成立, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x, y, \psi, u, v, r) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  一定成立. 变换后可得如下动态系统:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = u \cos \psi - \bar{v} \sin \psi, \dot{\bar{y}} = u \sin \psi + \bar{v} \cos \psi, \\ \dot{\psi} = r, \dot{u} = \bar{\tau}_u, \dot{\bar{v}} = -\alpha ur - \beta \bar{v} + \gamma r, \dot{r} = \bar{\tau}_r. \end{cases} \quad (3)$$

再次利用输入变换和微分同胚变换<sup>[12]</sup>

$$\begin{cases} w_1 = -(\alpha/\beta)\bar{\tau}_u + (\beta/\alpha)(z_1 + z_4) - z_2z_6 + \\ \quad (1/\beta)z_5z_6 + (\gamma/\beta)z_3z_6, \\ w_2 = \bar{\tau}_r; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z_1 = \bar{x} \cos \psi + \bar{y} \sin \psi, \\ z_2 = -\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi + (1/\beta)\bar{v} - (\gamma/\beta)\psi, \\ z_3 = \psi, z_4 = -(\alpha/\beta)u - z_1, \\ z_5 = \bar{v}, z_6 = r. \end{cases} \quad (5)$$

得到新的级联动态方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{\beta}{\alpha}z_1 - \frac{\beta}{\alpha}z_4 + z_2z_6 - \frac{1}{\beta}z_5z_6 + \frac{\gamma}{\beta}z_3z_6; \\ \dot{z}_5 = -\beta z_5 + \beta z_6(z_1 + z_4) + \gamma z_6. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = z_4z_6, \dot{z}_3 = z_6, \\ \dot{z}_4 = w_1, \dot{z}_6 = w_2. \end{cases} \quad (7)$$

系统(3)与(6)和(7)全局微分同胚, 因此对系统(3)的镇定等同于对系统(6)和(7)的镇定, 即如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = 0$  ( $1 \leq i \leq 6$ ), 则有: 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $(\bar{x}, \bar{y}, \psi, u, \bar{v}, r)$  收敛为 0; 进一步当  $t \rightarrow \infty$  时,  $(x, y, \psi, u, v, r)$  必收敛为 0.

**定义 1** 如果连续函数  $\alpha: [0, a) \rightarrow \infty$  严格递增, 且  $\alpha(0) = 0$ , 则  $\alpha$  属于  $K$  类函数<sup>[13]</sup>.

**定义 2** 如果存在常数  $\gamma > 0$  和一个  $K$  类函数  $k(\cdot)$ , 使得对于任意初始状态  $x(t_0)$  满足

$$\|x(t)\| \leq k(\|x(t_0)\|) \exp[-\gamma(t - t_0)], \quad (8)$$

则该平衡点是全局  $K$  指数稳定 (GKES) 的<sup>[14]</sup>.

**定义 3** 如果存在常数  $k > 0$  和  $\gamma > 0$ , 使得对于任意初始状态  $x(t_0)$  满足

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| k \exp[-\gamma(t - t_0)], \quad (9)$$

则该平衡点是全局指数稳定 (GES) 的<sup>[13]</sup>.

**定理 1** 如果存在控制律使系统(7) GKES, 则该控制律同样能使系统(6) GKES.

**证明** 令  $Z_1 = [z_1, z_5]^T$ ,  $Z_2 = [z_2, z_3, z_4, z_6]^T$ ,  $Z = [Z_1, Z_2]^T$ , 设初始时刻为零. 假设存在一种控制律使系统(7) GKES, 则存在  $K$  类函数  $\alpha_1(\cdot)$  和正常数  $\gamma_1$  使  $\|Z_2(t)\|_2 \leq \alpha_1(\|Z_2(0)\|_2) e^{-\gamma_1 t}$  成立. 定义连续可导的非负函数

$$V = \frac{\beta}{2}z_1^2 + \frac{1}{2\beta}z_5^2. \quad (10)$$

由于  $|z_1| \leq \sqrt{(2/\beta)V}$ ,  $|z_5| \leq \sqrt{2\beta V}$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -cV + \left| -\frac{\beta^2}{\alpha}z_4 + \beta z_2z_6 + \gamma z_3z_6 \right| \sqrt{\frac{2}{\beta}}V + \\ &\left| z_4z_6 + \frac{\gamma}{\beta}z_6 \right| \sqrt{2\beta V} \leq -cV + f(t)\sqrt{V}. \end{aligned}$$

