文章编号: 1001-0920 (2012) 05-0000-00

一类连续广义 Markov 跳变系统的镇定性研究

常 华[1], 方洋旺[2], 楼顺天[1], 陈 佳[1]
(1. 西安电子科技大学 电子工程学院，西安 710071；2. 空军工程大学 工程学院，西安 710038)

摘 要: 研究转移概率部分未知情况下的连续时间广义 Markov 跳变系统的稳定性和镇定性. 所研究的系统涵盖了转移概率完全已知和完全未知两种特殊情况, 具有更广泛的意义. 首先, 基于线性矩阵不等式方法, 获得了使系统正则、无脉冲、随机稳定的充分条件; 然后, 设计了基于线性矩阵不等式条件的状态反馈控制器, 使闭环系统正则、无脉冲、随机稳定; 最后, 仿真算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 广义系统；Markov 跳变系统；镇定性；线性矩阵不等式
中图分类号: TP13　　**文献标识码:** A

Stabilization of a class of continuous-time singular Markov jump systems

CHANG Hua[1], *FANG Yang-wang*[2], *LOU Shun-tian*[1], *CHEN Jia*[1]
(1. School of Electronic Engineering，Xidian University，Xi’an 710071，China；2. Engineering College，Air Force Engineering University，Xi’an 710038，China. Correspondent：CHANG Hua，E-mail：huachang0218@163.com)

Abstract: The stability and stabilization problems of continuous-time singular Markov jump system with partly unknown transition probabilities are investigated. The system considered is more general, including completely known and completely unknown conditions as two special cases. A sufficient condition for such systems to be regular, impulse-free and stochastically stable is proposed based on linear matrix inequality(LMI) approach. Moreover, the state feedback controller is designed in terms of a set of LMIs to make the closed-loop systems regular, impulse-free and stochastically stable. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed results.

Key words: singular systems；Markov jump systems；stabilization；linear matrix inequality

1 引 言

作为一类更具广泛形式的动力学系统, 广义系统描述了一类更广泛的实际系统模型, 例如: 电力系统、经济系统、网络控制系统等[1-2], 对它们的研究具有重要的理论意义和应用价值[3-4]. 同时, 在工程实际问题中存在着大量的动力学系统, 由于随机突变现象会引起系统的跳变, 如系统元件的故障、参数的改变等, 而这种随机变化通常遵循 Markov 过程的变化规律[5], 此类系统通常被称为 Markov 跳变系统 (MJSs). 近几十年中, 很多学者针对 MJSs 的稳定性、镇定性、H_∞ 控制以及 H_∞ 滤波等问题进行了大量的研究[6-8].

近年来, 将两者结合起来的广义 Markov 跳变系统 (SMJSs) 成为了控制领域的一大研究热点[9-15]. 文献 [11-12] 分别讨论了离散和连续系统的稳定性和镇定性, [13-14] 提出了离散和连续系统的基于严格线性矩阵不等式 (LMIs) 的稳定性判定定理, [15] 研究了带时滞的离散 SMJSs 的稳定性和镇定性.

现有文献的结论大都建立在转移概率完全已知的基础上, 但在实际中, 往往由于可行性、实验复杂度以及高成本等原因, 不能获得系统模态跳变的全部转移概率. 因此, 转移概率部分未知条件下的研究具有更广泛的理论意义和应用价值, 这无疑给 SMJSs 的理论研究和实际应用提出了新的挑战[16-18]. 文献 [16-17] 分别研究了 MJSs 在转移概率部分未知条件下的稳定性、镇定性和 H_∞ 控制问题, 但没有将其推广到奇异系统. [18] 在 [13] 的基础上, 利用 [16] 中的方法, 提出了离散 SMJSs 的镇定控制方法. 然而, 与离散系

收稿日期: 2010-11-16；**修回日期:** 2011-03-08.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60674040).
作者简介: 常华(1983−), 男, 博士生, 从事随机系统控制理论与应用等研究；方洋旺(1966−), 男, 教授, 博士生导师, 从事导弹制导与控制、随机最优控制理论与应用等研究.

