

文章编号: 1001-0920(2012)06-0919-04

## 基于参数辨识和 T-S 模糊模型的一类非线性系统镇定控制器设计

王银河, 胡 钧, 崔乐远, 章 云

(广东工业大学 自动化学院, 广州 510006)

**摘 要:** 针对一类非线性不确定控制系统, 首先采用参数辨识的方法构造出对应的 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型; 然后运用平行分布补偿 (PDC) 控制器设计方法进行系统的稳定控制器设计; 最终达到镇定原非线性系统的目的. 给出一种从 T-S 模糊模型参数辨识到 PDC 控制器设计的非线性控制器的设计方法. 针对单级倒立摆系统的仿真结果验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 参数辨识; T-S 模糊模型; 平行分布补偿; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Stabilizing controller design for a class of nonlinear systems based on parameter identification and T-S fuzzy model

WANG Yin-he, HU Jun, CUI Yue-yuan, ZHANG Yun

(College of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China. Correspondent: HU Jun, E-mail: hicrasher@yahoo.cn)

**Abstract:** For a class of nonlinear uncertain control systems, the according Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy models is constructed by means of parameter identification firstly. Then the parallel distributed compensation(PDC) method can be used to design the stabilizing controller of the systems, which meets the needs of stabilizing the original nonlinear systems. From the parameter identification of T-S fuzzy models to the PDC controller design, a nonlinear controller design method is proposed. The simulation result of the inverted pendulum shows the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** parameter identification; T-S fuzzy model; PDC; LMI

### 1 引 言

在控制理论界, 非线性系统镇定一直是研究的热点问题之一. 在比较成熟的非线性控制方法中, 无论是基于精确对象模型的近似或者精确线性化方法<sup>[1]</sup>, 还是基于对象模型非线性项的界的滑模控制<sup>[1]</sup>等方法, 都对对象模型有着较严格的要求, 这些信息在实际工程中有时是难以获取的.

近年来, 模糊控制器在非线性控制领域得到了广泛的应用. 常用的模糊逻辑系统主要分为 Mamdani 型和 T-S 型两大类. Castro<sup>[2]</sup>和 Ying<sup>[3]</sup>分别证明了特定条件下 Mamdani 型和 T-S 型模糊系统的万能逼近性质, 完善了模糊逻辑系统在模糊控制器设计中的理论依据, 极大地推动了模糊控制的发展.

在模糊控制设计中, Mamdani 型模糊逻辑系统因

其模糊规则后件参数简明而被广泛应用于直接或间接模糊自适应控制器设计中<sup>[4-6]</sup>, 通过规则后件参数的自适应调节来达到逼近非线性控制器或者控制器中非线性函数的目的.

在逼近非线性动态系统的问题上, Mamdani 型模糊模型稍显乏力. T-S 模糊模型可以利用其输出件是输入变量的线性组合这一特点构造线性动态子系统, 再通过模糊规则进行线性子系统的模糊化组合以逼近任意的非线性动态系统.

1985 年, Takagi 等人<sup>[7]</sup>提出了 T-S 模糊模型辨识的基本思想. 随着研究的深入, Wang 等人<sup>[8]</sup>提出了 T-S 模糊系统平行分布补偿方法, 基本上建立了基于线性矩阵不等式 (LMI) 方法的模糊稳定性分析以及控制器设计框架. 随后 Tanaka 等人<sup>[9]</sup>引入了平行分

收稿日期: 2010-11-19; 修回日期: 2011-03-10.

基金项目: 广东省自然科学基金项目(8151009001000061); 广东省自然科学基金团队项目(8351009001000002).

作者简介: 王银河(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统智能控制理论与应用等研究; 胡钧(1987-), 男, 硕士生, 从事模糊建模与模糊控制的研究.

布补偿(PDC)的观测器和鲁棒最优控制器设计方法;Sala等人<sup>[10]</sup>给出了基于T-S模糊模型的系统渐近镇定的充要条件.然而,这些研究都是分离的基于T-S模糊模型的辨识或者控制问题.如何将T-S模糊系统辨识与PDC控制器设计相结合,进行完整的模糊控制器设计,是在实际工程中运用PDC方法的关键问题,目前鲜有这方面的研究报道.