其中

$$c = \min\{2\beta/\alpha, 2\beta\},$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \left| -\frac{\beta^2}{\alpha}z_4 + \beta z_2z_6 + \gamma z_3z_6 \right| + \sqrt{2\beta} \left| z_4z_6 + \frac{\gamma}{\beta}z_6 \right|.$$

为获得线性微分不等式, 令  $W = \sqrt{V}$ , 则  $\dot{W} = \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}}$ , 由此可得

$$\dot{W} \leq -0.5cW + 0.5f(t). \quad (11)$$

由比较定理可得

$$W(t) \leq e^{-\frac{1}{2}c(t-t_0)}W(t_0) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}c(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

由于

$$\|Z_2(t)\|_2 \leq \alpha_1(\|Z_2(0)\|_2)e^{-\gamma_1 t},$$

可得

$$|z_i|_{i=2,3,4,6} \leq \alpha_1(\|Z_2(0)\|_2)e^{-\gamma_1 t},$$

则有

$$f(t) \leq \alpha_2(\|Z_2(0)\|_2)e^{-\gamma_1 t}.$$

其中

$$\alpha_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \left| -\frac{\beta^2}{\alpha} \alpha_1(t)e^{\gamma_1 t} + \beta \alpha_1^2(t) + \gamma \alpha_1^2(t) \right| + \sqrt{2\beta} \left| \alpha_1^2(t) + \frac{\gamma}{\beta} \alpha_1(t)e^{\gamma_1 t} \right|$$

为K函数. 因此有

$$W(t) \leq e^{-\frac{1}{2}ct}W(0) + \frac{1}{2}\alpha_2(\|Z_2(0)\|_2) \times e^{-\frac{1}{2}ct} \int_0^t e^{(\frac{1}{2}c-\gamma_1)\tau} d\tau \leq$$

$$\begin{cases} W_1 = \\ e^{-\frac{1}{2}ct} \sqrt{\max\left\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2\beta}\right\}} \|Z_1(0)\|_2 + \\ \alpha_2(\|Z_2(0)\|_2) \frac{1}{c-2\gamma_1} (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\frac{1}{2}ct}), \\ c-2\gamma_1 \neq 0; \\ W_2 = \\ e^{-\frac{1}{2}ct} \sqrt{\max\left\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2\beta}\right\}} \|Z_1(0)\|_2 + \\ \frac{1}{2}\alpha_2(\|Z_2(0)\|_2)te^{-\frac{1}{2}ct}, \\ c-2\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

令  $\gamma_2 = \min\left\{\frac{1}{2}c, \gamma_1\right\}$ , 由于  $te^{-t} \leq e^{-1}$ , 可得

$$W_1 \leq e^{-\gamma_2 t} \left( \sqrt{\max\left\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2\beta}\right\}} \|Z_1(0)\|_2 + \alpha_2(\|Z_2(0)\|_2) \frac{2}{|c-2\gamma_1|} e^{-\gamma_1 t} \right) \leq \alpha_3(\|Z(0)\|_2)e^{-\gamma_2 t},$$

$$W_2 = \left( e^{-\frac{1}{4}ct} \sqrt{\max\left\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2\beta}\right\}} \|Z_1(0)\|_2 + \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{4}ct} \alpha_2(\|Z_2(0)\|_2) \right) e^{-\frac{1}{4}ct} \leq \left( \sqrt{\max\left\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2\beta}\right\}} \|Z_1(0)\|_2 + \frac{2}{c}e^{-1}\alpha_2(\|Z_2(0)\|_2) \right) e^{-\frac{1}{4}ct} \leq \alpha_4(\|Z(0)\|_2)e^{-\frac{1}{4}ct}.$$

其中

$$\alpha_3(t) = \sqrt{\max\left\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2\beta}\right\}} t + \frac{2}{|c-2\gamma_1|} \alpha_2(t),$$

$$\alpha_4(t) = \sqrt{\max\left\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2\beta}\right\}} t + \frac{2}{c}e^{-1}\alpha_2(t).$$