统相比, 连续系统的转移概率满足不同的条件, 在部分未知的情况下, 具有更大的处理难度. [18] 的方法不能推广到连续系统. 因此, 本文在 [14] 的基础上, 结合 [16] 中的方法, 提出一种新的方法, 解决了转移概率部分未知条件下连续 SMJSs 的镇定控制问题.

本文将连续时间广义 Markov 跳变系统的稳定性条件进行推广, 得出了转移概率部分未知条件下系统正则、无脉冲, 且随机稳定的充分条件, 并表示为线性矩阵不等式 (LMIs) 形式. 进而推导出利用状态反馈控制器, 使闭环系统正则、无脉冲, 且随机稳定的充分条件. 基于以上结论, 提出状态反馈控制器的设计方法. 最后, 通过一个数值算例, 验证了所提出方法的有效性和可行性.

2 问题描述

给定概率空间 $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$, 考虑如下连续时间广义 Markov 跳变系统:

$$E\dot{x}(t) = A(r_t)x(t) + B(r_t)u(t). \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$, $u(t) \in \boldsymbol{R}^m$ 分别表示系统状态和控制输入; $E \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, 且 $\operatorname{rank}(E) = r \leqslant n$; $\{r_t, t \geqslant 0\}$ 为取值于有限状态空间 $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \cdots, N\}$ 的连续时间、离散状态 Markov 过程. 从模式 i 到模式 j 的转移概率为

$$\Pr(r_{t+h} = j | r_t = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h), j \neq i; \\ 1 + \lambda_{ii}h + o(h), j = i. \end{cases}$$

其中: $h > 0$, 满足 $\lim\limits_{h\to 0}(o(h)/h) = 0$; λ_{ij} 为从模式 i 到模式 j 的转移速率, 满足 $\lambda_{ij} \geqslant 0, \forall i, j \in \boldsymbol{S}, j \neq i$; $\lambda_{ii} = -\sum\limits_{j\in \mathbf{S}, j\neq i} \lambda_{ij}, \forall i \in \boldsymbol{S}$. 转移速率矩阵定义为

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \ldots & \lambda_{NN} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

对于 $r_t = i \in \boldsymbol{S}$, $A(r_t) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B(r_t) \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$ 为适当维数的已知常数矩阵. 为表示方便, 当 $r_t = i \in \boldsymbol{S}$ 时, 第 i 个模式下的 $A(r_t)$, $B(r_t)$ 分别简记为 A_i, B_i, 下文涉及到 $r_t = i \in \boldsymbol{S}$ 时, 依此类推.

本文针对转移概率部分未知的条件, 研究转移速率矩阵 (2) 中部分元素未知的情况. 为此给出如下定义:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_K^i \bigcup \boldsymbol{S}_{UK}^i, \ \forall i \in \boldsymbol{S}. \tag{3}$$

其中: $\boldsymbol{S}_K^i$={j: λ_{ij}已知}, $\boldsymbol{S}_{UK}^i$={j: λ_{ij}未知}. 进一步可给出如下定义:

$$\boldsymbol{S}_K^i = \left(K_1^i, \cdots, K_m^i\right), \ \forall 1 \leqslant m \leqslant N. \tag{4}$$

这里: $K_m^i \in \boldsymbol{N}^+$ 表示条件 (2) 中第 i 行的第 m 列元素已知, 其值为 m. 另外, 本文定义 $\lambda_K^i = \sum\limits_{j\in \boldsymbol{S}_K^i} \lambda_{ij}$.

定义 1[10] 1) 当 $u(t) = 0$ 时, 称连续时间广义 Markov 跳变系统 (1) 是正则的, 若 $\forall i \in \mathbf{S}$, $\det(sE - A_i) \neq 0$.

2) 当 $u(t) = 0$ 时, 称连续时间广义 Markov 跳变系统 (1) 是无脉冲的, 若 $\forall i \in \boldsymbol{S}$, $\deg(\det(sE - A_i)) = \operatorname{rank}(E)$.

