文章编号: 1001-0920 (2012) 05-0665-08

具有模糊需求的多商品流供应链网络均衡研究

胡劲松[1], 徐元吉[2], 刘芳霞[1], 王丛丛[1]
(1. 青岛大学 管理科学与工程系，山东 青岛 266071；2. 中国农业银行 浙江省分行营业部，杭州 310003)

摘 要: 研究由多个相互竞争的制造商与多个相互竞争的零售商组成, 且零售商处面临模糊市场需求、存在差异性的多商品供应链网络均衡问题. 运用 logit 模型刻画消费者的随机选择行为, 利用模糊事件的可信性测度推导零售商的模糊期望利润, 借助有限维变分不等式理论构建具有模糊需求的多商品流供应链网络均衡状态满足的变分不等式, 并分析了供应链网络均衡解的存在性和唯一性. 最后, 结合算例讨论了需求的模糊性对供应链网络均衡的影响.
关键词: 网络均衡；变分不等式；模糊需求；可信性测度
中图分类号: F274 **文献标识码:** A

Multi-products flow supply chain network equilibrium with fuzzy demand

HU Jin-song[1], *XU Yuan-ji*[2], *LIU Fang-xia*[1], *WANG Cong-cong*[1]
(1. Department of Management Science and Engineering，Qingdao University，Qingdao 266071，China; 2. Business Department of Zhejiang Branch，Agricultural Bank of China，Hangzhou 310003，China. Correspondent：HU Jin-song，E-mail：hujinsong@qdu.edu.cn)

Abstract: A competitive supply chain network equilibrium model with multi-differentiated products is studied, which comprises noncooperative manufactures and retailers with fuzzy market demand. Multinomial logit model is used to analyze consumer's stochastic choice of multi-differentiated products in order to describe the consumer's preference. The expected profit of retailers is derived by credibility measure of fuzzy event. The supply chain network is developed based on finite-dimensional variational inequalities associated with the various decision makers. Existence and uniqueness of the supply chain network equilibrium are analyzed in detail. Finally, the impacts of fuzzy demand on supply chain network equilibrium are illustrated through numerical examples.
Key words: network equilibrium；variational inequality；fuzzy demand；credibility measure

1 引 言

随着全球化竞争的加剧, 企业间的竞争日益激烈, 其竞争形式更多地表现为供应链间的竞争. 由于同一企业可能属于若干条供应链, 供应链整体呈现出具有层次结构的复杂网络形式. 网络成员利益经常不一致甚至冲突, 因此如何刻画供应链网络成员间的竞争与协调关系, 探求供应链网络的均衡条件, 越来越受到企业界和学术界的重视.

在单商品流网络均衡方面, 文献 [1] 针对确定性市场需求研究了由制造商、零售商及需求市场组成的单商品流供应链网络均衡问题, 运用变分不等式理论探讨了成员间的相互关系及其决策行为; [2] 在 [1] 的基础上, 研究了具有随机市场需求的单商品流供应链网络均衡问题. 有关多商品流的网络均衡问题是另一关注的热点. [3] 研究了确定性需求的多商品流供应链网络均衡问题. 由于其假设制造商的成本函数只与自身的产量有关, 其成果应用存在局限性.针对随机市场需求情况, [4] 假设制造商的成本函数不仅与其自身的生产量有关, 而且与其同类产品的其他制造商的生产量有关, 利用 Nash 均衡及变分不等式理论研究了供应链网络均衡问题. 近年来, 存在产品差异的供应链网络均衡问题已逐步引起学者们的关注. [5-6] 考虑到消费者的随机选择行为, 利用 Nash 均衡理论和变分不等式理论, 研究了随机市场需求的多商品流供应链网络均衡问题. 然而, [5-6] 仅考虑了制造商的成本函数只与同类产品有关的问题. 与现有文献不同, 本文假设制造商的生产成本不仅受到其他厂商同类产品生产成本的影响, 还受到其他产品的生产成本的

收稿日期: 2010-11-24；**修回日期:** 2011-03-07.
基金项目: 国家自然科学基金项目(71071082)；山东省自然科学基金项目(Y2008H07).
作者简介: 胡劲松(1966−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策分析、物流与供应链管理的研究；徐元吉(1985−), 男, 硕士, 从事物流与供应链管理的研究.

影响. 在当今竞争市场背景下, 该假设更符合现实. 例如两个均生产冰箱和空调的厂商, 由于冰箱和空调都需要钢材, 在原材料的采购上存在竞争, 这使得两个厂商的两种产品的生产成本相互影响.

上述研究均是针对确定性和随机性市场需求的供应链网络均衡成果. 然而, 由于当今市场竞争加剧、科学技术进步, 导致产品生命周期短, 市场需求波动性变大, 以至于企业难以准确获得市场需求信息. 在此情况下, 随机性已不再适合描述这类不确定性因素. 为此, 一些学者利用模糊集理论[7-8] 和可信性理论[9]研究供应链管理中的模糊现象, 如 [10-12]. 虽然, 针对供应链管理问题中的模糊现象开展了研究, 但涉及供应链网络均衡问题的模糊现象的研究尚不多见. 为此, 在考虑品牌和产地差异情形下, 本文研究由多个相互竞争的制造商与多个相互竞争的零售商组成, 且零售商处面临着模糊需求的多商品供应链网络均衡问题.

2 供应链网络均衡模型

本文研究由 m 个制造商和 n 个零售商构成的供应链网络均衡问题, 其中各制造商生产 L 种差异性产品, 通过不同的零售商销售给出具有模糊需求的需求市场. 顶层有 m 个制造商, 底层有 n 个零售商, 层间连线为其间的交易, 制造商 (零售商) 间进行非合作竞争.