基于上述考虑,参考T-S模糊建模方法<sup>[7]</sup>以及PDC控制器设计方法<sup>[9]</sup>,本文从实用性的角度提出了一种基于最小二乘法的T-S模糊模型辨识方法的PDC控制器设计方法.该方法针对一类非线性不确定系统设计相应的镇定控制器,并在单级倒立摆的镇定仿真中取得了一定的效果.

## 2 非线性动态系统的T-S模糊模型的辨识

考虑如下MIMO非线性控制系统:

$$\dot{X} = F(t) + G(X)U. \quad (1)$$

其中

$$F(X) = (F_1(X) \cdots F_n(X))^T, \\ G(X) = \begin{bmatrix} G_{11}(X) & \cdots & G_{1m}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(X) & \cdots & G_{nm}(X) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},$$

$$U = (U_1 \cdots U_m)^T.$$

类似于文献[9],考虑如下带有 $N$ 条规则的T-S模糊逻辑系统:

$$R^i: \text{If } x_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } M_n^i, \\ \text{Then } \dot{X} = A^i X + B^i U, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \quad (2)$$

其中

$$A^i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & \cdots & A_{1n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^i & \cdots & A_{nm}^i \end{bmatrix}, B^i = \begin{bmatrix} B_{11}^i & \cdots & B_{1n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^i & \cdots & B_{nm}^i \end{bmatrix},$$

模糊集合 $M_j^i$ 的隶属函数记为 $\mu_j^i(x_j)$ .

根据T-S模糊系统的万能逼近性质,为了得到用来逼近系统(1)的具有较好逼近精度的T-S模糊逻辑系统,本文将利用未知被控对象(1)的输入-状态数据,采用辨识的方法得到T-S模糊逻辑系统(2)后件中 $A^i$ 和 $B^i$ 中的参数.这里借鉴了T-S模糊模型的辨识方法<sup>[7]</sup>,按如下步骤获得T-S模糊模型的后件参数:

**Step 1** 针对非线性系统(1),采集动态系统的输入和状态数据,分别得到数据集 $U$ 和 $X$ ;假定能够按照差分方法或其他测量装置得出相应的状态变量导数集合 $\dot{X}$ ,根据采集到的数据确定状态变量 $X = (X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n)^T$ 的大致变化范围, $x_j \in [x_{j \min}, x_{j \max}]$ , $j = 1, 2, \cdots, n$ .

**Step 2** 分别对上述各变量 $x_j$ 的论域 $[x_{j \min}, x_{j \max}]$ 进行模糊划分,得到模糊集合 $M_j^{l_j}$ ( $l_j = 1, 2, \cdots, N_j$ , $j = 1, 2, \cdots, n$ ).这里 $M_j^{l_j}$ 是对应于变量 $x_j$ 的模糊语言值,其相应的隶属函数记为 $\mu_{x_j}^{l_j}(x_j)$ .上述模糊划分将状态论域划分成 $\prod_{j=1}^n N_j$ 个模糊子区域,得

到 $\prod_{j=1}^n N_j$ 个模糊关系,即

$$R_i = M_1^{l_1} \times M_2^{l_2} \times \cdots \times M_n^{l_n}, \quad i = 1, 2, \cdots, \prod_{j=1}^n N_j.$$

**Step 3** 针对非线性系统(1),设计形如式(2)的带有如下 $N$ 条模糊规则的T-S模糊模型 $H$ :

$$R^i: \text{If } x_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } M_n^i, \\ \text{Then } \dot{X} = A^i X + B^i U,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N, \quad N = \prod_{j=1}^n N_j. \quad (3)$$

其输出为

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^N h^i (A^i X + B^i U), \quad (4)$$

其中 $h^i$ 是模糊模型(3)中对应第 $i$ 条规则的基函数,即

$$h^i = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{x_j}^i(x_j)}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n \mu_{x_j}^i(x_j)},$$

$\mu_{x_j}^i(x_j)$ ( $j = 1, 2, \cdots, n$ , $i = 1, 2, \cdots, N$ )是第 $k$ 组数据中,状态变量 $x_j$ 对应于第 $i$ 个模糊关系中语言值 $M_j^{l_j}$ 的隶属度值.

