

文章编号: 1001-0920(2012)06-0923-06

基于虚约束的 Acrobot 动态伺服控制统一设计方法

程红太, 张晓华

(哈尔滨工业大学 电气工程及自动化学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 提出一种基于虚约束的统一设计方法, 以解决 Acrobot 系统中动态伺服控制问题, 使系统沿着经过目标点的周期轨迹运动. 将虚约束设计、虚约束作用下系统零动态微分方程分析以及轨道周期性判定相结合, 获得了符合目标的周期轨道方程; 基于 Lyapunov 方法设计了光滑反馈控制器, 克服了基于线性二次型调节器 (LQR) 的控制器对零动态微分方程解析解的依赖性问题. 实际算例的仿真结果表明了统一设计方法的有效性.

关键词: 虚约束; Acrobot; 统一设计方法; 动态伺服控制; Lyapunov 方法

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Virtual constraints based general design method for dynamical servo control problem for Acrobot

CHENG Hong-tai, ZHANG Xiao-hua

(School of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China.
Correspondent: CHENG Hong-tai, E-mail: redsun_cheng@163.com)

Abstract: The virtual constraints based general design method is proposed to solve a dynamical servo control problems for the Acrobot system, which forcing it to move along the periodic trajectory passing through the given points. The design of virtual constraint, analysis of system zero dynamics under virtual constraint and periodic property determination of the trajectory are combined to generate the desired periodic orbit function. Based on a Lyapunov method, smooth feedback controller is proposed to overcome the dependency on the analytic solution of the system zero dynamics which exists in LQR based controller. An example is given and the simulation results show the effectiveness of the proposed general design method.

Key words: virtual constraints; Acrobot; general design method; dynamical servo control; Lyapunov method

1 引言

目前, 欠驱动系统的控制是一个难点和热点问题. 欠驱动机械系统是指驱动数目少于自由度数目的机械系统, 它广泛存在于现实中, 如太空飞行器、移动机器人和柔性机器人等. Acrobot 系统由一根连杆和一根摆杆组成, 只在摆杆处连接有一驱动输入, 是一个典型的欠驱动机械系统, 因其结构简单, 常被用于理论研究中.

针对 Acrobot 这样一类欠驱动系统, 以往的研究主要集中在平衡点的镇定问题以及一些特殊轨迹的跟踪问题. 如 Murray^[1], Spong^[2], Xin^[3]等人研究了 Acrobot 的起摆及平衡控制问题, 期望实现从垂直向下的平衡点摆动至并且稳定在垂直向上位置. 实际上, 平衡控制是平衡点的镇定问题, 而起摆控制可以看作

特殊轨迹的跟踪问题, 大多数的研究并没有确定出起摆轨迹, 只是用一种定性的方式来实现起摆^[2]. 同时, Xin 利用系统能量和摆杆摆角精确刻画了一个特殊的起摆轨迹^[3], 通过对该轨迹进行跟踪, 系统可以周期性地到达垂直向上平衡点, 很容易实现平衡控制. 然而, Xin 只研究了垂直向上平衡点的轨迹设计及跟踪方法, 并没有对位形空间任意点的类似问题进行研究.

此外, 还有一些学者进行了轨迹跟踪控制研究. Berkemeier^[4]研究了 Acrobot 在垂直向上不稳定平衡点附近的周期轨道的跟踪问题, 利用一个轨道约束方程描述周期轨道, 并通过所设计的非线性控制器实现跟踪控制, 进而实现了对快速周期轨道的跟踪. 与 Berkemeier 不同, Shiriaev^[5-10]研究了在垂直向下平衡点附近的周期轨道, 以及针对欠驱动系统的周期运动

收稿日期: 2010-11-17; 修回日期: 2011-01-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60875066).

作者简介: 程红太(1985-), 男, 博士生, 从事智能机器人与欠驱动机械系统非线性控制的研究; 张晓华(1961-), 男, 教授, 博士生导师, 从事机械与电力电子系统非线性控制等研究.