2.1 供应市场均衡模型

令 q_i^l 为制造商 i 的产品 l 的生产量, q_{ij}^l 为制造商 i 与零售商 j 间产品 l 的交易量, ρ_{1ij}^l 为制造商 i 与零售商 j 间产品 l 的批发价格. 所有制造商与零售商的交易量 q_{ij}^l 归入 mnL 维列向量 $Q \in R_+^{mnL}$. f_i^l 为制造商 i 生产产品 l 的成本函数. 为体现竞争性, 制造商 i 的生产成本 f_i^l 不仅与同类产品有关, 还与其他类产品的产量有关, 即 $f_i^l(Q)$. $c_{ij}^l = c_{ij}^l(q_{ij}^l)$ 为制造商 i 与零售商 j 间关于产品 l 的交易成本函数.

对于制造商 i 而言, 假设制造商按订单生产, 即制造商 i 的产品 l 的生产量 q_i^l 与制造商 i 与各零售商间的产品 l 的交易量 q_{ij}^l 满足流量守恒等式 $q_i^l = \sum\limits_{j=1}^n q_{ij}^l$. 制造商 i 的销售收入为 $\sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{l=1}^L \rho_{1ij}^l q_{ij}^l$, 其费用支出由生产成本 $\sum\limits_{l=1}^L f_i^l(Q)$ 和交易成本 $\sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{l=1}^L c_{ij}^l(q_{ij}^l)$ 构成. 因此, 制造商 i 利润最大化模型为

$$\max \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^L \rho_{1ij}^l q_{ij}^l - \sum_{l=1}^L f_i^l(Q) - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^L c_{ij}^l(q_{ij}^l),\quad \forall Q \in R_+^{mnL}. \tag{1}$$

假设制造商 i 生产成本函数 $f_i^l(Q)$ 和制造商 i 与零售商 j 间的交易成本函数 $c_{ij}^l(q_{ij}^l)$ 为连续可微凸函数, 那么所有制造商的最优行为可用以下变分不等式描述: 确定 $Q^* \in R_+^{mnL}$, 使得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^L \Big[\frac{\partial f_i^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l} + \frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l*})}{\partial q_{ij}^l} - \rho_{1ij}^{l*}\Big] \times [(q_{ij}^l) - (q_{ij}^{l*})] \geqslant 0,\ \forall Q \in R_+^{mnL}. \tag{2}$$

上式表示: 当零售商 j 愿意支付产品 l 的价格 ρ_{1ij}^{l*} 小于制造商 i 生产产品 l 的边际成本与其边际交易费用之和时, 制造商 i 不会选择与零售商 j 就产品 l 进行交易, 即 $q_{ij}^{l*} = 0$. 当零售商 j 愿意支付产品 l 的价格 ρ_{1ij}^{l*} 等于制造商 i 生产产品 l 的边际成本与其边际交易费用之和时, 即

$$\rho_{1ij}^{l*} = \frac{\partial f_i^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l} + \frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l*})}{\partial q_{ij}^{l*}},$$

制造商 i 才会和零售商 j 就产品 l 发生交易, 即 $q_{ij}^{l*} > 0$. 另外, 不难看出 ρ_{1ij}^{l*} 为内生变量.

2.2 零售市场均衡模型

零售商处于供应链网络的中间层, 他们既要面对供应市场, 又要面对需求市场. 因此, 零售商 j 需要决定从各制造商处订购多少各类产品来满足市场需求, 以使自身获利最大化. 令 ρ_{2ij}^l 为零售商 j 处的制造商 i 生产的产品 l 的销售价格, 并将其归入 mnL 维列向量 $\rho_2 \in R_+^{mnL}$. $\bar{\rho}_{2j}^l$ 为零售商 j 处产品 l 的平均销售价格. $\tilde{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)$ 为零售商 j 处平均销售价格为 $\bar{\rho}_{2j}^l$ 时的产品模糊需求量, 其可信性分布函数为 $\varPhi_j^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l) = \mathrm{Cr}(\tilde{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l) \leqslant x)$, 支集为 $[\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l), \bar{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]$. 其中: $\bar{\rho}_{2j}^l$ 为需求函数的参数, 即 $[\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l), \bar{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]$ 和 $\varPhi_j^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l)$ 随 $\bar{\rho}_{2j}^l$ 的变化而变化. $\tilde{d}_{ij}^l$ 为消费者在零售商 j 处对制造商 i 生产的产品 l 的模糊需求量, 其可信性分布函数记为 $\varPhi_{ij}^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l) = \mathrm{Cr}(\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^l) \leqslant x)$. λ_{ij}^{l+} 和 λ_{ij}^{l-} 分别为零售商 j 处制造商 i 的产品 l 的单位产品存储费和缺货费. c_j^l 为零售商 j 处发生的处理费用, 包括: 产品的展览和广告等费用. 一般而言, c_j^l 与其产品拥有量 $\sum\limits_{i=1}^m q_{ij}^l$ 有关. 但为了体现零售商间的竞争, 假设 c_j^l 亦与其他零售商处的产品拥有量有关, 即 $c_j^l = c_j^l(Q)$.

对于零售商 j 而言, 其收益来源于商品的销售收入 $\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{l=1}^L \rho_{2ij}^l \min\{q_{ij}^l, \tilde{d}_{ij}^l\}$. 其费用支出包括: 从上层各供应商处采购产品的费用 $\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{l=1}^L \rho_{1ij}^l q_{ij}^l$, 进行产品展示等活动的费用 $\sum\limits_{l=1}^L c_j^l(Q)$, 以及零售商 j 处发生缺货时的缺货费用 $\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{l=1}^L \lambda_{ij}^{l-} \max\{0, \tilde{d}_{ij}^l - q_{ij}^l\}$ 和发生

存货的存货费用 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\lambda_{ij}^{l+}\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}$. 那么零售商 j 的利润为

$$\begin{aligned}P_j(Q)=&\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\rho_{2ij}^l\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}-\\&\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\lambda_{ij}^{l-}\max\{0,\tilde{d}_{ij}^l-q_{ij}^l\}-\\&\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\lambda_{ij}^{l+}\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}-\\&\sum_{l=1}^{L}c_j^l(Q)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\rho_{1ij}^l q_{ij}^l.\end{aligned}\tag{3}$$