3) 当 $u(t) = 0$ 时, 称连续时间广义 Markov 跳变系统 (1) 是随机稳定的, 若对于任意初始状态 $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ 和 $r_0 \in \boldsymbol{S}$, 存在标量 $M(x_0, r_0) > 0$, 使下式成立:

$$\mathrm{E}\left\{\int_0^\infty \|x(t)\|^2 \mathrm{d}t | (x_0, r_0)\right\} \leqslant M(x_0, r_0),$$

其中 E 表示数学期望.

4) 当 $u(t) = 0$ 时, 则称连续时间广义 Markov 跳变系统 (1) 是随机可容许的, 若为正则、无脉冲, 且随机稳定的.

在此定义行满秩矩阵 $R \in \boldsymbol{R}^{(n-r)\times n}$ 和列满秩矩阵 $S \in \boldsymbol{R}^{n\times(n-r)}$, 分别满足 $E^\mathrm{T}R^\mathrm{T} = 0$ 和 $ES = 0$.

引理 1[19] 如果对称矩阵 P 满足 $E_R^\mathrm{T}PE_R > 0$, $\varPhi$ 为适当维数的非奇异矩阵, 则矩阵 $PE^\mathrm{T} + S\varPhi R$ 为非奇异矩阵, 且其逆矩阵可表示为

$$\left(PE^\mathrm{T} + S\varPhi R\right)^{-1} = \tilde{P}E + R^\mathrm{T}\tilde{\varPhi}S^\mathrm{T}. \tag{5}$$

其中: E_L 和 E_R 满足列满秩, 且 $E = E_LE_R^\mathrm{T}$; 对称矩阵 $\tilde{P}$ 和非奇异矩阵 $\tilde{\varPhi}$ 分别满足

$$E_L^\mathrm{T}\tilde{P}E_L = (E_R^\mathrm{T}PE_R)^{-1},$$
$$\tilde{\varPhi} = (RR^\mathrm{T})^{-1}\varPhi(S^\mathrm{T}S)^{-1}.$$

引理 2[14] 当 $u(t) = 0$ 时, 系统 (1) 是随机可容许的充分必要条件是: 存在矩阵 $P_i \in \boldsymbol{R}^{n\times n} > 0$ 和非奇异矩阵 $\varPhi_i \in \boldsymbol{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, 使当 $\forall i \in \boldsymbol{S}$ 时, 下列 LMIs 成立:

$$A_i^\mathrm{T}\left(P_iE + R^\mathrm{T}\varPhi_iS^\mathrm{T}\right) + \left(P_iE + R^\mathrm{T}\varPhi_iS^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T}A_i + \sum_{j\in \boldsymbol{S}}\left(\lambda_{ij}E^\mathrm{T}P_jE\right) < 0. \tag{6}$$

对于系统 (1), 考虑模式依赖状态反馈控制器

$$u(t) = K(r_t)x(t), \tag{7}$$

其中 $K_i = K(r_t) \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ 为待定的控制增益矩阵.

相应的闭环系统为

$$E\dot{x}(t) = (A_i + B_iK_i)x(t). \tag{8}$$

本文的目的是研究转移速率矩阵(2)部分未知条件下, 当 $u(t) = 0$ 时, 系统 (1) 正则、无脉冲, 且随机稳定的条件. 在此基础上, 设计模式依赖状态反馈控制器 (7), 使闭环系统 (8) 正则、无脉冲, 且随机稳定, 从而实现系统(1)的镇定控制.

3 主要结果

首先, 对自治系统 (1)($u(t)=0$) 的稳定性条件进行分析. 在转移速率矩阵 (2) 部分未知条件下, 以下定理将给出自治系统 (1) 随机可容许的充分条件:

定理 1 假设转移速率矩阵 (2) 部分未知, 当 $u(t)=0$ 时, 系统 (1) 是随机可容许的, 若存在矩阵 $P_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}>0$ 和非奇异矩阵 $\varPhi_i\in\boldsymbol{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, 使当 $\forall i\in\boldsymbol{S}$ 时, 下列 LMIs 成立:

$$(1+\lambda_K^i)[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm T}P_jE)<0;\tag{9}$$

$$A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i+E^{\mathrm T}P_jE\leqslant 0,\ \ \forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i,j\neq i;\tag{10}$$

$$A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i+E^{\mathrm T}P_jE\geqslant 0,\ \ \forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i,j=i.\tag{11}$$

其中 $\lambda_K^i=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}\lambda_{ij}$.