设计方法,他提出了通过引入虚约束来描述周期轨道的方法,并给出了周期轨道存在性的一些结论以及基于 LQR 的轨道控制器,并将其应用于包括 Acrobot 在内的许多系统中.但是,他只对虚约束方法进行了讨论,并未针对特定目标给出虚约束的构造方法;另外,其所设计的控制器用到了周期轨道的解析解,而当无法求出解析解时其并不适用,因此不具有普遍意义.

相对于全驱动机械系统,欠驱动机械系统的平衡点只是其位形空间中的孤立点或低维流形,因而无法实现任意轨迹的跟踪和任意位置的镇定.由于很多欠驱动机械系统都是二阶非完整约束系统,即其欠驱动自由度动力学方程是不可积的,这使得这些系统的可达集维数并没有降低^[1],其位形空间的任意点甚至状态空间任意点是可以达到的.因此,有必要将前述两种研究结合起来,以解决系统如何沿着某一轨迹到达目标点的问题.这种不考虑目标点的镇定,只关心如何从起始点到达目标点的问题称为动态伺服控制问题.

文献[12]采用基于能量的方法实现动态伺服控制,对任意给定的目标点,利用摆杆摆角和系统能量来确定目标轨迹,并通过二者的镇定来实现动态伺服控制;文献[13]采用基于对称虚约束的方法对[12]进行改进,采用更广泛的线性约束来代替固定摆杆摆角这样的约束,实现类似体操运动员的运动形态,减少了对控制输入的要求.然而这样的线性虚约束是有局限性的.当目标点多于两个时将不再适用,而且其中同样用到了周期轨道方程解析解.

本文将讨论基于虚约束的 Acrobot 动态伺服控制统一设计方法,将虚约束的构造、周期轨道的计算与分析、动态伺服控制器的设计与实现有机结合,以解决基于能量的方法运动形态单一和虚约束方法对周期轨道方程解析解的依赖性问题,使其具有普遍意义.

2 问题描述

2.1 Acrobot 动力学模型

图 1 给出了 Acrobot 的基本结构与相关变量.结合表 1 中变量定义,系统的动力学方程为

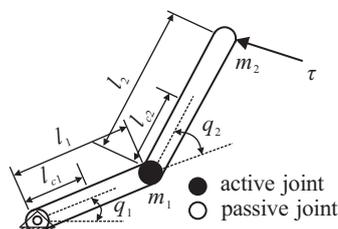


图 1 Acrobot 系统结构示意图

$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \phi_1 = 0, \quad (1)$$

$$d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + \phi_2 = \tau. \quad (2)$$

其中

$$d_{11} = \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2,$$

$$d_{12} = d_{21} = \theta_2 + \theta_3 \cos q_2, \quad d_{22} = \theta_2,$$

$$h_1 = -\theta_3 \dot{q}_2 \sin q_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad h_2 = \theta_3 \dot{q}_1^2 \sin q_2,$$

$$\phi_1 = \theta_4 g \cos q_1 + \phi_2, \quad \phi_2 = \theta_5 g \cos(q_1 + q_2),$$

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \quad \theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$\theta_3 = m_2 l_1 l_{c2}, \quad \theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1, \quad \theta_5 = m_2 l_{c2}.$$

这里 \$d_{11}\$ 和 \$d_{22}\$ 为自耦惯量加速度项, \$d_{12}\$ 和 \$d_{21}\$ 为互耦惯量加速度项, \$h_1\$ 和 \$h_2\$ 为哥氏力项, \$\phi_1\$ 和 \$\phi_2\$ 为重力矩项.

