

文章编号: 1001-0920(2012)06-0941-04

基于最大互信息的混沌时间序列多步预测

张春涛, 刘学飞, 向瑞银, 刘金魁, 郭 皎

(重庆三峡学院 数学与统计学院, 重庆 万州 404100)

摘要: 针对混沌时间序列的多步预测, 提出了基于最大互信息(MMI)的建模方法. 首先建立时间延迟、嵌入维数和预测步长在相空间的最大信息量模型; 然后利用遗传算法求解并确定混沌时间序列的最佳预测结构; 最后对 Mackey-Glass 系统和月太阳黑子的仿真实验表明, MMI 可以确定更好的预测结构, 提高了混沌时间序列的预测精度.

关键词: 混沌时间序列; 互信息; 预测结构; 神经网络预测

中图分类号: TP181

文献标识码: A

Multi-step-prediction of chaotic time series based on maximized mutual information

ZHANG Chun-tao, LIU Xue-fei, XIANG Rui-yin, LIU Jin-kui, GUO Jiao

(College of Mathematic and Computer Science, Chongqing Three Gorges University, Wanzhou 404100, China.

Correspondent: ZHANG Chun-tao, E-mail: ljyzctao@yahoo.com.cn)

Abstract: For the multi-step-prediction of chaotic time series, a modeling method based on maximized the mutual information(MMI) is proposed. Firstly, maximize information model in phase space with delay time, embedding dimension and prediction step is established. Then this model can be solved by using generation algorithm(GA), which determines the better prediction structure of chaotic time series. Finally, simulations of the Mackey-Glass system and monthly sunspot show that MMI can determine the better prediction structure and improve the prediction accuracy of chaotic time series.

Key words: chaotic time series; mutual information; prediction structure; neural network prediction

1 引言

随着混沌动力学理论及其应用技术研究的不断深入, 混沌时间序列预测已成为混沌信号处理的重要内容. 目前的研究主要是基于 Packard^[1]的相空间重构思想和 Takens^[2]的嵌入定理. 即先将实际观测数据进行相空间重构; 然后采用神经网络、支持向量机等方法在固定的重构相空间上进行单步或多步的混沌时间序列预测^[3-6]. 在实际中, 由于无法获得混沌系统完整的时间序列, 而且有噪声干扰的存在, 人们不能从时间序列获得完整的系统信息, 从而不能由时间序列通过重构较准确地还原系统空间. 这样重构的相空间只能近似代替原混沌空间, 在其上进行的预测精度将随着预测步长的增加而不断降低. 例如在经典的 Mackey-Glass 84 步标杆预测问题中常规神经网络的预测精度 NRMSE 仅为 $10^{-1.2} \sim 10^{-1.7}$ ^[7]. 为了提高多步预测效果, 人们采用变化的相空间结构进行混沌

时间序列多步预测^[8-9], 但缺少一定的理论基础.

信息熵是系统整体性的一种度量, 在混沌时间序列分析中起着重要作用^[10]. 田玉楚等人^[11]系统地论述了在不变测度意义下, 将混沌系统视为一类特殊的随机系统. 赵鸿等人^[12]分析了互信息在时间序列预测中的重要作用. Papan 等人^[13]分析了非线性动态系统时间序列的互信息. 张春涛等人^[6]讨论了两重构参数具有的信息熵关系.

本文为了提高混沌时间序列多步预测的精度, 采用变化的相空间结构, 提出了基于最大互信息(MMI)的相空间重构方法. 该方法通过建立时间延迟 τ , 嵌入维数 m 和预测步长 k 的最大信息量模型, 对不同的预测步长按互信息最大优化相空间重构参数, 使得相空间结构更利于提供信息, 从而混沌系统中点的“运动轨迹”更易于显现. 最后通过数值实例验证了在该方法确定的重构相空间上进行神经网络的多步预测

收稿日期: 2010-11-17; 修回日期: 2011-01-21.

基金项目: 重庆市教委科技项目(KJ111106); 东南大学基本科研业务费“创新基金”项目(3207010501); 重庆三峡学院重点项目(11ZD-19).