**Step 4** 运用最小二乘法对式(3)中的参数进行辨识.待辨识参数有 $(n^2 + n \times m) \times N$ 个,即 $C = (A^1, B^1, A^2, B^2, \cdots, A^N, B^N)^T$ .其中

$$A^i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & \cdots & A_{1n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^i & \cdots & A_{nm}^i \end{bmatrix}, B^i = \begin{bmatrix} B_{11}^i & \cdots & B_{1n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^i & \cdots & B_{nm}^i \end{bmatrix}.$$

假设有 $p$ 组输入-状态-状态导数数据对 $(U^k, X^k, \dot{X}^k)$ , $k = 1, 2, \cdots, p$ .其中: $U^k = (u_1^k, \cdots, u_m^k)^T$ , $X^k = (X_1^k, \cdots, X_n^k)^T$ , $\dot{X}^k = (\dot{x}_1^k, \cdots, \dot{x}_n^k)^T$ .则有相应的T-S模糊模型的输出表达式

$$\dot{X}^k \approx \sum_{i=1}^N h^i (A^i X^k + B^i U^k). \quad (5)$$

为了进行辨识,取式(5)中第 $j$ 行表达式

$$\dot{x}_j^k \approx \sum_{i=1}^N h^i (A_j^i X^k + B_j^i U^k). \quad (6)$$

其中: $A_j^i = (A_{j1}^i, \cdots, A_{jn}^i)$ , $B_j^i = (B_{j1}^i, \cdots, B_{jm}^i)$ .为

辨识出系数矩阵  $C_j = (A_j^1, B_j^1, \dots, A_j^N, B_j^N)^T$ , 构造计算矩阵

$$D = \begin{bmatrix} h^1 X^{1T} & h^1 U^{1T} & \dots & h^N X^{1T} & h^N X^{1T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h^1 X^{pT} & h^1 U^{pT} & \dots & h^N X^{pT} & h^N X^{pT} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

**Step 5** 因模糊系统的逼近精度以及采样噪声干扰会产生测量误差, 故引入误差向量  $E_j = (e_j^1, \dots, e_j^p)$ . 假设  $e_{jk}$  是白噪声, 则由式 (6) 可以得到输出数据矩阵表达式为

$$\dot{X}_j = (\dot{x}_j^1, \dots, \dot{x}_j^p)^T = DC_j + E_j, \quad (8)$$

其中  $\dot{x}_j^k$  为第  $k(k = 1, 2, \dots, p)$  组数据中  $x_j(j = 1, 2, \dots, n)$  的导数. 根据最小二乘法, 有系数估计矩阵

$$\hat{C}_j = (D_j^T D_j)^{-1} D_j^T \dot{X}_j. \quad (9)$$

**Step 6** 按照上述步骤分别求出系数矩阵  $C = (A^1, B^1, A^2, B^2, \dots, A^N, B^N)^T$  的各列系数向量的估计值  $\hat{C}_j = (A_j^1, B_j^1, A_j^2, B_j^2, \dots, A_j^N, B_j^N)^T (j = 1, 2, \dots, n)$ , 组成系数估计矩阵  $\hat{C} = (\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n)$ , 即求出了规则 (3) 中各个规则的系数矩阵的估计值  $\hat{A}^i$  和  $\hat{B}^i (i = 1, 2, \dots, N)$ . 代入 T-S 模糊模型 (3), 即可得到辨识后的 T-S 模糊逻辑系统

$$\begin{aligned} R^i: & \text{ If } x_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } M_n^i, \\ & \text{ Then } \dot{X} = A^i X + B^i U, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

### 3 基于 T-S 模糊模型的 PDC 控制器的设计

针对辨识好的 T-S 模糊模型 (10), 受文献 [8] 的启发, 采用如下 T-S 型模糊状态反馈控制器:

$$\begin{aligned} R^i: & \text{ If } x_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } M_n^i, \\ & \text{ Then } U^i = -F^i X, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$F^i = \begin{bmatrix} F_{11}^i & \dots & F_{1n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}^i & \dots & F_{nm}^i \end{bmatrix}.$$

T-S 型模糊状态反馈控制器 (11) 的输出为

$$U_i = -\sum_{i=1}^N h^i F^i X, \quad (12)$$

代入系统 (10) 可得如下闭环 T-S 模糊模型:

$$\begin{aligned} R^i: & \text{ If } x_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } M_n^i, \\ & \text{ Then } \dot{X}^i = \hat{A}^i X - \hat{B}^i \sum_{i=1}^N h^i F^i X, \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

闭环 T-S 模糊模型 (13) 的状态方程为

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h^i h^j (\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j) X. \quad (14)$$

**定理 1** 如果存在满足如下条件的正定矩阵  $P$ :

$$\begin{aligned} (\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j)^T P + P(\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j) < 0, \\ i, j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (15)$$

则闭环系统 (14) 的平衡点  $X = 0$  是大范围渐近稳定的.