因为 $\tilde{d}_{ij}^l$ 为模糊变量, 所以利润 $P_j(Q)$ 亦为模糊变量. 其期望利润为

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[P_j(Q)]=&\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\rho_{2ij}^l\mathrm{E}[\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}]-\\&\sum_{l=1}^{L}c_j^l(Q)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\rho_{1ij}^l q_{ij}^l-\\&\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\lambda_{ij}^{l+}\mathrm{E}[\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}]-\\&\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\lambda_{ij}^{l-}\mathrm{E}[\max\{0,\tilde{d}_{ij}^l-q_{ij}^l\}].\end{aligned}\tag{4}$$

零售商 j 的利润最大化模型为

$$\max\mathrm{E}[P_j(Q)],\ \forall Q\in R_{+}^{mnL}.\tag{5}$$

消费者的购买行为不仅取决于产品的价格, 还取决于其自身的偏好. 因此, 为了分析零售商 j 的最优决策行为, 需解决 3 个问题: 1) 如何刻画消费者的随机选择行为; 2) 如何通过模糊需求 $\tilde{d}_j^l$ 的可信性分布函数 $\Phi_j^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l)$, 获得模糊需求 $\tilde{d}_{ij}^l$ 的可信性分布函数 $\Phi_{ij}^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l)$; 3) 推演和分析零售商期望利润函数.

利用 logit 模型[13]描述消费者的随机选择行为. 记 U_{ij}^l 表示消费者在零售市场 j 处购买制造商 i 生产的产品 l 时所获得的效用值. 设该效用值等于确定性的产品支付所引起的负效用值和随机主观观测误差项之和, 即

$$U_{ij}^l=-\theta\rho_{2ij}^l+\varepsilon_{ij}^l,\ \forall i,j,l.\tag{6}$$

其中: $\theta>0$ 为成本与效用的转化系数, ε_{ij}^l 为随机主观观测误差.

记 w_{ij}^l 为消费者在零售商 j 处从 m 个制造商中选择制造商 i 生产的产品 l 的概率. 因此, 根据最大效用决策原理, 有

$$\begin{gathered}w_{ij}^l=\Pr\{U_{ij}^l\geqslant U_{i'j}^l,\ i'=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m\},\\0\leqslant w_{ij}^l\leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{m}w_{ij}^l=1.\end{gathered}\tag{7}$$

设随机项 ε_{ij}^l 相互独立, 且服从 Gumbel 分布, 即

$$F(x)=\Pr\{\varepsilon_{ij}^l\leqslant x\}=\exp(-\mathrm{e}^{-x}).$$

那么, 根据随机效用理论的 logit 模型, 可得

$$w_{ij}^l=\exp(-\theta\rho_{2ij}^l)\Big/\sum_{i=1}^{m}\exp(-\theta\rho_{2ij}^l).\tag{8}$$

根据式 (8) 所得的 w_{ij}^l, 零售商 j 处产品 l 的平均销售价格为

$$\bar{\rho}_{2j}^l=\sum_{i=1}^{m}w_{ij}^l\rho_{2ij}^l.\tag{9}$$

事实上, w_{ij}^l 亦为零售商 j 处制造商 i 的产品 l 的销量占产品 l 总销量的比例, 那么在零售商 j 处消费者对制造商 i 所生产产品 l 的模糊需求函数可表示为

$$\tilde{d}_{ij}^l=w_{ij}^l\tilde{d}_j^l.\tag{10}$$

因为 $\tilde{d}_j^l$ 的可信性分布为 $\Phi_j^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l)$, 支集为 $[\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l),\bar{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]$, 所以根据式 (10), 模糊需求 $\tilde{d}_{ij}^l$ 的支集为 $[w_{ij}^l\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l),w_{ij}^l\bar{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]$, 可信性分布函数为

$$\Phi_{ij}^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l)=\mathrm{Cr}(\tilde{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)\leqslant x)=\Phi_j^l(x/w_{ij}^l;\bar{\rho}_{2j}^l),\tag{11}$$

其中 $w_{ij}^l\neq 0$. 其意指零售商不会购买在销售市场没有需求的商品.

根据式 (11), 可得零售商 j 处制造商 i 的产品 l 的模糊销售、存储和缺货量.

定理 1 假设零售商 j 订购制造商 i 的产品 l 的数量为 q_{ij}^l, 那么零售商 j 处制造商 i 的产品 j 的模糊销售、存储和缺货量的期望分别为

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}]=\\&q_{ij}^l-\int_{w_{ij}^l\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)}^{q_{ij}^l}(q_{ij}^l-x)\mathrm{d}\Phi_j^l\Big(\frac{x}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big);\\&\mathrm{E}[\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}]=\\&\int_{w_{ij}^l\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)}^{q_{ij}^l}(q_{ij}^l-x)\mathrm{d}\Phi_j^l\Big(\frac{x}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big);\\&\mathrm{E}[\max\{0,\tilde{d}_{ij}^l\}-q_{ij}^l]=\\&\int_{q_{ij}^l}^{w_{ij}^l\bar{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)}(x-q_{ij}^l)\mathrm{d}\Phi_j^l\Big(\frac{x}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big).\end{aligned}$$

证明 记 $Y=\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}$. 根据可信性测度定义[9], 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cr}\{Y\leqslant x\}=\Phi_{ij}^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l)\bigvee\mathrm{Cr}\{q_{ij}^l\leqslant x\}=\\&\begin{cases}\Phi_{ij}^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l),\ x<q_{ij}^l;\\1,\ x\geqslant q_{ij}^l.\end{cases}\end{aligned}\tag{12}$$

根据模糊变量期望的定义[14], 期望销售量为

$$\mathrm{E}[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{Cr}\{Y\leqslant x\}.\tag{13}$$