证明 由引理 2 可知, 若式 (6) 成立, 则自治系统 (1) 是随机可容许的. 考虑 $\sum\limits_{j\in\boldsymbol{S}}\lambda_{ij}=0$, 式 (6) 左边可表示为

$$\varPsi_i=\Big(1+\sum_{j\in\boldsymbol{S}}\lambda_{ij}\Big)[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}}(\lambda_{ij}E^{\mathrm T}P_jE).$$

利用关系式(3), $\varPsi_i$可表示为

$$\begin{aligned}\varPsi_i=&\Big(1+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}\lambda_{ij}\Big)\Big[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+\Big(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T}\Big)^{\mathrm T}A_i\Big]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm T}P_jE)+\\&\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i}\lambda_{ij}\Big)[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm T}P_jE)=\\&(1+\lambda_K^i)[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm T}P_jE)+\\&\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i}\lambda_{ij}\Big)[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i+E^{\mathrm T}P_jE].\end{aligned}$$

一方面, 考虑 $\lambda_{ij}\geqslant 0,\forall i,j\in\boldsymbol{S},j\neq i$, 因此 $\forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i$, 如果 $j\neq i$, 则由式 (9), (10) 可直接得出 $\varPsi_i<0$; 另一方面, 考虑 $\lambda_{ii}=-\sum\limits_{j\in\boldsymbol{S},j\neq i}\lambda_{ij}<0$, 可得

$$\begin{aligned}\varPsi_i=&(1+\lambda_K^i)[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm T}P_jE)+\\&\lambda_{ii}[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i+E^{\mathrm T}P_iE]+\\&\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i,j\neq i}\lambda_{ij}\Big)[A_i^{\mathrm T}(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})+(P_iE+R^{\mathrm T}\varPhi_iS^{\mathrm T})^{\mathrm T}A_i+E^{\mathrm T}P_jE].\end{aligned}$$

因此有 $\forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i$, 如果 $j=i$, 由式 (9)~(11) 可得 $\varPsi_i<0$.

综上所述, 如果式 (9)~(11) 成立, 则自治系统 (1) 是随机可容许的. □

下面基于定理 1, 针对转移速率矩阵 (2) 部分未知的情况, 设计模式依赖状态反馈控制器 (7), 给出闭环系统 (8) 随机可容许的充分条件.

定理 2 给定任意常数 ε_i, 假设转移速率矩阵 (2) 部分未知, 闭环系统 (8) 是随机可容许的, 若存在矩阵 $\tilde P_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}>0$ 和非奇异矩阵 $\tilde\varPhi_i\in\boldsymbol{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, 矩阵 $L_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 和 $H_i\in\boldsymbol{R}^{m\times(n-r)}$, 使当 $\forall i\in\boldsymbol{S}$ 时, 下列 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{l}(1+\lambda_K^i)(A_iY_i+Y_i^{\mathrm T}A_i^{\mathrm T}+\\W_i)+\lambda_{ii}(\varepsilon_iEY_i+\\\varepsilon_iY_i^{\mathrm T}E^{\mathrm T}-\varepsilon_i^2E\bar P_iE^{\mathrm T})\end{array}&Y_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}(E)\\F_i(E)Y_i&-X_i(\tilde P)\end{bmatrix}<0,\ \ \forall i\in\boldsymbol{S}_K^i;\tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}(1+\lambda_K^i)(A_iY_i+Y_i^{\mathrm T}A_i^{\mathrm T}+W_i)&Y_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}(E)\\F_i(E)Y_i&-X_i(\tilde P)\end{bmatrix}<0,\ \ \forall i\notin\boldsymbol{S}_K^i;\tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}(A_iY_i+Y_i^{\mathrm T}A_i^{\mathrm T}+W_i)&Y_i^{\mathrm T}E_R\\E_R^{\mathrm T}Y_i&-E_R^{\mathrm T}\tilde P_jE_R\end{bmatrix}\leqslant 0,\ \ \forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i,j\neq i;\tag{14}$$