**证明** 受文献 [9] 的启发, 取正定函数  $V(t) = X^T P X$ , 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h^i h^j X^T [(\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j)^T P + \\ & P(\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j)] X, \end{aligned} \quad (16)$$

当满足式 (15) 的条件时有  $\dot{V}(t) < 0$ .  $\square$

定理 1 的证明中条件 (15) 是非常保守的, 当规则数增多时, 要同时保证  $N^2$  个不等式同时成立, 往往会造成式 (15) 无解. 记  $G_{ij} = (\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j)^T P + P(\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j)$ , 则 (17) 可以改写为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i < j}^N \sum_{j=1}^N h^i h^j X^T (G_{ij} + G_{ji}) X + \\ & \sum_{i=1}^N h^i h^i X^T G_{ii} X. \end{aligned} \quad (17)$$

因此, 有如下条件放松后的定理:

**定理 2** 如果存在满足如下条件的正定矩阵  $P$ :

$$\begin{aligned} (\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j)^T P + P(\hat{A}^i - \hat{B}^i F^j) + (\hat{A}^j - \hat{B}^j F^i)^T P + \\ P(\hat{A}^j - \hat{B}^j F^i) < 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (18)$$

则闭环系统 (14) 的平衡点  $X = 0$  是大范围渐近稳定的.

与式 (15) 相比, (18) 中 LMI 的条件数缩减至  $N \times (N + 1)/2$  个, 且由 (15) 可以推出 (18), 即定理 1 的条件是定理 2 中条件成立的充分条件.

针对式 (18), 要尝试寻求满足条件的每条规则的反馈矩阵  $F^i (i = 1, 2, \dots, N)$  以及正定矩阵  $P$ , 然而式 (18) 并不是  $F^i$  和  $P$  的联合凸优化问题. 受文献 [8] 的启发, 首先对式 (18) 左边的项左右分别乘以  $Q = P^{-1}$ , 再定义  $R^i = F^i Q$ , 有

$$\begin{aligned} Q \hat{A}^{iT} - R^{jT} \hat{B}^{iT} + \hat{A}^i Q - \hat{B}^i R^j + Q \hat{A}^{jT} - \\ R^{iT} \hat{B}^{jT} + \hat{A}^j Q - \hat{B}^j R^i < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

利用 LMI 工具对式 (19) 求解, 可找出满足条件的矩阵  $R^i$  和  $Q$ , 再利用  $F^i = R^i Q^{-1}$  计算出每条规则的状态反馈矩阵  $F^i$ , 从而完成了镇定控制器的设计.

### 4 仿真算例

为了说明算法的有效性, 仿真算例采用平衡单级倒立摆系统问题. 倒立摆的运动方程如文献 [8] 所示, 将其改写成 (1) 的形式, 有

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{g \sin x_1 (m + M) - mlx_2^2 \sin x_1 \cos x_2}{\frac{4}{3}(m + M) - ml \cos^2 x_1} \\ 0 \\ -\cos x_1 \\ \frac{4}{3}(m + M) - ml \cos^2 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} u. \quad (20)$$

其中:  $x_1$  为摆杆与垂直位置形成的角度;  $x_2$  为角速度;  $g$  为重力加速度, 取  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ;  $m$  为摆杆质量, 取  $m = 2 \text{ kg}$ ;  $M$  为小车的质量, 取  $M = 8 \text{ kg}$ ;  $l$  为摆杆重心到转轴的长度, 取  $l = 0.5 \text{ m}$ .