因此有

$$\|Z_1(t)\|_2 \leq \sqrt{2\max\{\beta/2, 1/2\beta\}}V =$$

$$\sqrt{\max\{\beta, 1/\beta\}}W(t) \leq \alpha_5(\|Z(0)\|_2)e^{-\gamma_3 t}.$$

其中

$$\alpha_5(t) = \sqrt{\max\{\beta, 1/\beta\}} \max\{\alpha_3(t), \alpha_4(t)\},$$

$$\gamma_3 = \min\{c/4, \gamma_2\}.$$

因此系统(6)是全局K指数稳定的.  $\square$

**推论 1** 如果存在一种控制律使得系统(7)GES, 则该控制律能使得系统(6)GKES.

**证明** 系统(7)若为GES的, 则也为GKES的, 由定理1可知系统(6)GKES.  $\square$

由推论1可知, 只需设计控制律使得系统(7)全局指数稳定即可.

### 3 问题描述

子系统(7)全局指数镇定的解耦实现如图1所示.

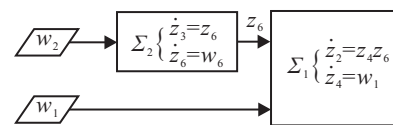


图1 子系统指数镇定的解耦实现

由图1可知, 状态  $z_6$  连接线性子系统  $\Sigma_2$  和非线性子系统  $\Sigma_1$ , 并且子系统  $\Sigma_2$  不受控制输入  $w_1$  和状态  $z_2, z_4$  的影响, 而子系统  $\Sigma_2$  的状态  $z_6$  对子系统  $\Sigma_1$  的稳定性存在影响. 由此可提出如下两个问题:

**问题1**  $z_6$  满足什么样的条件, 可设计控制律  $w_1$  使子系统  $\Sigma_1$  全局指数稳定?

**问题2**  $z_6$  需要满足的条件能否通过设计控制律  $w_2$  实现, 并且  $w_2$  可使子系统  $\Sigma_2$  全局指数稳定?

**引理 1** 考虑如下线性时变系统:

$$\dot{x} = (A_0 + A_t(t))x. \quad (12)$$

其中:  $x \in R^n$ ,  $A_0$  是定常的Hurwitz矩阵, 且时变矩阵  $A_t(t)$  满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_t(t) = 0, \int_0^\infty \|A_t(t)\| dt < \infty,$$

则系统(12)是全局指数稳定的<sup>[15]</sup>.

## 4 研究结果

### 4.1 问题1的解决

首先, 考虑子系统  $\Sigma_1$  可表示为

$$\dot{z}_{24} = f(z_6(t), z_{24}, w_1), z_{24} = [z_2, z_4]^T.$$

为了将其转化为线性时变系统

$$\dot{z}_{24} = (A + A_t(t))z_{24} + Bw_1$$

的形式, 引入指数时变坐标变换  $\bar{z}_2 = z_2 e^{\lambda t} (\lambda > 0)$ , 则

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = (A + A_t(t)) \begin{bmatrix} \bar{z}_2 \\ z_4 \end{bmatrix} + Bw_1. \quad (13)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_t(t) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_6 e^{\lambda t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

当状态  $\bar{z}_2, z_4$  指数收敛时, 由  $z_2 = \bar{z}_2 e^{-\lambda t}$  可知, 状态  $z_2$  将以更快的收敛速率收敛于零. 由此可知, 子系统  $\Sigma_1$  的镇定可通过对系统 (13) 的镇定实现.

由引理 1, 如果  $\|z_6 e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零, 且实数向量  $K$  满足  $A - BK$  为 Hurwitz 矩阵, 则控制律

$$w_1 = -K[\bar{z}_2, z_4]^T, K = [k_1 \ k_2] \quad (14)$$

将使系统状态  $[\bar{z}_2, z_4]^T$  全局指数收敛于零. 然而

$$|sI - (A - BK)| = (s - \lambda)(s + k_2) = 0,$$

即不存在实数向量  $K$  使得  $A - BK$  为 Hurwitz 矩阵. 其原因在于  $a_{12} = 0$ , 反馈系数  $k_1$  未对系统的特征根产生作用. 如能解决该问题, 则有望找到合适的  $K$  使得  $A - BK$  为 Hurwitz 矩阵, 从而使  $\Sigma_1$  GES.