$$A_iY_i+Y_i^{\mathrm T}A_i^{\mathrm T}+W_i+\varepsilon_iEY_i+\varepsilon_iY_i^{\mathrm T}E^{\mathrm T}-\varepsilon_i^2E\tilde P_jE^{\mathrm T}\geqslant 0,\ \forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i,j=i.\tag{15}$$

其中

$Y_i=\tilde P_iE^T+S\tilde\varPhi_iR$;

$W_i=B_i(L_iE^{\mathrm T}+H_iR)+(L_iE^{\mathrm T}+H_iR)^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}$;

$F_i(E)=\Big[\sqrt{\lambda_{iK_1^i}}E_R,\cdots,\sqrt{\lambda_{iK_m^i}}E_R\Big]^{\mathrm T},\ K_m^i\neq i$;

$X_i(\tilde P)=\mathrm{diag}\{E_R^{\mathrm T}\tilde P_{K_1^i}E_R,\cdots,E_R^{\mathrm T}\tilde P_{K_m^i}E_R\},\ K_m^i\neq i$.

若式 (12)~(15) 有解, 则状态反馈控制器增益矩阵为

$$K_i=(L_iE^{\mathrm T}+H_iR)(\tilde P_iE^{\mathrm T}+S\tilde\varPhi_iR)^{-1}.$$

证明 假设转移速率矩阵 (2) 部分未知, 考虑闭环系统 (8), 系统结构参数矩阵为 $\tilde A_i=A_i+B_iK_i$. 由定理 1 可知, 系统 (8) 是随机可容许的, 若存在矩

阵 $P_i \in \boldsymbol{R}^{n\times n} > 0$ 和非奇异矩阵 $\varPhi_i \in \boldsymbol{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, 使当 $\forall i \in \boldsymbol{S}$ 时, 下列矩阵不等式成立:

$$(1+\lambda_K^i)[\tilde{A}_i^{\mathrm{T}}(P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}})+(P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\tilde{A}_i]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm{T}}P_jE)<0; \tag{16}$$

$$\tilde{A}_i^{\mathrm{T}}(P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}})+(P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\tilde{A}_i+E^{\mathrm{T}}P_jE\leqslant 0,\ \forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i, j\neq i; \tag{17}$$

$$\tilde{A}_i^{\mathrm{T}}(P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}})+(P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\tilde{A}_i+E^{\mathrm{T}}P_jE\geqslant 0,\ \forall j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i, j=i. \tag{18}$$

其中 $\lambda_K^i=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}\lambda_{ij}$.

定义 $\tilde{Y}_i=P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}}$, 式 (16) 左边可表示为

$$\varPsi_i=(1+\lambda_K^i)[(A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}\tilde{Y}_i+\tilde{Y}_i^{\mathrm{T}}(A_i+B_iK_i)]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm{T}}P_jE).$$

当 $\forall i\in\boldsymbol{S}_K^i$ 时, $\varPsi_i$ 可表示为

$$\begin{aligned}\varPsi_i=&(1+\lambda_K^i)[(A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}\tilde{Y}_i+\tilde{Y}_i^{\mathrm{T}}(A_i+B_iK_i)]+\\&\lambda_{ii}E^{\mathrm{T}}P_iE+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i,j\neq i}(\lambda_{ij}E^{\mathrm{T}}P_jE)=\\&(1+\lambda_K^i)\left[(A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}\tilde{Y}_i+\tilde{Y}_i^{\mathrm{T}}(A_i+B_iK_i)\right]+\\&\lambda_{ii}E_R(E_L^{\mathrm{T}}P_iE_L)E_R^{\mathrm{T}}+\\&\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i,j\neq i}[\lambda_{ij}E_R(E_L^{\mathrm{T}}P_jE_L)E_R^{\mathrm{T}}].\end{aligned}$$