对倒立摆系统输入随机控制量  $u$ , 记录倒立摆系统的状态量  $X = (x_1, x_2)^T$ , 根据差分法计算出相应的状态量的导数  $\dot{X} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$ ; 根据数据组, 分别确定状态量  $x_1$  和  $x_2$  的大致变化论域:  $x_1 \in (-0.5\pi, 0.5\pi)$ ,  $x_2 \in (-4, 4)$ . 考虑到单级倒立摆的对称性, 仅对摆角的正半区间  $x_1 \in (0, 0.5\pi)$  进行模型辨识, 在负半区间上采用与正半区间相同的模糊模型. 为了与文献[8]中的仿真结果进行对比, 对  $x_2$  不进行模糊划分,  $x_1$  论域上的模糊划分如图 1 所示.

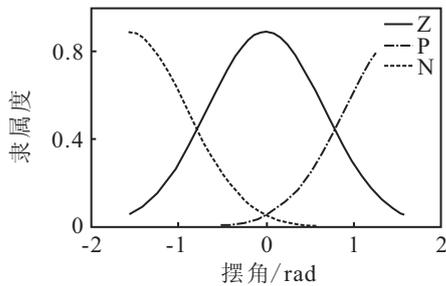


图 1 倒立摆摆角  $x_1$  的模糊划分

根据数据组, 采用第 2 节的方法辨识出 T-S 模糊模型, 并根据定理 2 设计相应的模糊控制器

$R^1$ : If  $x_1$  is Z, Then

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.5536 & 0.1978 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1837 \end{bmatrix} U,$$

$$U = (804.97, 235.65)X;$$

$R^2(R^3)$ : If  $x_1$  is P(N), Then

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10.6014 & 0.0044 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0136 \end{bmatrix} U,$$

$$U = (1573.4, 467.22)X.$$

选定不同的初始摆角, 系统 (20) 在上述控制器的作用下的响应曲线如图 2 和图 3 所示.

图 2 中, 实线是在本文设计的控制器作用下的倒立摆响应曲线, 虚线是在文献[8]中二规则控制器下的倒立摆时间响应曲线. 可见, 本文设计的控制器

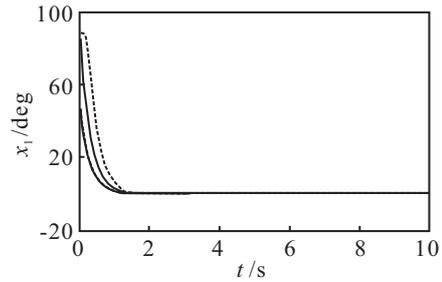


图 2 初始角度为  $88.5^\circ, 50^\circ$ , 角速度为 0 的时间响应曲线

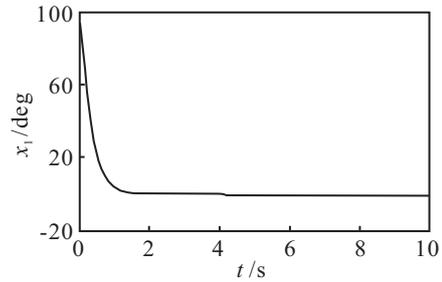


图 3 初始角度为  $89.7^\circ$ , 角速度为 0 的时间响应曲线

在调节时间上具有一定的优势. 在初始可控摆角上, 文献[8]中设计的控制器可以稳定地初始摆角  $x_1 \in [-88.5^\circ, 88.5^\circ]$ ; 而本文控制器在  $x_1 \in [-89.7^\circ, 89.7^\circ]$  的初始条件下可以完成镇定任务(见图 3). 这表明了基于辨识的 T-S 模糊模型建模方法能充分利用输入-状态数据, 得到比较精确的模糊模型, 从而设计出更适合于原系统的镇定控制器.

### 5 结 论

本文针对形如式(1)的非线性系统, 基于 T-S 模糊模型辨识, 结合 LMI 方法设计了相应的 PDC 模糊控制器, 给出了一种带有参数辨识方法的非线性系统模糊控制器设计方法, 并通过仿真算例验证了该方法的有效性, 为非线性系统的模糊控制实际应用提供了一种方法.

### 参考文献(References)

- [1] Slotine J, Li W. Applied nonlinear control[M]. NJ: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1991: 207-275.
- [2] Castro J L. Fuzzy logic controllers are universal approximators[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, 1995, 25(4): 629-635.
- [3] Ying H. General SISO Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(4): 582-587.
- [4] Wang L. A course in fuzzy systems and control[M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996: 290-324.

(下转第 928 页)