因为可信性分布函数 $\mathrm{Cr}\{Y\leqslant x\}\in[0,1]$ 为有界单调递增函数, 所以式 (13) 中积分为 Stieltjes 可积. 那么, 利用式 (12) 和 (11), 有

$$\mathrm{E}[Y]=$$
$$\int_{-\infty}^{\underline{d}_{ij}^l} x\mathrm{dCr}\{Y\leqslant x\}+\int_{\underline{d}_{ij}^l}^{q_{ij}^l-\varepsilon} x\mathrm{dCr}\{Y\leqslant x\}+$$
$$\int_{q_{ij}^l-\varepsilon}^{q_{ij}^l} x\mathrm{dCr}\{Y\leqslant x\}+\int_{q_{ij}^l}^{+\infty} x\mathrm{dCr}\{Y\leqslant x\}=$$
$$q_{ij}^l-\int_{w_{ij}^l\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)}^{q_{ij}^l}(q_{ij}^l-x)\mathrm{d}\Phi_j^l\Big(\frac{x}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big).$$

利用销售量和存储量间的关系

$$\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}=q_{ij}^l-\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}$$

可得

$$\mathrm{E}[\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}]=$$
$$\int_{w_{ij}^l\underline{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)}^{q_{ij}^l}(q_{ij}^l-x)\mathrm{d}\Phi_j^l\Big(\frac{x}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big).$$

类似地, 利用销售量和缺货量间关系

$$\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}=\tilde{d}_{ij}^l-\max\{0,\tilde{d}_{ij}^l-q_{ij}^l\}$$

可得

$$\mathrm{E}[\max\{0,\tilde{d}_{ij}^l\}-q_{ij}^l]=$$
$$\int_{q_{ij}^l}^{w_{ij}^l\bar{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)}(x-q_{ij}^l)\mathrm{d}\Phi_j^l\Big(\frac{x}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big).\qquad\Box$$

令

$$\pi_j(Q)=\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^L\rho_{2ij}^l\mathrm{E}[\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}]-$$
$$\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^L\lambda_{ij}^{l-}\mathrm{E}[\max\{0,\tilde{d}_{ij}^l-q_{ij}^l\}]-$$
$$\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^L\lambda_{ij}^{l+}\mathrm{E}[\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}],$$

则有

$$\mathrm{E}[P_j(Q)]=\pi_j(Q)-\sum_{l=1}^L c_j^l(Q)-\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^L\rho_{1ij}^l q_{ij}^l.\tag{14}$$

假设 $c_j^l(Q)$ 为关于 q_{ij}^l 的连续可微凸函数, 那么期望利润函数 $\mathrm{E}[P_j(Q)]$ 的凸凹性取决于函数 $\pi_j(Q)$ 的凸凹性.

定理 2 $\pi_j(Q)$ 为关于 q_{ij}^l 的连续凹函数.

证明 根据定理 1 可得

$$\frac{\partial}{\partial q_{ij}^l}\mathrm{E}[\min\{q_{ij}^l,\tilde{d}_{ij}^l\}]=1-\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big),\tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{ij}^l}\mathrm{E}[\max\{0,q_{ij}^l-\tilde{d}_{ij}^l\}]=\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big),\tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{ij}^l}\mathrm{E}[\max\{0,\tilde{d}_{ij}^l\}-q_{ij}^l]=\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big)-1.\tag{17}$$

利用式 (15)~(17), 可得 $\partial^2\pi_j(Q)/\partial(q_{ij}^l)^2\leqslant 0$. $\Box$

由定理 2 可知 $\mathrm{E}[P_j(Q)]$ 为 q_{ij}^l 的凹函数, 那么所有零售商的最优行为可用以下变分不等式描述: 确定 $Q^*\in R_+^{mnL}$, 使得

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big\{\lambda_{ij}^{l+}\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)-(\lambda_{ij}^{l-}+$$
$$\rho_{2ij}^{l*})\Big[1-\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)\Big]+\frac{\partial c_j^l(Q^*)}{\partial(q_{ij}^l)}+\rho_{1ij}^l\Big\}\times$$
$$[(q_{ij}^l)-(q_{ij}^{l*})]\geqslant 0,\ \forall Q\in R_+^{mnL}.\tag{18}$$

不等式 (18) 表明: 当零售商 j 的批发价格 ρ_{1ij}^l, 边际展销成本 $\partial c_j^l(Q^*)/\partial(q_{ij}^l)$ 以及期望存货费用 $\lambda_{ij}^{l+}\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)$ 之和大于 $\Big[1-\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)\Big](\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^{l*})$ 时, 零售商 j 不从制造商 i 处订购产品 l, 即 $q_{ij}^{l*}=0$; 否则 $q_{ij}^{l*}>0$.

2.3 需求市场均衡模型

下面讨论需求市场的均衡条件. 类似空间价格均衡的随机均衡条件[15-17], 本文给出模糊需求的市场均衡条件, 即

$$\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^{l*})]\begin{cases}\leqslant q_{ij}^{l*},\ \rho_{2ij}^{l*}=0;\\=q_{ij}^{l*},\ \rho_{2ij}^{l*}>0.\end{cases}\tag{19}$$

事实上, 上述模糊需求的市场均衡条件等价于如下变分不等式: 确定 $\rho_{2ij}^{l*}\geqslant 0$, 使得

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L[q_{ij}^{l*}-\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^{l*})]]\times$$
$$[\rho_{2ij}^l-\rho_{2ij}^{l*}]\geqslant 0,\ \forall\rho_2\in R_+^{mnL}.\tag{20}$$

上式表明: 消费者愿意以 $\rho_{2ij}^{l*}>0$ 的价格从零售商 j 处购买制造商 i 生产的产品 l, 零售商 j 处对制造商 i 的产品 l 的需求量等于零售商 j 从制造商 i 采购的产品 l 的量. 零售商 j 从制造商 i 采购产品 l 的数量大于市场需求时, 零售商 j 处产品 l 的销售价格 $\rho_{2ij}^{l*}=0$.

2.4 供应链网络均衡模型

供应链网络均衡是指: 网络中的产品交易量和价格同时满足制造商和零售商的最优行为, 以及需求市场均衡条件, 即供应链网络均衡条件为变分不等式 (2), (18) 和 (20) 的三者之和:

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big\{\frac{\partial f_i^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l*})}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_j^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+$$
$$\lambda_{ij}^{l+}\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)-(\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^{l*})\Big[1-\Phi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)\Big]\Big\}\times$$
$$[(q_{ij}^l)-(q_{ij}^{l*})]+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L[q_{ij}^{l*}-\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^{l*})]]\times$$
$$[\rho_{2ij}^l-\rho_{2ij}^{l*}]\geqslant 0,\ \forall(Q,\rho_2)\in K=R_+^{mnL+mnL}.\tag{21}$$

上式表明: 在网络均衡状态下制造商与零售商间的产品交易量等于零售商愿意从制造商处获得的产品量, 零售商的产品销售价格等于消费者愿意为购买产品所支付的价格.