由引理 1 可知 $\tilde{Y}_i$ 可逆, 且

$$E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R=(E_L^{\mathrm{T}}P_iE_L)^{-1},$$
$$Y_i=(P_iE+R^{\mathrm{T}}\varPhi_iS^{\mathrm{T}})^{-1}=\tilde{P}_iE^{\mathrm{T}}+S\tilde{\varPhi}_iR.$$

对 $\varPsi_i$ 两边分别左乘和右乘 $\begin{bmatrix}Y_i^{\mathrm{T}}&0\\0&I\end{bmatrix}$ 及其转置, 由 Schur 补引理可得, $\varPsi_i<0$ 等价于

$$\begin{bmatrix}\begin{matrix}[(1+\lambda_K^i)(A_iY_i+Y_i^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}+\\B_iK_iY_i+Y_i^{\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}})+\\\lambda_{ii}Y_i^{\mathrm{T}}E_R(E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R)^{-1}E_R^{\mathrm{T}}Y_i]\end{matrix}&Y_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}(E)\\F_i(E)Y_i&-X_i(\tilde{P})\end{bmatrix}<0, \tag{19}$$

其中 $F_i(E)$ 和 $X_i(\tilde{P})$ 如定理 2 中所定义.

定义 $L_i=K_i\tilde{P}_i$, $H_i=K_iS\tilde{\varPhi}_i$, 替换 $W_i=B_i(L_iE^{\mathrm{T}}+H_iR)+(L_iE^{\mathrm{T}}+H_iR)^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}$, 可得

$$\begin{bmatrix}\begin{matrix}(1+\lambda_K^i)(A_iY_i+Y_i^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}+W_i)+\\\lambda_{ii}Y_i^{\mathrm{T}}E_R(E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R)^{-1}E_R^{\mathrm{T}}Y_i\end{matrix}&Y_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}(E)\\F_i(E)Y_i&-X_i(\tilde{P})\end{bmatrix}<0. \tag{20}$$

显然, 将

$$K_i=(L_iE^{\mathrm{T}}+H_iR)(\tilde{P}_iE^{\mathrm{T}}+S\tilde{\varPhi}_iR)^{-1}$$

代入式 (19), 可得式 (20).

当 $\forall i\notin\boldsymbol{S}_K^i$ 时, $\varPsi_i$ 可表示为

$$\varPsi_i=(1+\lambda_K^i)[(A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}\tilde{Y}_i+\tilde{Y}_i^{\mathrm{T}}(A_i+B_iK_i)]+\sum_{j\in\boldsymbol{S}_K^i}[\lambda_{ij}E_R(E_L^{\mathrm{T}}P_jE_L)E_R^{\mathrm{T}}].$$

类似可得, $\varPsi_i<0$ 等价于式 (13).

下面考虑式 (20) 中的非线性项, 由引理 1 可知, $E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R>0$. 给定任意常数 ε_i, 可得

$$[Y_i^{\mathrm{T}}E_R-\varepsilon_iE_L(E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R)](E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R)^{-1}[Y_i^{\mathrm{T}}E_R-\varepsilon_iE_L(E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R)]^{\mathrm{T}}\geqslant 0.$$

展开上式, 整理可得

$$\varepsilon_iEY_i+\varepsilon_iY_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-\varepsilon_i^2E\tilde{P}_iE^{\mathrm{T}}\leqslant Y_i^{\mathrm{T}}E_R(E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R)^{-1}E_R^{\mathrm{T}}Y_i. \tag{21}$$

由 $\lambda_{ii}=-\sum\limits_{j\in\boldsymbol{S},j\neq i}\lambda_{ij}<0$ 可得

$$\lambda_{ii}[Y_i^{\mathrm{T}}E_R(E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R)^{-1}E_R^{\mathrm{T}}Y_i]\leqslant\lambda_{ii}(\varepsilon_iEY_i+\varepsilon_iY_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-\varepsilon_i^2E\tilde{P}_iE^{\mathrm{T}}).$$

因此, 式 (12) 和 (13) 成立, 则式 (16) 成立.