表 1 物理参数及含义

物理量	参数值	单位	物理量含义
\$m_1, m_2\$	1, 1	kg	两杆质量
\$l_1, l_2\$	1, 2	m	两杆长度
\$l_{c1}, l_{c2}\$	0.5, 1	m	两杆质心到关节距离
\$I_1, I_2\$	1/12, 1/3	kg·m ²	两杆绕质心转动惯量
\$g\$	9.81	m/s ²	重力加速度
\$\tau\$	-	N·m	力矩输入

2.2 动态伺服控制

文献[12, 13]给出了如下的动态伺服控制定义:

定义 1 对于系统 \$\dot{x} = f(x, u), x(t_0) = x_0\$, 给定一个参考轨迹 \$\gamma(t)\$ 和跟踪误差 \$\delta\$, 假设存在一个控制律 \$u(t)\$ 使得:

若 \$\exists T_0\$, 当 \$t > T_0\$ 时, \$|x(t) - \gamma(t)| < \delta\$ 成立, 则称之为伺服控制;

若 \$\exists T_0\$, 当 \$t_i > T_0 (i = 1, 2, 3)\$ 时, \$|x(t_i) - \gamma(t_i)| < \delta\$ 成立, 则称之为动态伺服控制.

与伺服控制要求系统沿着给定轨迹运动的目标相比, 动态伺服控制弱化了控制目标, 只要求在一些离散的时刻可以到达给定轨迹上的点, 而不是在任意时间跟踪整个轨迹. 定义 1 中的跟踪间隔 \$t_i - t_{i-1}\$ 不能过大, 否则将无法及时跟踪给定轨迹. 然而, 由于间隔与目标点有密切关系, 事先难以确定合适的给定轨迹. 一个简单的方法是采用如下分段定常的形式:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x_{d1}, & t \in [t_0, t_1]; \\ \vdots \\ x_{dn}, & t \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases} \quad (3)$$

此时轨迹 \$\gamma(t) = x_{di} = \text{const}\$, 则伺服控制等价于平衡点的镇定问题, 动态伺服控制等价于目标点的可达性问题, 只要 \$t_i - t_{i-1}\$ 足够大, 则目标点是可以达到的.

3 目标轨迹规划

虚约束利用控制输入引入的自由度之间的约束

关系, 它可以降低系统零动态自由度. 如果引入足够虚约束使零动态自由度减为1, 则可以很容易确定其运动轨迹.

3.1 虚约束的选择

假设虚约束为

$$q_1 = \varphi(q_2), \quad (4)$$

则到达目标点 $[q_{1d}, q_{2d}]$ 时, 应满足 $q_{1d} = \varphi(q_{2d})$. 另外, 还可以对目标轨迹进行限制, 例如为了避开位形空间中的障碍点, 需要其在运动过程中经过某些位置

$$[q_{11}, q_{21}], [q_{12}, q_{22}], \dots, [q_{1k}, q_{2k}],$$

则将增加 k 个条件. 因此, 一般可通过多项式插值得到符合这 $k+1$ 个条件的虚约束方程, 即

$$q_1 = \varphi(q_2) = a^k q_2^k + a^{k-1} q_2^{k-1} + \dots + a^1 q_2 + a^0. \quad (5)$$

将约束条件代入上述方程, 有

$$\begin{bmatrix} q_{2d}^k & q_{2d}^{k-1} & \dots & 1 \\ q_{21}^k & q_{21}^{k-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ q_{2k}^k & q_{2k}^{k-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k \\ a^{k-1} \\ \vdots \\ a^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{11} \\ \vdots \\ q_{1k} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

利用式(6)计算多项式系数即可获得满足条件的虚约束. 当然也可以选择其他插值方法, 只要满足给定条件即可. 实际上也可以构造形如 $q_2 = \varphi(q_1)$ 的虚约束, 其结论是类似的, 统记为 $p = \varphi(q)$. 本文不加说明 $p = \varphi(q)$ 均指 $q_1 = \varphi(q_2)$.

3.2 虚约束作用下系统零动态方程

定理 1 对于 Acrobot, 在虚约束 $p = \varphi(q)$ 作用下, 系统零动态方程均可以写为如下形式:

$$\alpha(q)\ddot{q} + \beta(q, \dot{q})\dot{q}^2 + \gamma(q) = 0, \quad (7)$$

其中 α, β, γ 均为标量函数.