作者简介: 张春涛(1978—), 男, 副教授, 从事进化算法、混沌时间序列建模与预测等研究; 刘学飞(1962—), 男, 教授, 从事微分方程动力系统研究.

精度均有较大幅度的提高,表明了使用该方法进行多步预测的有效性.

2 混沌时间序列的一般预测模型

设混沌系统产生的时间序列为 $x(1), x(2), \dots, x(n), \dots$, 根据嵌入定理, 总存在合适的维数 m , 时间延迟 τ 的相空间 $X(n) = (x(n), x(n-\tau), \dots, x(n-(m-1)\tau)) \in R^m$, 使得重构相空间中的“轨线”与原混沌系统在微分同胚意义下是等价的. 即存在一个光滑映射 $F: R^m \rightarrow R^m$ 能复原出原混沌系统的“运动过程”, 相空间点的轨迹表达式为

$$X(n+k) = F(X(n)). \quad (1)$$

当 m 足够大时, 式 (1) 可简化为

$$X(n+k) = f(x(n), x(n-\tau), \dots, x(n-(m-1)\tau)), \quad (2)$$

其中 k 为预测步长.

一般的预测是先对时间序列进行相空间重构, 即确定嵌入维数 m 和时间 τ 延迟; 然后在历史数据集上采用神经网络、支持向量机等模型进行非线性函数拟合, 产生预测函数 f . 其明显的特征是相空间结构与预测步长 k 无关. 但在实际应用中发现, 对于较短的预测步长往往能取得较高的预测精度, 但对较长的预测步长其效果一般较差. 正如文献 [8] 中指出, 效果良好的单步预测并不意味着良好的多步预测. 文献 [6] 也表明, 随着预测步长的增加, 相空间结构能够为将来值提供的信息量越来越少; 且在实际的混沌系统中, 一个系统和其他系统在不断地进行物质、能量和信息的交换, 在较短的时间内一个系统可以近似为固定的, 而在较长时间段上系统是在不停演变的, 其内部机理也发生变化. 因此, 在较长时间预测步长上的相空间结构也应发生变化. 这样, 传统的求解嵌入维数 m 和时间延迟 τ 的算法对变化的相空间结构不再适合. 因此, 为混沌时间序列的多步预测寻找更一般的理论依据十分重要, 下面将使用信息论知识建立多步预测的一般模型.

3 基于最大互信息的多步预测模型

设有单变量混沌时间序列 $x(n), n = 1, 2, \dots, N$, 假定嵌入维数 m 和时间延迟 τ 后, 对 k 步预测可以形成如下的预测空间:

$$[x(n-(m-1)\tau), \dots, x(n-\tau), x(n), \dots; x(n+k)]. \quad (3)$$

记预测空间坐标向量的各分量为

$$\begin{aligned} X_1 &= x(n), X_2 = x(n-\tau), \dots, \\ X_m &= x(n-(m-1)\tau), Y = x(n+k). \end{aligned}$$

相空间重构即是用重构分量 X_1, X_2, \dots, X_m 近似表征原系统的各变量, 同时重构分量也可以看成是重构相空间的坐标. 根据式 (2), 混沌时间序列预测即是用 X_1, X_2, \dots, X_m 来近似 Y , 预测的目标是提高近似程度. 根据信息论知识, 要提高用 X_1, X_2, \dots, X_m 来近似 Y 的程度, 应使得 Y 能够从重构相空间 $[X_1, X_2, \dots, X_m]$ 中获得最大的信息量. 由此可以形成如下的 k 步预测模型:

$$\max I = I(X_1, X_2, \dots, X_m; Y). \quad (4)$$

从式 (4) 可以看出, 相空间结构和预测步长具有较强的相关性, 随着预测步长的不同, 相空间结构可能发生变化, 因而不能使用传统的相空间重构算法求解最佳嵌入维数 m 和时间延迟 τ . 根据互信息与熵的关系, 将式 (4) 转化为信息熵, 有

$$\begin{aligned} \max I &= H(X_1, X_2, \dots, X_m) + \\ &H(Y) - H(X_1, X_2, \dots, X_m, Y). \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) 是一个多元函数极值问题, 因其目标函数中的熵函数是关于 m 和 τ 的一个复杂的表达式, 目标函数不具有梯度信息, 故用传统优化算法操作性不强. 本文采用非数值全局优化算法——遗传算法求解. 对 k 步预测, 遗传算法求解模型的具体描述如下:

- 1) 编码. 参数 m 和 τ 为非负整数, 采用二进制编码.
- 2) 初始群体的确定. 群体规模 $N = 60$, 采用随机方法产生.
- 3) 确定适应值函数. 直接计算在 $\text{fit}(x)$ 给定 m, τ 和 k 的条件下互信息的值作为个体 x 的适应度. 本文采用矩阵标识法来计算联合熵^[4].
- 4) 选择算子. 采用比例选择算子, 即个体在下一代群体中的个数由该个体的适应值在种群总的适应值中的比例来决定.
- 5) 交叉算子. 采用两点交叉算子, 交叉概率 $p_c \in [0.7, 0.95]$.
- 6) 变异算子. 采用基本位变异算子, 变异概率 $p_m \in [0.01, 0.15]$.
- 7) 终止条件. 取最大迭代次数 $T = 100$.

4 仿真实验

为了检验通过多步预测模型求解的有效性, 本文使用 Elman 网络对混沌时间序列进行多步预测研究. 为了评价预测效果, 引入如下评判标准:

$$\text{MSE} = \sum_{t=1}^s [\hat{y}(t) - y(t)]^2 / S, \quad (6)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}, \quad (7)$$

$$\text{NRMSE} = \sqrt{\sum_{t=1}^s [\hat{y}(t) - y(t)]^2 / S\sigma^2}, \quad (8)$$

$$e(t) = \hat{y}(t) - y(t). \quad (9)$$

其中: $y(t)$, $\hat{y}(t)$ 和 S, σ^2 分别表示真实值、预测值、样本大小和预测数据的方差.

4.1 Mackey-Glass 时滞系统

Mackey-Glass 时滞系统方程为

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot \frac{x(t - \tau)}{1 + x^c(t - \tau)} - bx(t),$$

$$\tau = 17, a = 0.2, b = 0.1, c = 10. \quad (10)$$

通过 Matlab 的 DDE23 函数解得 2000 个点的时间序列, 将前 1500 个点作为原始数据集, 后 500 个点作为预测数据集. 对不同的预测步长采用遗传算法求解式 (5), 得到不同的重构参数如表 1 所示.

表 1 不同预测步长下的重构参数

预测步长 k	嵌入维数 m	时间延迟 τ
4	11	6
8	10	6
12	12	4
84	13	6

为了检验多步预测模型的有效性, 这里采用 Elman 网络对不同预测步长分别进行预测, 并与 LS-SVM^[15]和 CERNN^[9]的 RMSE 进行比较, 所得结果如表 2 所示. 可以看出, MMI 进行的多步预测取得了最好的预测效果, 且采用变化相空间结构的 MMI 和 CERNN 的预测精度比固定相空间结构的 LS-SVM 更高. 同时还进行了 Mackey-Glass 84 步预测, 其 NRMSE = 0.0021, 优于 Elman 网络在常用重构相空间结构 $m = 4, \tau = 6$ 上的预测, 其 NRMSE = 0.2201, 也优于文献 [7] 中常规神经网络在固定相空间结构上的预测.

表 2 多步预测的 RMSE 比较

步长	LS-SVM	CERNN	MMI
4	0.0113	0.00039	1.6077×10^{-5}
8	0.0245	0.00208	4.2606×10^{-5}
12	0.0496	0.00379	3.0737×10^{-5}

MMI 的 84 步预测效果和预测误差分别如图 1 和图 2 所示.