若  $z_6$  可表示成两个函数相加和的形式, 其一用于在  $A$  的  $a_{12}$  位置产生非零项; 其二用于满足  $A_t(t)$  的条件, 即

$$z_6 = h(t) + be^{-\lambda t}, b \neq 0, \quad (15)$$

并且满足  $\|h(t)e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零. 则

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = (A_1 + A_{1t}(t)) \begin{bmatrix} \bar{z}_2 \\ z_4 \end{bmatrix} + B_1 w_1. \quad (16)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{1t}(t) = \begin{bmatrix} 0 & h(t)e^{\lambda t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

在控制律 (14) 的作用下, 系统 (16) 的特征方程为

$|sI - (A_1 - B_1 K)| = s^2 + (k_2 - \lambda)s + (bk_1 - \lambda k_2) = 0$ , 由此可知, 当  $k_2 > \lambda > 0$  且  $bk_1 > \lambda k_2 > 0$  时,  $A_1 - B_1 K$  为 Hurwitz 矩阵.

**定理 2** 对于子系统  $\Sigma_1$ , 若  $z_6$  具有式 (15) 的形式, 并且满足  $\|h(t)e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零, 则控制律  $w_1 = -k_1 z_2 e^{\lambda t} - k_2 z_4$  可使系统  $\Sigma_1$  全局指数稳定. 其中:  $k_2 > \lambda > 0, bk_1 > \lambda k_2 > 0$ .

## 4.2 问题 2 的解决

考虑线性子系统  $\Sigma_2$ , 控制目标为: 设计控制律  $w_2$  使其 GES, 使状态  $z_6$  具有式 (15) 的形式, 且满足  $\|h(t)e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零.

二阶常系数非齐次线性微分方程的解由特解和对应的齐次方程的通解的和构成, 恰好符合  $z_6$  要求  $h(t)$  和  $be^{-\lambda t}$  ( $b \neq 0$ ) 相加和的形式. 对此需构造控制律

$$w_2 = -k_3 z_3 - k_4 z_6 + P_m(t)e^{-\lambda t}, k_3 > 0, k_4 > 0,$$

以得到如下非齐次线性微分方程:

$$\ddot{z}_3 + k_4 \dot{z}_3 + k_3 z_3 = P_m(t)e^{-\lambda t}. \quad (17)$$

记  $\varphi^*(t), \varphi(t)$  分别为方程 (17) 的特解和对应的齐次方程的通解, 可得

$$\begin{cases} z_3(t) = \varphi(t) + \varphi^*(t), \\ z_6(t) = \dot{\varphi}(t) + \dot{\varphi}^*(t). \end{cases} \quad (18)$$

**定理 3** 针对系统 (17), 当  $k_4^2 - 4k_3 > 0, k_3 > 0, k_4 > 0, 0 < \lambda < \frac{k_4 - \sqrt{k_4^2 - 4k_3}}{2}$  时, 存在控制律  $w_2 = -k_3 z_3 - k_4 z_6 + c_0 e^{-\lambda t}, c_0 \neq 0$ , 使得  $z_3, z_6$  指数收敛于零, 且  $z_6$  具备式 (15) 的形式,  $\|\dot{\varphi}(t)e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零,  $\dot{\varphi}^*(t)e^{\lambda t}$  收敛于非零值.

**证明**  $\varphi(t)$  的收敛率取决于反馈参数  $k_3, k_4$ , 且特解  $\varphi^*(t)$  的形式为  $\varphi^*(t) = x^k Q_m(t)e^{-\lambda t}$ , 其中  $Q_m(t)$  是与  $P_m(t)$  同次的多项式.

当  $k_4^2 - 4k_3 > 0$  时, 式 (17) 对应的齐次方程有两个不相等的特征根, 记

$$r_1 = \frac{-k_4 + \sqrt{k_4^2 - 4k_3}}{2}, r_2 = \frac{-k_4 - \sqrt{k_4^2 - 4k_3}}{2},$$

则有  $r_2 < r_1 < 0$  成立. 由微分方程解的性质可知

$$\varphi(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

其中  $C_1$  和  $C_2$  为与初始状态相关的常数. 则有

$$\dot{\varphi}(t) = r_1 C_1 e^{r_1 t} + r_2 C_2 e^{r_2 t}.$$

由假设条件  $r_1 + \lambda < 0$  和  $r_2 + \lambda < 0$ , 可知  $\varphi(t), \|\dot{\varphi}(t)e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零.