证明 假设 $p = q_1, q = q_2$, 则有 $q_1 = \varphi(q_2)$. 两边对时间求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \dot{q}_2, \\ \ddot{q}_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} (\dot{q}_2)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \ddot{q}_2. \end{aligned}$$

将其代入 Acrobot 模型(1), 有

$$d_{11} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} (\dot{q}_2)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \ddot{q}_2 \right) + d_{12} \ddot{q}_2 + h_1 + \varphi_1 = 0.$$

整理得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} d_{11} + d_{12} \right) \ddot{q}_2 + \\ &\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} d_{11} - \theta_3 \sin q_2 \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + 1 \right) \right) \dot{q}_2^2 + \\ &(\theta_4 g \cos(\varphi(q_2)) + \theta_5 g \cos(\varphi(q_2) + q_2)). \end{aligned}$$

将各项系数定义为

$$\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} d_{11} + d_{12},$$

$$\beta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} d_{11} - \theta_3 \sin q_2 \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + 1 \right),$$

$$\gamma = \theta_4 g \cos(\varphi(q_2)) + \theta_5 g \cos(\varphi(q_2) + q_2).$$

于是有式(7)成立. 对于 $p = q_2, q = q_1, q_2 = \phi(q_1)$, 亦有同样的结果. \square

可以看出, 在虚约束的作用下, 系统成为一个由二阶微分方程描述的单自由度系统. 每一个初值 (q_0, \dot{q}_0) 都对应一个确定的积分曲线, 可以记为 $\psi(q, \dot{q}, q_0, \dot{q}_0) = 0$. 如果将目标点作为初值, 即 $(q_0, \dot{q}_0) = (q_d, \dot{q}_d)$, 则它正是所期望的运动轨迹. 下面求解该积分曲线的具体表达式.

3.3 零动态方程的一次积分

定理 2 零动态微分方程(7)是可积的, 其一次积分的解的形式为

$$\dot{q}^2 = I^{-1} \int_{q_d}^q I \gamma_0(x) dx + \dot{q}_d^2 I^{-1}.$$

其中

$$I = \exp \left(\int_{q_d}^q \beta_0(x) dx \right),$$

$$\beta_0(q) = 2 \frac{\beta(q)}{\alpha(q)}, \quad \gamma_0(q) = -2 \frac{\gamma(q)}{\alpha(q)}.$$

证明 令 $Y = \dot{q}^2$, 则有

$$\dot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq} \dot{q} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{q}^2}{dq} = \frac{1}{2} \frac{dY}{dq}.$$

因此式(7)可写为

$$\frac{1}{2} \alpha(q) \frac{dY}{dq} + \beta(q)Y + \gamma(q) = 0,$$

于是有

$$Y'_q + \beta_0(q)Y - \gamma_0(q) = 0.$$

两侧同乘以积分因子 I , 有

$$\frac{\partial(IY)}{\partial q} = I\gamma_0(q),$$

对其进行积分, 有

$$IY = \int_{q_d}^q I\gamma_0(x) dx + Y_0.$$

因为 $I > 0$, 所以

$$Y = \dot{q}^2 = I^{-1} \int_{q_d}^q I\gamma_0(x) dx + Y_0 I^{-1}, \quad (8)$$

结论成立. \square

因此目标轨迹 $\psi(q, \dot{q})$ 为

$$\psi(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d) = \dot{q}^2 - I^{-1} \int_{q_d}^q I\gamma_0(x) dx + \dot{q}_d^2 I^{-1}. \quad (9)$$

式(8)含有多个积分项, 除一些特别的虚约束, 是无法得出解析形式的, 因此下面讨论其数值解.

3.4 积分曲线的数值解

式(8)中包含了积分因子 I , 不便于直接积分, 需对其进行变换. 将式(8)两边对 q 求导, 有

$$\frac{\partial Y}{\partial q} = -\beta_0 \left(I^{-1} \int_{q_d}^q I \gamma_0(x) dx + I^{-1} Y_0 \right) + \gamma_0.$$

将其代入式(8),有

$$\frac{\partial Y}{\partial q} = \gamma_0 - \beta_0 Y. \quad (10)$$

对于式(10),结合其初始条件 $(Y, Y_0) = (q_d, \dot{q}_d^2)$ 即可得到积分曲线数值解.该解对于积分曲线性质分析以及动态伺服控制的实现都具有很重要的作用.