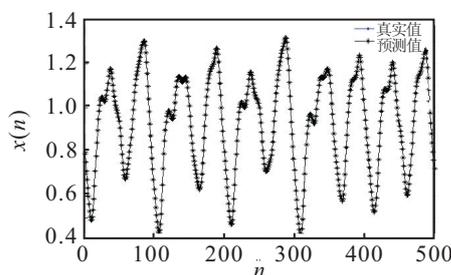


图 1 84 步预测效果

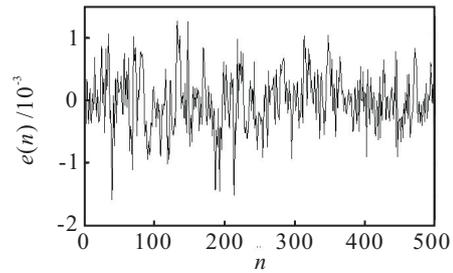


图 2 84 步预测误差

从图 2 可以看出, 84 步预测误差达到 10^{-3} , 优于一般神经网络的预测误差. 从表 2, 图 1 和图 2 可以看出, 对于确定的混沌系统——Mackey-Glass 时滞系统, 使用变化相空间结构的 MMI 多步预测都取得了最好的预测效果, 说明 MMI 对确定混沌系统是有效的.

4.2 月太阳黑子时间序列预测

月太阳黑子数据来自于 SIDC(solar influences data analysis center), 时间是 1749.1~1977.3. 为了便于比较, 本文采用与 CERNN 相同的训练、预测数据集. 对不同预测步长按式 (5) 计算的重构参数如表 3 所示. 多步预测实验与 MSRN^[16]和 CERNN 的 MSE 比较如表 4 所示.

表 3 月太阳黑子时间序列预测

预测步长 k	嵌入维数 m	时间延迟 τ
4	9	14
8	9	14
12	10	12
18	11	10

表 4 月太阳黑子多步预测的 MSE 比较

步长	LS-SVM	CERNN	MMI
4	0.008376	0.000847	5.8491×10^{-4}
8	0.007813	0.002882	0.0017
12	0.010803	0.005619	0.0022
18	0.014645	0.008299	0.0034

从表 4 可以看出, 对月太阳黑子数的预测, 变化的相空间结构一般能取得较好的预测效果, MMI 则取得了更好的预测效果. 说明 MMI 对现实中的混沌系统也是有效的. 但是由于现实系统内部机理的演变, 使得本文的预测精度远远低于确定的混沌系统.

MMI 和 CERNN 都采用了变化相空间结构加 Elman 递归神经网络的预测模式, 而 MMI 采用最大互信息对相空间进行建模, 不同于 CERNN 的直接预测精度最小的相空间建模. 从表 2 和表 4 可以看出, MMI 的多步预测精度好于 CERNN, 这是因为 MMI 是基于最大互信息的相空间重构, 它能提供最大的信息量, 有利于提高预测精度. 另外还能看出, MMI 的多步预测比 CERNN 的多步预测更加平稳, 这是因为混沌的特性决定了随预测步长增加导致可预测性的降低, 但是 MMI 能够提供最大的信息量, 即使提供了一些

冗余信息,它仍能显著地改善预测性能,使预测性能随步长增加而缓慢降低。

5 结 论

本文针对混沌时间序列的多步预测提出了一种基于最大互信息的相空间重构方法.该方法改变了传统的固定相空间模式,对不同的预测步长以互信息最大建立变化的相空间结构,从而使得相空间更利于提供信息,更利于人们发现系统的混沌运动规律.通过对 Mackey-Glass 时滞系统和月太阳黑子的仿真实验,表明了变化的相空间结构对确定混沌系统和现实混沌系统是有效的.特别是基于最大互信息的 MMI,因其相空间能提供最大的信息量,不仅大幅提高了混沌时间序列的预测精度,而且在一定程度上改善了混沌时间序列随预测步长增加其预测效果急剧降低的性能。

参考文献(References)