同理可证, 式 (14) 和 (15) 成立, 则式 (17) 和 (18) 分别成立.

综上所述, 式 (12)~(15) 成立, 则闭环系统 (8) 是随机可容许的, 且模式依赖状态反馈控制器 (7) 的增益矩阵为

$$K_i=(L_iE^{\mathrm{T}}+H_iR)(\tilde{P}_iE^{\mathrm{T}}+S\tilde{\varPhi}_iR)^{-1}.\qquad\square$$

注 1 当 $\boldsymbol{S}_{UK}^i=\varnothing$ 时, 系统 (1) 简化为转移概率完全已知的理想模型, 本文的结论简化为与文献 [14] 相同的形式; 当 $\mathbf{S}_K^i=\varnothing$ 时, 系统退化为不具有模式跳变信息的任意开关系统, 本文的结论同样适用. 因此, 本文模型和所得的结论是对现有结果的推广, 具有更普遍的理论意义和应用价值.

4 数值算例

对于系统 (1), 考虑三维 4 模态的情形, 系统参数如下:

$$A_1=\begin{bmatrix}1.5&-1.4&1.6\\-2.5&-0.6&-1.1\\0.4&0.5&-0.8\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}2.4&0.5\\0&0.6\\0.5&0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0.5&0.7&1.3\\0.1&0.9&0.7\\0.4&0.5&0.2\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0&0.9\\-0.7&0.6\\0.1&0\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1&-2.8&3.2\\-3&-1.2&-2\\0.8&0.4&-1.6\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}2&0.4\\0&0.3\\0.6&0\end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix}1&0.4&2\\0.2&1.2&1.4\\0.2&1&0.4\end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix}0&0.8\\-0.6&0.5\\0.2&0\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0.6&0\\0&0&0\end{bmatrix},R=[\,0\ \ 0\ \ 1\,],S=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},$$

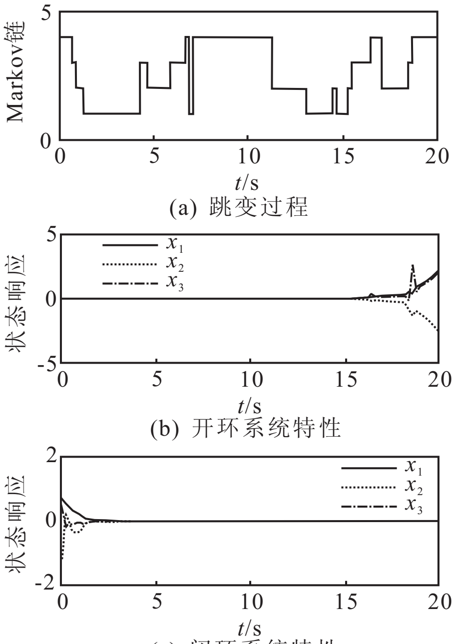
$$E_R=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix},E_L=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3\\0&0\end{bmatrix}.$$

转移速率矩阵为

$$\lambda=\begin{bmatrix}-0.5&0.1&(0.1)&(0.3)\\(0.3)&(-0.7)&0.3&0.1\\0.2&(0.3)&-0.8&(0.3)\\(0.2)&(0.2)&(0.2)&-0.6\end{bmatrix},$$

其中括号中的数值表示未知的转移速率.

系统的模态跳变和状态变量的开环、闭环特性如图 1 所示. 由图 1(b) 中系统的开环特性可以看出, 未引入状态反馈控制器前, 自治系统是不稳定的.