3.5 周期轨道的存在性

根据文献[9]的定理3,有如下结论:

定理3 对于系统(7),假设 q_c 是其平衡点,即 $\gamma(q_c) = 0$,并且假定:

1) 存在 q_c 的一个邻域 θ 使得 $\alpha(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot)$ 连续;

2) $\gamma_0(\cdot)$ 在 q_c 处具有连续的导数.

如果 $\frac{d}{dq} \gamma_0(\cdot) < 0$,则 q_c 是一个中心点,其附近存在周期轨道.

证明 考虑系统(7)在 q_c 处的近似线性系统

$$\ddot{z} - \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dq} \gamma_0(q) \right] \Big|_{q=q_c} \cdot z = 0.$$

如果 $\frac{d}{dq} \gamma_0(\cdot) < 0$ 成立,则上述近似线性系统的原点是中心点.根据Hartman-Grobman定理,原系统在 q_c 处可能是稳定焦点、不稳定焦点或中心点,只需证明前两种是不可能的即可.文献[9]利用它们三者积分曲线之间的差异,通过反证法证明了它只能是中心点(详细过程参见文献[9]).实际上可以利用系统(7)一次积分曲线(9)的特征来证明.由于式(9)关于 \dot{q} 是偶函数,即

$$\psi(q, \dot{q}) = \psi(q, -\dot{q}) = 0,$$

该积分曲线一定是关于 q 轴对称的.而焦点外围相轨迹均是不对称的,因此 q_c 只能是中心点.□

当确定平衡点附近存在周期轨道之后,可以辅之以积分曲线数值解来确定其是否是周期轨道(通过寻找式(8)是否存在另一个根来判定).

4 动态伺服控制器设计

为了保证系统准确收敛到目标轨道,需要对以下虚约束和轨道函数进行镇定:

$$h = p - \varphi(q), \quad (11)$$

$$U = \dot{q}^2 - Y(q). \quad (12)$$

在文献[6-7]中,作者采用了基于LQR的方法设计控制器,需要求解非线性Riccati方程,因此该方法依赖于系统零动态微分方程的解析解,当无法获得解析解时,方法不再适用.同样也不适用于变目标的情况.这里将给出更直接简便的方法.

4.1 周期轨道镇定控制器设计

将周期轨道方程(12)两边对时间求导,有

$$\dot{U} = \dot{q} \left(2\ddot{q} + \beta_0 I^{-1} \left(\int_{q_d}^q I \gamma_0 dx + \dot{q}_d^2 \right) - \gamma_0 \right) = \dot{q} (2\ddot{q} + \beta_0 Y q - \gamma_0). \quad (13)$$

虚约束方程(11)两边对时间求导,有

$$\dot{h} = \dot{p} - \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q}, \quad (14)$$

$$\ddot{h} = \ddot{p} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} (\dot{q})^2 - \frac{\partial \phi}{\partial q} \ddot{q}. \quad (15)$$

将式(15)代入模型(1),有

$$-d_{11} \ddot{h} = \alpha \ddot{q} + \beta \dot{q}^2 + \gamma, \quad (16)$$

将式(16)代入(13),有

$$\dot{U} = \dot{q} \left(-2 \frac{d_{11} \ddot{h} + \beta \dot{q}^2 + \gamma}{\alpha} + \beta_0 Y(q) - \gamma_0 \right) = -\frac{2\dot{q}}{\alpha} (d_{11} \ddot{h} + \beta U). \quad (17)$$

构造Lyapunov函数 $V = \frac{1}{2} U^2$,并对其求导有

$$\dot{V} = U \dot{U} = -\frac{2}{\alpha} U \dot{q} (d_{11} \ddot{h} + \beta U). \quad (18)$$