若  $r_1 + \lambda < 0$ , 则有  $r_2 < r_1 < -\lambda$ , 即  $-\lambda$  不是特征方程的根, 因此可确定  $k = 0$ . 此时  $\varphi^*(t) = Q_m(t)e^{-\lambda t}$ . 当取  $Q_m(t) = b_0$  ( $b_0 \neq 0$ ) 时, 有  $b_0 e^{-\lambda t}$  指数收敛于零, 即  $\varphi^*(t)$  指数收敛于零, 由此可知  $z_3$  指数收敛于零. 由  $\dot{\varphi}^*(t) = -\lambda b_0 e^{-\lambda t}$  指数收敛于零可知,  $z_6$  指数收敛于零, 并且  $z_6 = \dot{\varphi}(t) + \dot{\varphi}^*(t)$  具备式 (15) 的形式,  $\|\dot{\varphi}(t)e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零,  $\dot{\varphi}^*(t)e^{\lambda t}$  收敛于非零值  $-\lambda b_0$ . 由于  $Q_m(t)$  是与  $P_m(t)$  同次的多项式, 可确定  $P_m(t) = c_0$ . 因此, 可确定控制输入  $w_2$  的形式为

$$w_2 = -k_3 z_3 - k_4 z_6 + c_0 e^{-\lambda t}, c_0 \neq 0. \quad \square$$

## 4.3 控制器设计的解耦实现

基于以上分析, 可提出以下定理:

**定理 4** 对于系统 (7), 存在如下解耦控制律:

$$\begin{cases} w_1 = -k_1 z_2 e^{\lambda t} - k_2 z_4, \\ w_2 = -k_3 z_3 - k_4 z_6 + c_0 e^{-\lambda t} \end{cases} \quad (19)$$

使其全局指数稳定. 其中:  $c_0 \neq 0, k_3 > 0, k_4 > 0, k_4^2 - 4k_3 > 0, k_2 > \lambda > 0, \frac{-c_0 k_1}{\lambda^2 - \lambda k_4 + k_3} > k_2 > 0$ ,

$$\lambda < \frac{k_4 - \sqrt{k_4^2 - 4k_3}}{2}.$$

**证明** 将控制律  $w_2$  代入子系统  $\Sigma_2$ , 可得

$$z_3(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{c_0}{\lambda^2 - \lambda k_4 + k_3} e^{-\lambda t},$$

$$z_6(t) = r_1 C_1 e^{r_1 t} + r_2 C_2 e^{r_2 t} - \frac{\lambda c_0}{\lambda^2 - \lambda k_4 + k_3} e^{-\lambda t}.$$

其中

$$r_1 = \frac{-k_4 + \sqrt{k_4^2 - 4k_3}}{2}, r_2 = \frac{-k_4 - \sqrt{k_4^2 - 4k_3}}{2},$$

$$C_1 = \frac{r_2 z_3(0) - z_6(0)}{r_2 - r_1} - \frac{c_0(r_2 + \lambda)}{(r_2 - r_1)(\lambda^2 - \lambda k_4 + k_3)},$$

$$C_2 = \frac{r_1 z_3(0) - z_6(0)}{r_1 - r_2} - \frac{c_0(r_1 + \lambda)}{(r_1 - r_2)(\lambda^2 - \lambda k_4 + k_3)}.$$

由  $\lambda < \frac{k_4 - \sqrt{k_4^2 - 4k_3}}{2}$  可得:  $\lambda + r_1 < 0, \lambda + r_2 < 0, r_1 < 0, r_2 < 0$ . 因此,  $z_3(t), z_6(t)$  指数收敛于零. 又由于

$$h(t)e^{\lambda t} = r_1 C_1 e^{(r_1 + \lambda)t} + r_2 C_2 e^{(r_2 + \lambda)t},$$

可得  $\|h(t)e^{\lambda t}\|$  指数收敛于零,  $b_0 = \frac{c_0}{\lambda^2 - \lambda k_4 + k_3} \neq 0$ , 满足定理2的条件. 由定理2及定理3可知,  $(z_2, z_3, z_4, z_6)$  全局指数收敛于零. □