因为制造商与零售商间的交易价格为内生变量, 所以在网络均衡状态下, 从制造商角度 (如式 (2)) 看: 若制造商 i 和零售商 j 发生交易, 则其间关于产品 l 的最优交易价格满足

$$\rho_{1ij}^{l*}=\frac{\partial f_i^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l*})}{\partial q_{ij}^l};$$

从零售商角度 (如式 (18)) 来看: 若发生交易, 则最优交易价格亦满足

$$\rho_{1ij}^{l*}=(\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^{l*})\Big[1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)\Big]-\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)-\frac{\partial c_j^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}.$$

3 变分不等式解的存在性和唯一性

本节讨论变分不等式 (21) 解的存在性和唯一性. 记

$$\sigma_r=\{(Q,\rho_2)|0\leqslant Q\leqslant r_1,\ 0\leqslant \rho_2\leqslant r_2\},$$
$$K_r=K\bigcap\sigma_r.$$

显然 K_r 为 $R_+^{mnL+mnL}$ 空间中有界闭凸集. 由变分不等式理论[18]可知, 下面的变分不等式至少存在一解 $(Q^*,\rho_2^*)\in K_r$.

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big\{\frac{\partial f_i^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l*})}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_j^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)-(\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^{l*})\Big[1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)\Big]\Big\}\times[(q_{ij}^l)-(q_{ij}^{l*})]+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\{q_{ij}^{l*}-\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^{l*})]\}\times[\rho_{2ij}^l-\rho_{2ij}^{l*}]\geqslant 0,\ \forall(Q,\rho_2)\in K_r. \tag{22}$$

定理 3 变分不等式 (21) 存在解 (Q^*,ρ_2^*), 当且仅当存在正数 $r_1>0$, $r_2>0$, 使得变分不等式 (22) 有解 $(Q^*,\rho_2^*)\in K_r$, 且满足 $Q^*\leqslant r_1$, $\rho_2^*\leqslant r_2$.

根据定理 3, 判断变分不等式 (21) 是否存在解便转化为寻找满足定理 3 要求的变分不等式 (22) 的解 $(Q^*,\rho_2^*)\in K_r$ 所应具有的条件. 下面的定理给出了该条件.

定理 4 若存在正数 M, N, R 且 $R>M$, 使得以下条件成立:

$$\frac{\partial f_i^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l*})}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_j^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)-(\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^{l*})\Big[1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)\Big]>R,\ \forall q_{ij}^l\geqslant N; \tag{23}$$

$$\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^{l*})]<N,\ \forall\rho_{2ij}^{l*}\geqslant M. \tag{24}$$

则变分不等式 (21) 存在解.

证明 令 $r_1=r>N$, $r_2>N_1$, 其中

$$N_1=\max_{Q\leqslant r,\rho_2\leqslant r_2}\frac{\partial f_i^l(Q^*)}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_{ij}^l q_{ij}^{l*}}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_j^l(Q^*)}{\partial (q_{ij}^l)}+\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)-(\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^{l*})\times\Big[1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l*}}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^{l*}\Big)\Big]>R. \tag{25}$$

根据定理 3, 只要证明式 (22) 在 K_r 上的解满足 $Q^*<r_1=r$, $\rho_2^*<r_2$, 则式 (21) 存在解. 为此, 首先证明 $Q^*<r$. 假设存在供需对 (m,n,k) 使 $q_{mn}^{k*}=r>N$, 则根据式 (22) 可得

$$\frac{\partial f_m^k(Q^*)}{\partial q_{mn}^k}+\frac{\partial c_{mn}^k(q_{mn}^{k*})}{\partial q_{mn}^k}+\frac{\partial c_n^k(Q^*)}{\partial q_{mn}^k}+\lambda_{mn}^{k+}\varPhi_n^k\Big(\frac{q_{mn}^{k*}}{w_{mn}^k};\bar{\rho}_{2n}^{k*}\Big)-(\lambda_{mn}^{k-}+\rho_{2mn}^{k*})\times\Big[1-\varPhi_n^k\Big(\frac{q_{mn}^{k*}}{w_{mn}^k};\bar{\rho}_{2n}^{k*}\Big)\Big]\leqslant 0,$$

与式 (23) 矛盾. 换言之, q_{ij}^{l*} 应满足 $q_{ij}^{l*}<r$.

下面证明 $\rho_{2ij}^{l*}<r_2$. 假设存在 (m,n,k) 使

$$\rho_{2mn}^{k*}=r_2>N_1,$$

则根据式 (20) 可得 $q_{mn}^{k*}-\mathrm{E}[\tilde{d}_{mn}^k(\bar{\rho}_{2n}^{k*})]\leqslant 0$.

进一步, 由式 (23), 即 $\forall q_{ij}^l\geqslant N$, 可得

$$\mathrm{E}[\tilde{d}_{mn}^k(\bar{\rho}_{2n}^{k*})]\geqslant q_{mn}^{k*}\geqslant N. \tag{26}$$

式 (24) 表明: 当 $\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]\geqslant N$ 时, $\rho_{2ij}^l<M$. 因此, 式 (26) 隐含着 $\rho_{2ij}^{l*}<M$.