因此,只需

$$\ddot{h} = \frac{K_3 \text{atan}(U \dot{q} / \alpha) - \beta U}{d_{11}},$$

即可实现Lyapunov函数 V 的镇定,其中 K_3 是一个正常数,可以控制其收敛速度.然而上述控制律只能保证 $U \rightarrow 0, \dot{h} \rightarrow 0$,无法保证 $h \rightarrow 0$,因此为实现 h 的镇定,将上式修正为

$$\ddot{h} = \frac{K_3 \text{atan}(U \dot{q} / \alpha) - \beta U}{d_{11}} - K_1 \dot{h} - K_2 h. \quad (19)$$

其中: K_1, K_2 为正常数,并且有 $K_1 \ll K_3, K_2 \ll K_3$.因此修正后的控制律对 V 的收敛影响不大.若令

$$\nu = \frac{K_3 \text{atan}(U \dot{q} / \alpha) - \beta U}{d_{11}}, \quad (20)$$

则式(19)可记作

$$\ddot{h} + K_1 \dot{h} + K_2 h = \nu. \quad (21)$$

该子系统具有如下形式的传递函数:

$$G(s) = \frac{H(s)}{\nu(s)} = \frac{1}{s^2 + K_1 s + K_2}. \quad (22)$$

因此,只需选择合适的参数,即可保证 h 子系统是稳定的,并且在式(19)的作用下, U 首先收敛,使得 h 子系统给定 $\nu \rightarrow 0$,从而实现 $h \rightarrow 0$.

从Acrobot系统动力学模型中可以反解出

$$\ddot{q}_1 = \frac{-d_{12} \tau - d_{22}(h_1 + \varphi_1) + d_{12}(h_2 + \varphi_2)}{d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}} =$$

$$f_1 + g_1 \tau,$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{d_{11} \tau + d_{21}(h_1 + \varphi_1) - d_{11}(h_2 + \varphi_2)}{d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}} =$$

$$f_2 + g_2 \tau. \quad (23)$$

将式(15)和(23)代入(21),于是总的控制律为

$$\tau = \frac{-v - f_1 - K_1 \dot{h} - K_2 h + \frac{\partial \varphi}{\partial q} f_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} (\dot{q})^2}{g_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial q} g_2} \quad (24)$$

从式(24)可以看出, 这种形式的控制器控制参数是独立于虚约束表达式的, 因此当目标更换时, 可以避免重新计算非线性系数, 设计更加简便.

4.2 轨道参数的数值解

在所提出的控制算法中, 需要计算

$$U(q, \dot{q}) = \dot{q}^2 - Y(q)$$

以及

$$Y(q) = I^{-1} \int_{q_d}^q I \gamma_0 dx + Y_0 I^{-1}$$

的值. 然而对于一般的虚约束, 上式是无法求出解析解的. 注意到 $Y(q)$ 是关于 (q, q_0, Y_0) 的函数, 也即对于给定的 (q_0, Y_0) 和虚约束, 不管 \dot{q} 是多少, $Y(q)$ 都是相同的, 因此可以用数值解来代替 $Y(q)$ 参与运算, 记其数值解为 $Y^*(q)$, 它可以利用式(10)进行积分运算, 进而采用插值的方式获得其他点的值, 从而计算出

$$U(q, \dot{q}) = \dot{q}^2 - Y^*(q).$$

5 算例及仿真实验

基于 Spong 采用的典型参数^[2], 物理参数值见表

1. 假定控制目标为位置 $[q_{1d}, q_{2d}, \dot{q}_{1d}, \dot{q}_{2d}] = [0, 1, 0, 0]$, 并且希望过程中它可经过以下两个位置(不限制速度) $[q_{1d}, q_{2d}] = [-2.5, -0.5], [-\pi/2, 0]$. 则可以计算出符合上述3个条件的形如(5)的虚约束, 即

$$q_1 = a q_2^2 + b q_2 + c.$$

其中: $a = -0.1917, b = 1.7625, c = -1.5708$. 在该虚约束作用下, 系统零动态方程系数为

$$\alpha = (2a q_2 + b) d_{11} + d_{12},$$

$$\beta = 2a d_{11} - \theta_3 \sin q_2 (4a q_2 + 2b + 1),$$

$$\gamma = \theta_4 g \cos(a q_2^2 + b q_2 + c) +$$

$$\theta_5 g \cos[a q_2^2 + (b + 1) q_2 + c].$$

利用式(10)绘制其 (q_2, \dot{q}_2^2) 相轨迹, 如图2所示.