### 5 仿真结果

文献[11]研究了一类不对称USV的航迹跟踪问题, 模型参数为:  $m_{11} = 1.1274, m_{22} = 1.8902, m_{33} = 0.1278, m_{23} = -0.0744, m_{32} = -0.0744, d_{11} = 0.0358, d_{22} = 0.1183, d_{33} = 0.0308, d_{23} = -0.0124, d_{32} = -0.0041$ . 本文借用该模型研究了USV的镇定问题, 对提出的解耦控制方法进行了控制仿真, 并与文献[2-3]的反步法控制器和[4]的终端滑模切换控制律进行了仿真对比, 船舶的初始状态设为:  $x(0) = -2, y(0) = 2, \psi(0) = -\pi/2, u(0) = 0, v(0) = 0, r(0) = 0$ . 控制器参数设为:  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 2.5, \lambda = 0.1, c_0 = -1$ . 仿真结果如图2~图5所示. 图中: 实线、虚线和点线分别代表本文、文献[2-3]和[4]的仿真曲线.

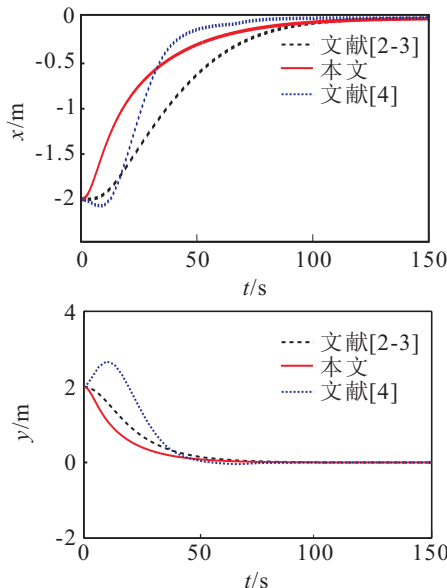


图2 USV的位置响应曲线

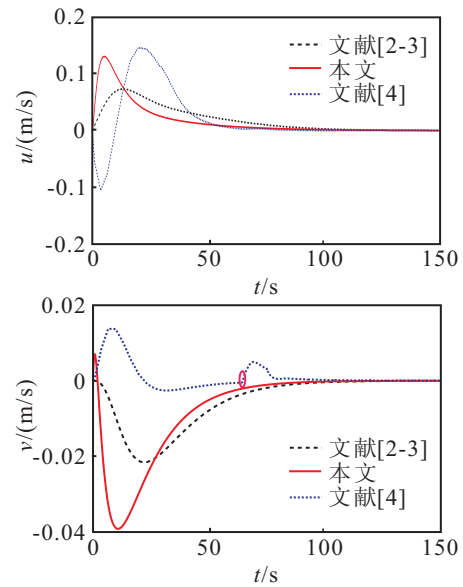


图3 USV的速度响应曲线

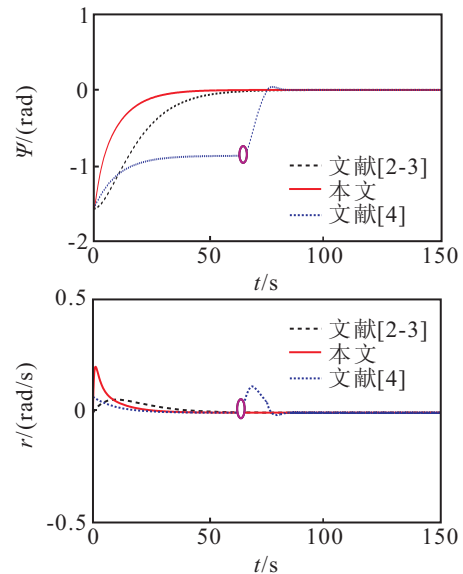


图4 艏摇角与艏摇角速度响应曲线

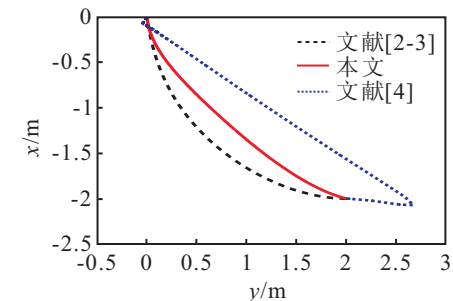


图5 不同控制律下USV的运动轨迹

由图2~图5可以看出, 所提出的控制律与文献[2-3]的控制效果相当, 但具有相对较快的收敛速率, 并且克服了文献[2-3]对USV初始状态存在非零约束这一缺陷, 获得了全局稳定的控制结果. 本文与文献[2-3]的控制效果均优于文献[4], 这是因为文献[4]为切换控制律, 图3和图4中的圆圈代表切换点. 在控制律切换之前对  $\psi$  和  $r$  不加以镇定, 即在这