由式 (25) 定义的 N_1, 式 (24) 及假设 $r_2>N_1$, 可得 $\rho_{2ij}^{l*}<M<R<N_1<r_2$, 与假设条件 $\rho_{2ij}^{l*}=r_2>N_1$ 矛盾. 因此 $\rho_{2ij}^{l*}<r_2$. □

定理 4 中的条件是合理的, 因为当制造商 i 和零售商 j 之间关于产品 l 的交易量 q_{ij}^{l*} 较大时, 可预期相应的边际生产、运输和展销费用的和大于某一特定的正实数 R. 同时, 当交易量 q_{ij}^{l*} 较大时, 零售商 j 处关于产品 l 的模糊需求的可信性分布 $\varPhi_j^l(q_{ij}^{l*}/w_{ij}^l;\bar{\rho}_{2j}^{l*})$ 趋近于 1. 那么, 此时式 (23) 左边的最后两项的和是一个正数. 因此, 式 (23) 的左边有下界 R 是一个合理的假设. 再者, 根据经济学的需求关系, 当产品 l 在零售商 j 处的售价 ρ_{2ij}^{l*} 过高时, 例如 $\rho_{2ij}^{l*}>M$, 可预见该处对产品 l 的需求量较小. 由此假设式 (24) 也符合一般的经济规律.

下面分析变分不等式 (21) 存在唯一解的条件. 令

$$F_1(Q,\rho_2)=\Big\{\frac{\partial f_i^l(Q)}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^l)}{\partial q_{ij}^l}+\frac{\partial c_j^l(Q)}{\partial q_{ij}^l}+\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l(q_{ij}^l/w_{ij}^l;\bar{\rho}_{2j}^l)-(\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^l)\times[1-\varPhi_j^l(q_{ij}^l/w_{ij}^l;\bar{\rho}_{2j}^l)]\Big\}\in R_+^{mnL},$$

$$F_2(Q,\rho_2)=\{q_{ij}^l-\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^l)\}\in R_+^{mnL},$$
$$F(Q,\rho_2)=(F_1,F_2)\in R_+^{mnL+mnL}.$$

利用上述记号, 变分不等式 (21) 可简化为

$$F(Q^*,\rho_2^*)\times(Q-Q^*,\rho_2-\rho_2^*)^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\ \forall(Q,\rho_2)\in K. \tag{27}$$

通过分析, 若 $F(Q,\rho_2)$ 严格单调, 则变分不等式 (27) 存在唯一解. 将 $F(Q,\rho_2)$ 中的下列项记为

$$g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)=\Big(\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big)-(\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^l)\Big[1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big)\Big]q_{ij}^l-\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]\Big)^{\mathrm{T}}.$$

下面定理给出了向量函数 $g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)$ 为 q_{ij}^l 和 ρ_{2ij}^l 的单调函数的充要条件.

定理 5 $g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)$ 为 q_{ij}^l 和 ρ_{2ij}^l 的单调函数, 当且仅当

$$\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]/\mathrm{d}\rho_{2ij}^l\leqslant -\Bigg(4\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big)}{\partial q_{ij}^l}\Bigg)^{-1}\Bigg[\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big)+\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big)}{\partial q_{ij}^l}\Bigg]^2,$$

其中 $\alpha=\lambda_{ij}^{l+}+\lambda_{ij}^{l-}+\rho_{2ij}^l$.

证明 $g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)$ 为 q_{ij}^l 和 ρ_{2ij}^l 的单调函数等价于其雅可比矩阵为半正定阵. 为符号简便起见, 将 $\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^l}{w_{ij}^l};\bar{\rho}_{2j}^l\Big)$, $\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^l)]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}$ 简记为 $\varPhi_j^l$ 和 $\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}$, 则有

$$\nabla g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)=\begin{bmatrix}\alpha\dfrac{\partial\varPhi_j^l}{\partial\rho_{2ij}^l} & -1+\varPhi_j^l+\alpha\dfrac{\partial\varPhi_j^l}{\partial\rho_{2ij}^l}\\ 1 & \mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]/\mathrm{d}\rho_{2ij}^l\end{bmatrix}.$$

那么矩阵 $\frac{1}{2}[\nabla g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)+\nabla^{\mathrm{T}}g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)]$ 的特征值为

$$v(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)=\frac{1}{2}\Bigg[\Big(\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial\rho_{2ij}^l}-\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}\Big)\pm\Bigg(\Big(\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial\rho_{2ij}^l}-\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}\Big)^2+\Big(\varPhi_j^l+\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial\rho_{2ij}^l}\Big)^2+4\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial\rho_{2ij}^l}\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}\Bigg)^{1/2}\Bigg]. \tag{28}$$

首先证明必要性, 即 $g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)$ 关于 q_{ij}^l 和 ρ_{2ij}^l 是单调函数, 即 $v(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)\leqslant 0$, 经整理可得

$$\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}\leqslant-\Big(4\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big)^{-1}\Big[\varPhi_j^l+\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big]^2.$$

再证明充分性. 当

$$\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}\leqslant-\Big(4\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big)^{-1}\Big[\varPhi_j^l+\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big]^2$$

时, 将此条件代入式 (28), 进一步化简可得 $v(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)\geqslant 0$. □

根据定理 5, 容易获得变分不等式 (27) 中向量函数 F 的单调性条件.

定理 6 若对于任意 i,j 和 l, 生产成本 f_i^l, 交易费用 c_{ij}^l 以及展销广告费用 c_j^l 为 q_{ij}^l 的连续可微凸函数, 且

$$\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}\leqslant-\Big(4\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big)^{-1}\Big[\varPhi_j^l+\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big]^2,$$

则向量函数 $F(Q,\rho_2)$ 是单调的, 即

$$[F(Q',\rho_2')-F(Q'',\rho_2'')]\times(Q'-Q'',\rho_2'-\rho_2'')^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\quad \forall(Q,\rho_2)\in K.$$