可以看出围绕中心点 $(0, 0)$ 存在周期轨道, 其中经过 $(1, 0)$ 的轨道即是目标轨道. 采用式(20)和(24)来实现动态伺服控制, 控制参数选为 $K_1 = 10, K_2 = 25, K_3 = 1000$. 系统初始状态为 $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0, 0, 0, 0)$, 在 Matlab/Simulink 平台环境下进行仿真, 可以得到如图3~图5的仿真结果.

图3给出了虚约束函数 h , 轨道参数 U 以及 Acrobot 末端与目标点 $(0, 1)$ 的直线距离 $error$ 随时间变化的曲线. 可以看出, 经过 15s 的调整, 虚约束及轨道参数均收敛至 0, 系统在每次摆动中越来越接近目

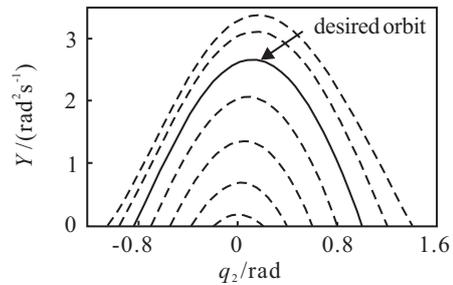


图2 多项式虚约束下系统相轨迹

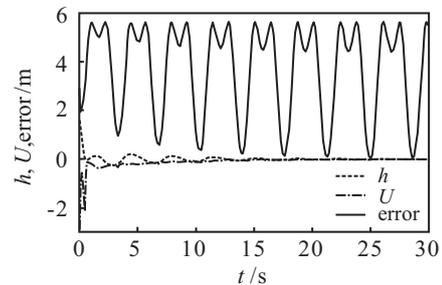


图3 虚约束、轨道参数以及末端误差曲线

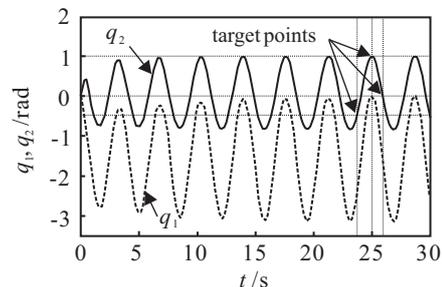


图4 两杆摆角曲线

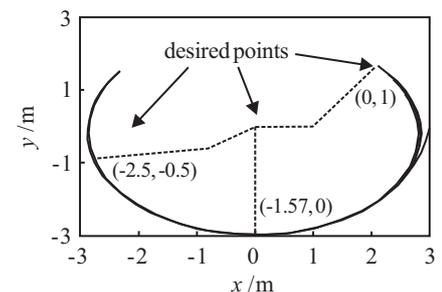


图5 Acrobot 末端轨迹

标点, 最终误差小于 0.0307 m. 图4是两杆摆角仿真曲线. 从该图中可以看出系统作周期运动, 15s 左右, 收敛到目标轨道上, 作等幅振荡, 每次摆动过程均到达目标点, 并且经过两个预设点 $(-\pi/2, 0), (-2.5, -0.5)$.

图5给出的是 Acrobot 末端轨迹曲线, 可以直观看出, 系统从初始点出发, 逐渐收敛到目标轨道上. 目标轨道一个最高点是 $(0, 1)$, 并且经过了两个预设点. 这说明所设计的虚约束是正确的, 控制算法是有效的.