- [1] Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D, et al. Geometry from a time series[J]. *Physical Review Letters*, 1980, 45: 712-716.
- [2] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence[J]. *Lecture Notes in Mathematics*, 1981, 898: 366-381.
- [3] 张军峰, 胡寿松. 基于一种新型聚类算法的 RBF 神经网络混沌时间序列预测[J]. *物理学报*, 2007, 56(2): 713-719.
(Zhang J F, Hu S S. Chaotic time series prediction based on RNF neural networks with a new clustering algorithm[J]. *Acta Physical Sinica*, 2007, 56(2): 713-719.)
- [4] 李松, 刘力军, 谷晨. 混沌时间序列预测模型的研究[J]. *计算机工程与应用*, 2009, 45(32): 53-56.
(Li S, Liu L J, Gu C. Comparative study on prediction models for chaotic time series[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2009, 45(32): 53-56.)
- [5] 江田汉, 束炯. 基于 LSSVM 的混沌时间序列的多步预测[J]. *控制与决策*, 2006, 21(1): 77-80.
(Jiang T H, Shu J. Multi-step prediction of chaotic time series using the least squares support vector machines[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(1): 77-80.)
- [6] 张春涛, 马千里, 彭宏. 基于信息熵优化相空间重构参数的混沌时间序列预测[J]. *物理学报*, 2010, 59(11): 7623-7629.
(Zhang C T, Ma Q L, Peng H. Chaotic time series prediction based on information entropy optimized parameters of phase space reconstruction[J]. *Acta Physical Sinica*, 2010, 59(11): 7623-7629.)
- [7] 史志伟, 韩敏. ESN 岭回归学习算法及混沌时间序列预测[J]. *控制与决策*, 2007, 22(3): 258-261.
(Shi Z W, Han M. Ridge regression learning in ESN for chaotic time series prediction[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(3): 258-261.)
- [8] 岳毅宏, 韩文秀, 程国平. 多变量时间序列相空间重构中参数的确定[J]. *控制与决策*, 2005, 20(3): 290-293.
(Yue Y H, Han W X, Cheng G P. Determination of parameters in the phase-space reconstruction of multivariate time series[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(3): 290-293.)
- [9] Ma Q L, Zheng Q L, Peng H, et al. Multi-step-prediction of chaotic time series based on co-evolutionary recurrent neural network[J]. *Chinese Physical B*, 2008, 17(2): 536-542.
- [10] Fraser A M. Information and entropy in strange attractors[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1989, 35(2): 245-262.
- [11] 田玉楚, 符雪桐, 吕勇哉, 等. 一类混沌系统的变换、估计和控制[J]. *控制与决策*, 1993, 8(5): 345-350.
(Tian Y C, Fu X T, Lv Y Z, et al. Transformation, estimation and control for a class of chaotic systems[J]. *Control and Decision*, 1993, 8(5): 345-350.)
- [12] 赵鸿, 柴路, 王浩, 等. 互信息在时间序列分析中的应用[J]. *应用科学学报*, 1996, 14(1): 48-52.
(Zhao H, Chai L, Wang H, et al. Application of mutual information to analysing time series[J]. *J of Applied Sciences*, 1996, 14(1): 48-52.)
- [13] Papan A, Kugiumtzis D. Evaluation of mutual information estimators on nonlinear dynamic systems[J]. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2008, 11(2): 225-232.
- [14] 肖方红, 阎桂荣, 韩宇航. 混沌时序相空间重构参数确定的信息论方法[J]. *物理学报*, 2005, 54(2): 550-556.
(Xiao F H, Yan G R, Han Y H. Information theory approach to determine embedding parameters for phase space reconstruction of chaotic time series[J]. *Acta Physical Sinica*, 2005, 54(2): 550-556.)
- [15] Ye M Y, Wang X D. Chaotic time series prediction using least squares support vector machine[J]. *Chinese Physical*, 2004, 13(4): 454-458.
- [16] Inés M G, Pedro I. Multi-step learning rule for recurrent neural models: An application to time series forecasting[J]. *Neural Processing Letters*, 2001, 13: 115-133.