证明 将

$$[F(Q',\rho_2')-F(Q'',\rho_2'')]\times(Q'-Q'',\rho_2'-\rho_2'')^{\mathrm{T}}$$

展开, 有

$$\begin{aligned}&[F(Q',\rho_2')-F(Q'',\rho_2'')]\times(Q'-Q'',\rho_2'-\rho_2'')^{\mathrm{T}}=\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big[\frac{\partial f_i^l(Q')}{\partial q_{ij}^l}-\frac{\partial f_i^l(Q'')}{\partial q_{ij}^l}\Big]\times[q_{ij}^{l'}-q_{ij}^{l''}]+\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big[\frac{\partial c_j^l(Q')}{\partial q_{ij}^l}-\frac{\partial c_j^l(Q'')}{\partial q_{ij}^l}\Big]\times[q_{ij}^{l'}-q_{ij}^{l''}]+\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big[\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l'})}{\partial q_{ij}^l}-\frac{\partial c_{ij}^l(q_{ij}^{l''})}{\partial q_{ij}^l}\Big]\times[q_{ij}^{l'}-q_{ij}^{l''}]+\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big[\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l'}}{w_{ij}^{l'}};\bar{\rho}_{2j}^{l'}\Big)-\lambda_{ij}^{l+}\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l''}}{w_{ij}^{l''}};\bar{\rho}_{2j}^{l''}\Big)\Big]\times\\&[q_{ij}^{l'}-q_{ij}^{l''}]+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big[-\lambda_{ij}^{l-}\Big(1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l'}}{w_{ij}^{l'}};\bar{\rho}_{2j}^{l'}\Big)\Big)+\\&\lambda_{ij}^{l-}\Big(1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l''}}{w_{ij}^{l''}};\bar{\rho}_{2j}^{l''}\Big)\Big)\Big]\times[q_{ij}^{l'}-q_{ij}^{l''}]+\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L\Big[-\rho_{2ij}^{l'}\Big(1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l'}}{w_{ij}^{l'}};\bar{\rho}_{2j}^{l'}\Big)\Big)+\\&\rho_{2ij}^{l''}\Big(1-\varPhi_j^l\Big(\frac{q_{ij}^{l''}}{w_{ij}^{l''}};\bar{\rho}_{2j}^{l''}\Big)\Big)\Big]\times[q_{ij}^{l'}-q_{ij}^{l''}]+\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^L[q_{ij}^{l'}-\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^{l'})]-q_{ij}^{l''}+\\&\mathrm{E}[\tilde{d}_{ij}^l(\bar{\rho}_{2j}^{l''})]]\times[\rho_{2ij}^{l'}-\rho_{2ij}^{l''}]=\\&(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7).\end{aligned}$$

因为 f_i^l, c_{ij}^l 以及 c_j^l 为 q_{ij}^l 的连续可微凸函数, 所以上式中的 (1), (2), (3) 分别大于零.

另外, 当

$$\frac{\mathrm{dE}[\tilde{d}_{ij}^l]}{\mathrm{d}\rho_{2ij}^l}\leqslant-\Big(4\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big)^{-1}\Big[\varPhi_j^l+\alpha\frac{\partial\varPhi_j^l}{\partial q_{ij}^l}\Big]^2$$

时, 由定理 5 可知, $g_{ij}^l(q_{ij}^l,\rho_{2ij}^l)$ 为 q_{ij}^l 和 ρ_{2ij}^l 的单调函

数. 由此可得, 上式中的 (4) + (5) + (6) + (7) ⩾ 0. □

引理 1[19]　若 F 为凸集 K 上的严格单调向量函数, 则变分不等式 $x^* \in K: F(x^*)(x-x^*) \geqslant 0 (\forall x \in K)$ 至多存在一解.

结合引理1和定理4, 可得变分不等式 (21) 存在唯一解的条件.

定理 7　若生产成本 f_i^l, 交易费用 c_{ij}^l 以及展销广告费用 c_j^l 为 q_{ij}^l 的连续可微凸函数, 且其中至少有一个为 q_{ij}^l 的严格凸函数, 则变分不等式 (21) 存在唯一解.

4　数值算例

考虑由 2 个制造商和 2 个零售商构成的供应链网络, 生产和销售 2 种差异产品. 具体参数如下:

制造商的生产成本函数为

$$f_1^1(Q) = 0.5(q_1)^2 + q_1 q_2 + 2q_1,$$

$$f_1^2(Q) = 3(q_1)^2 + q_1 q_2 + 2q_1,$$

$$f_2^1(Q) = 2.5(q_2)^2 + q_1 q_2 + 2q_2,$$

$$f_2^2(Q) = 3(q_2)^2 + q_1 q_2 + 2q_2.$$

其中

$$q_1 = q_{11}^1 + q_{12}^1 + q_{11}^2 + q_{12}^2,\ q_2 = q_{21}^1 + q_{22}^1 + q_{21}^2 + q_{22}^2.$$

制造商与零售商间的交易费用函数为

$$c_{11}^1(q_{11}^1) = 0.5(q_{11}^1)^2 + 3.5q_{11}^1,$$

$$c_{11}^2(q_{11}^2) = (q_{11}^2)^2 + 3q_{11}^2,$$

$$c_{12}^1(q_{12}^1) = 0.5(q_{12}^1)^2 + 3.5q_{12}^1,$$

$$c_{11}^2(q_{12}^2) = (q_{12}^2)^2 + 3q_{12}^2,$$

$$c_{21}^1(q_{21}^1) = 0.5(q_{21}^1)^2 + 3.5q_{21}^1,$$

$$c_{21}^2(q_{21}^2) = (q_{21}^2)^2 + 3q_{21}^2,$$

$$c_{22}^1(q_{22}^1) = 0.5(q_{22}^1)^2 + 3.5q_{22}^1,$$

$$c_{22}^2(q_{22}^2) = (q_{22}^2)^2 + 3q_{22}^2.$$

零售商的处理费用函数为

$$c_1^1(Q) = c_1^2(Q) = \Big(\sum_{i=1}^2\sum_{l=1}^2 q_{i1}^l\Big)^2 + 0.5\Big(\sum_{i=1}^2\sum_{l=1}^2 q_{i2}^l\Big)^2,$$

$$c_2^1(Q) = c_2^2(Q) = 0.5\Big(\sum_{i=1}^2\sum_{l=1}^2 q_{i1}^l\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^2\sum_{l=1}^2 q_{i2}^l\Big)^2.$$