6 结论

本文所提出的基于虚约束的 Acrobot 动态伺服控制统一设计方法, 将虚约束的构造、周期轨道的计

算与分析、动态伺服控制器的设计与实现有机结合,解决了基于能量的方法运动形态单一和以往的虚约束方法对周期轨道方程解析解的依赖性问题,可以较好地实现 Acrobot 的动态伺服控制.同时,所提出的光滑反馈控制律具有结构简单、参数易于确定等优点,对目标点变动具有良好的适应性.本文所提出的统一设计方法对于 Acrobot 等一类欠驱动机械系统的动态伺服控制具有普遍意义.

参考文献(References)

- [1] Murray R M, Hauser J. A case study in approximate linearization: The acrobot example[R]. Berkeley: EECS Department, University of California, 1991.
- [2] Spong M W. The swing up control problem for the acrobot[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1995, 15(1): 49-55.
- [3] Xin X, Kaneda M. The swing up control for the Acrobot based on energy control approach[C]. Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control. Atlantis: IEEE, 2002: 3261-3266.
- [4] Berkemeier M, Fearing R. Tracking fast inverted trajectories of the underactuated Acrobot[J]. IEEE Trans on Robotics & Automation, 1999, 15(4): 740-750.
- [5] Shiriaev A, Perram J, Canudas-de-Wit C. Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: Virtual constraints approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(8): 1164-1176.
- [6] Shiriaev A, Perram J, Robertsson A, et al. Explicit formulas for general integrals of motion for a class of mechanical systems subject to virtual constraints[C]. Proc of the 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Nassau, 2004: 1158-1163.
- [7] Shiriaev A, Sandberg A, Canudas-de-Wit C. Motion planning and feedback stabilization of periodic orbits for an acrobot[C]. Proc of the 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Nassau, 2004: 290-295.
- [8] Shiriaev A, Freidovich L B, Gusev S V. Transverse linearization for controlled mechanical systems with several passive degrees of freedom[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(4): 893-906.
- [9] Shiriaev A, Robertsson A, Perram J, et al. Periodic motion planning for virtually constrained euler-lagrange systems[J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(11): 900-907.
- [10] La-Hera P M, Shiriaev A, Freidovich L B, et al. Orbital stabilization of a pre-planned periodic motion to swing up the Furuta pendulum: Theory and experiments[C]. 2009 IEEE Int Conf on Robotics and Automation. Kobe, 2009: 2971-2976.
- [11] Spong M W. Underactuated mechanical systems[C]. Control Problems in Robotics and Automation. London: Springer-Verlag, 1998: 135-150.
- [12] 张晓华,程红太,赵旖旎.基于能量的 Acrobot 动态伺服控制[J].控制与决策,2008,23(11):1258-1262.
(Zhang X H, Cheng H T, Zhao Y N. Energy based dynamical servo control for the Acrobot[J]. Control and Decision, 2008, 23(11): 1258-1262.)
- [13] 程红太,赵旖旎,张晓华. Acrobot 动态伺服控制及其对称虚约束方法研究[J].自动化学报,2010,36(11):1594-1600.
(Cheng H T, Zhao Y N, Zhang X H. Study of dynamical servo control for the Acrobot and symmetrical virtual constraints method[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(11): 1594-1600.)

(上接第922页)

- [5] 佟绍成,周军.非线性模糊间接和直接自适应控制器的设计和稳定性分析[J].控制与决策,2000,15(3):293-296.
(Tong S C, Zhou J. Design and stability of fuzzy indirect and direct adaptive control for nonlinear system[J]. Control and Decision, 2000, 15(3): 293-296.)
- [6] Wang M, Chen B. Direct adaptive fuzzy tracking control for a class of perturbed strict-feedback nonlinear systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(24): 2655-2670.
- [7] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, 15: 116-132.
- [8] Wang H, Tanaka K, Griffin M F, et al. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 14-23.
- [9] Tanaka K, Wang H. Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach[M]. New York: Wiley-Interscience, 2001: 83-108.
- [10] Sala A, Arino C. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(24): 2671-2686.