期间内不考虑 USV 的航向运动, 待船舶到达平衡点附近后, 再单独施加航向控制力矩, 这在轨迹上表现为 USV 首先经过一段时间的调整运动后以直线方式行驶至原点附近, 运动轨迹如图 5 中点线所示. 该控制方式对于两个推进器(双桨或双喷)的无舵船型是可以实现的, 然而对于只装配单推进器的船舶, 在低速情况下实现原地回转运动是比较困难的.

## 6 结 论

本文研究了一类欠驱动不对称船舶的全局  $K$  指数镇定问题. 通过微分同胚变换和状态时变变换, 将船舶动态系统解耦为线性子系统和非线性子系统, 从而将整个系统的镇定问题转化为两个子系统的独立镇定问题, 最终实现了船舶状态的全局  $K$  指数镇定.

### 参考文献(References)

- [1] Reyhanoglu M. Exponential stabilization of an underactuated autonomous surface vessel[J]. *Automatica*, 1997, 33(12): 2249-2254.
- [2] Ghommam J, Mnif F, Benali A, et al. Asymptotic backstepping stabilization of an underactuated surface vessel[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2006, 14(6): 1150-1157.
- [3] Liu Zhi-lin, Yu Rui-ting, Zhu Qi-dan. Comments on "asymptotic backstepping stabilization of an underactuated surface vessel"[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2012, 20(1): 286-288.
- [4] Cheng Jin, Yi Jian-qiang, Zhao Dong-bin. Stabilization of an underactuated surface vessel via discontinuous[C]. *Proc of the 2007 American Control Conf*. New York, 2007: 206-211.
- [5] Ma Bao-li. Global  $k$ -exponential asymptotic stabilization of underactuated surface vessels[J]. *Systems and Control Letters*, 2009, 58(3): 194-201.
- [6] Dong Wen-jie, Guo Yi. Global time-varying stabilization of underactuated surface vessel[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(6): 859-864.
- [7] Ghommam J, Mnif F, Benali A, et al. Global stabilization and tracking control of underactuated surface vessels[J]. *IET Control Theory Applications*, 2010, 4(1): 71-88.
- [8] 赵国良, 韩冰. 欠驱动船舶的光滑时变指数镇定[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(5): 787-790.  
(Zhao G L, Han B. Smooth time-variant exponential stabilization for underactuated surface vessels[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 787-790.)
- [9] 郭晨, 汪洋, 孙富春, 等. 欠驱动水面船舶运动控制研究综述[J]. *控制与决策*, 2009, 24(3): 321-327.  
(Guo C, Wang Y, Sun F C, et al. Survey for motion control of underactuated surface vessels[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(3): 321-327.)
- [10] Fossen T I. *Guidance and control of ocean vehicles*[M]. New York: Wiley, 1994.
- [11] Do K D, Pan J. Global tracking control of underactuated ships with off-diagonal terms[C]. *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*. Hawaii, 2003: 1250-1255.
- [12] Mazenc F, Pettersen K Y, Nijimeijer H. Global uniform asymptotical stabilization of an underactuated surface vessel[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1759-1762.
- [13] Khalil H. *Nonlinear systems*[M]. Englewood-Cliffs: Prentice-Hall, 2002: 144-145.
- [14] Sordalen O, Egeland O. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(1): 35-49.
- [15] Slotine J J E, Li Wei-ping. *Applied nonlinear control*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.

(上接第780页)

- [9] 李秀英, 韩志刚. 一种基于粒子群优化的非线性系统辨识新方法[J]. *控制与决策*, 2011, 26(11): 1627-1630.  
(Li X Y, Han Z G. A new identification approach for nonlinear system based on particle swarm optimization[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(11): 1627-1630.)
- [10] Yeh P C, Kokotović P V. Adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems[J]. *Int J of Control*, 1995, 62(2): 303-324.