(a) 跳变过程

(b) 开环系统特性

(c) 闭环系统特性

图 1　系统的模态跳变、开环特性和闭环特性

取 $\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=-1,\varepsilon_3=1.6,\varepsilon_4=2$, 利用定理 2, 求解线性矩阵不等式 (12)∼(15), 从而可得状态反馈控制器增益为

$$K_1=\begin{bmatrix}-2.0445&2.2259&0.6117\\2.2785&-3.6276&0.6790\end{bmatrix},$$

$$K_2=\begin{bmatrix}-1.1840&0.9644&-2.0000\\-3.6133&-0.1773&2.6455\end{bmatrix},$$

$$K_3=\begin{bmatrix}-2.4786&4.7927&-1.0362\\3.9978&-7.5865&-0.5828\end{bmatrix},$$

$$K_4=\begin{bmatrix}-3.9033&6.6091&-0.2754\\-4.2284&-1.4875&-2.6475\end{bmatrix}.$$

给定系统状态变量的初值

$$x(0)=[\,0.7\ \ 0.5\ \ -1.2\,]^{\mathrm T},$$

可得系统状态的闭环响应曲线如图 1(c) 所示. 由图 1(c) 中系统的闭环特性可以看出, 加入定理 2 设计的状态反馈控制器后, 当系统在 4 种模态之间随机跳变时, 闭环系统实现了随机稳定, 系统状态迅速收敛, 稳定在平衡点 0 附近. 因此, 定理 2 解决了系统的镇定问题, 通过状态反馈控制器, 使闭环系统随机可容许.

5　结　论

本文研究了转移概率部分未知条件下的连续时间广义 Markov 跳变系统的镇定问题. 首先, 针对转移概率部分未知条件, 将现有结论进行推广, 得出自治系统随机可容许的充分条件, 并表示为线性矩阵不等式形式. 进而推导出闭环系统随机可容许的充分条件. 在此基础上, 得出了基于线性矩阵不等式的新的充分条件, 设计了模式依赖状态反馈控制器, 使闭环系统随机可容许. 所得结论基于更普遍的系统模型, 具有广泛的理论和实际意义.

参考文献(References)

[1] Lewis F L. A survey of linear singular systems[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 1986, 5(1): 3-36.

[2] Dai L. Singular control systems: Lecture notes in control and information sciences[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[3] Ahmad Haidar, Boukas E K. Exponential stability of singular systems with multiple time-varying delays[J]. Automatica, 2009, 45(2): 539-545.

[4] Xu S, Lam J, et al. Robust admissibility of time-varying singular systems with commensurate time delays[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2714-2717.

[5] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete time Markov jump linear systems[M]. London: Springer-Verlag, 2005.

[6] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Berlin: Birkhauser, 2003.

[7] Boukas E K. Stochastic switching systems: Analysis and design[M]. Berlin: Birkhauser, 2005.

[8] Xiong J, Lam J, et al. On robust stabilization of Markovian jump systems with uncertain switching probabilities[J]. Automatica, 2005, 41(5): 897-903.

[9] Boukas E K. Control of singular systems with random abrupt changes: Series of communications and control engineering[M]. Berlin: Springer, 2008.

[10] Xu S, Lam J. Control and fltering of singular systems[M]. Berlin: Springer, 2006.

[11] Boukas E K. On stability and stabilisation of continuous-time singular Markovian switching systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2008, 2(10): 884-894.

[12] Boukas E K, Xia Y. Descriptor discrete-time systems with random abrupt changes: Stability and stabilisation[J]. Int J of Control, 2008, 81(8): 1311-1318.

[13] Xia Y, Zhang J, Boukas E K. Control for discrete singular hybrid systems[J]. Automatica, 2008,44(10): 2635-2641.

[14] Xia Y, Boukas E K, Shi P, et al. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1504-1509.

[15] Ma S, Boukas E K, Chinniah Y. Stability and stabilization of discrete-time singular Markov jump systems with time-varing delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(5) : 531-543.

[16] Zhang L, Boukas E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(2): 463-468.

[17] Zhang L, Boukas E K. Mode-dependent H_∞ fltering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1462-1467.

[18] 盛立, 杨慧中. 一类离散Markov跳变奇异系统的镇定控制[J]. 控制与决策, 2010, 25(8): 1189-1194.
(Sheng L, Yang H Z. Stabilization control of a class of discrete-time Markov jump singular systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(8): 1189-1194.)

[19] Uezato E, Ikeda M. Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and H_∞ control of descriptor systems[C]. Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix: IEEE Press, 1999: 4092-4097.