零售商处的存储和缺货费用 $\lambda_{ij}^{l+} = \lambda_{ij}^{l-} = 1, i = 1,2, j = 1,2, l = 1,2$, 成本与效用的转化系数 $\theta = 0.1$. 设零售商 j 处产品 l 的市场需求为三角形模糊变量

$$\tilde{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l) = \Big[\frac{b_j^l}{\bar{\rho}_{2j}^l} - \underline{\varDelta}_j^l, \frac{b_j^l}{\bar{\rho}_{2j}^l}, \frac{b_j^l}{\bar{\rho}_{2j}^l} + \bar{\varDelta}_j^l\Big],$$

$$j = 1,2,\ l = 1,2,$$

即模糊变量 $\tilde{d}_j^l(\bar{\rho}_{2j}^l)$ 的可信性分布及期望为

$$\varPhi_j^l(x;\bar{\rho}_{2j}^l) = \begin{cases} 0,\ x < b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l - \underline{\varDelta}_j^l; \\ (1/2\underline{\varDelta}_j^l)(x + \underline{\varDelta}_j^l - b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l), \\ \quad b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l - \underline{\varDelta}_j^l \leqslant x \leqslant b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l; \\ (1/2\bar{\varDelta}_j^l)(x + \bar{\varDelta}_j^l - b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l), \\ \quad b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l < x \leqslant b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l + \bar{\varDelta}_j^l; \\ 1,\ x > b_j^l/\bar{\rho}_{2j}^l + \bar{\varDelta}_j^l. \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[\tilde{d}_j^l] = \frac{b_j^l}{\bar{\rho}_{2j}^l} + \frac{\bar{\varDelta}_j^l - \underline{\varDelta}_j^l}{4}.$$

其中 $b_j^l = 5$.

利用变分不等式的投影算法[20], 以两次迭代结果差的绝对值小于等于 10^{-8} 作为算法的收敛准则. 首先, 考虑确定性市场需求下的供应链网络均衡, 即 $\underline{\varDelta}_j^l = \bar{\varDelta}_j^l = 0$, $j = 1,2$, $l = 1,2$. 通过计算得到的制造商和零售商间的交易量, 制造商的批发价格和零售商的销售价格分别为: $q_{11}^{1*} = q_{12}^{1*} = 0.2891$, $q_{21}^{1*} = q_{22}^{1*} = 0.1654$, $q_{11}^{2*} = q_{12}^{2*} = 0.1931$, $q_{21}^{2*} = q_{22}^{2*} = 0.1781$, $\rho_{111}^{1*} = \rho_{112}^{1*} = 7.4405$, $\rho_{121}^{1*} = \rho_{122}^{1*} = 11.5268$, $\rho_{111}^{2*} = \rho_{112}^{2*} = 10.3145$, $\rho_{121}^{2*} = \rho_{122}^{2*} = 10.7200$, $\rho_{211}^{1*} = \rho_{212}^{1*} = 8.0923$, $\rho_{221}^{1*} = \rho_{222}^{1*} = 12.1797$, $\rho_{211}^{2*} = \rho_{212}^{2*} = 10.9669$, $\rho_{221}^{2*} = \rho_{222}^{2*} = 11.3727$.

结果表明: 对于产品 1 而言, 由于制造商 1 的单位生产成本小于制造商 2, 制造商 1 的生产量较制造商 2 多, 且其批发价格较制造商 2 低, 进而零售商以较低的价格销售制造商 1 的产品. 对于产品 2 而言, 虽然两个制造商的成本函数一致, 但本文考虑到生产成本除受到同类产品产量影响外, 还受到其他产品产量的影响, 因此两个制造商有关产品 2 的生产量不一致. 此外, 由于消费者偏好不同, 在随机选择同种产品时, 即使具有不同的销售价格, 也能同时拥有市场份额.

进一步, 考虑当零售商面对的需求市场存在模糊不确定性时, 取: $\underline{\varDelta}_1^1 = 0.5$, $\bar{\varDelta}_1^1 = 0.6$, $\underline{\varDelta}_1^2 = \bar{\varDelta}_1^2 = 0.5$, $\underline{\varDelta}_2^1 = \bar{\varDelta}_2^1 = 0.5$, $\underline{\varDelta}_2^2 = \bar{\varDelta}_2^2 = 0.5$. 均衡解为: $q_{11}^{1*} = 0.1647$, $q_{12}^{1*} = 0.1615$, $q_{21}^{1*} = 0.1166$, $q_{22}^{1*} = 0.1145$, $q_{11}^{2*} = 0.1078$, $q_{12}^{2*} = 0.1080$, $q_{21}^{2*} = 0.1161$, $q_{22}^{2*} = 0.1162$, $\rho_{111}^{1*} = 6.6700$, $\rho_{112}^{1*} = 6.6669$, $\rho_{121}^{1*} = 8.4758$, $\rho_{122}^{1*} = 8.4736$, $\rho_{111}^{2*} = 8.9306$, $\rho_{112}^{2*} = 8.9310$, $\rho_{121}^{2*} = 8.5547$, $\rho_{122}^{2*} = 8.5551$, $\rho_{211}^{1*} = 14.5271$, $\rho_{212}^{1*} = 13.9353$, $\rho_{221}^{1*} = 16.6516$, $\rho_{222}^{1*} = 16.0810$, $\rho_{211}^{2*} = 16.8560$, $\rho_{212}^{2*} = 16.8451$, $\rho_{221}^{2*} = 16.4326$, $\rho_{222}^{2*} = 16.4213$.

结果表明: 当需求市场具有模糊不确定性时, 零售商的产品采购量大幅下降, 这是由于相比缺货惩罚, 发生存货时的成本更高 (存货惩罚加上采购成本等). 当市场不明朗时, 零售商一边通过降低采购量, 另一方面通过提高售价维持自身收益. 制造商为了刺激零售商的订购量, 均降低了批发价格, 以此来分担零售商所面对的模糊需求风险. 进一步考虑产品 1 的

交易量, 因为市场 1 的期望需求高于市场 2, 所以制造商 1 和制造商 2 调往市场 1 的产量大于市场 2. 而对于产品 2 而言, 尽管它在 2 个市场的期望需求均保持不变, 但当面对不确定性需求时, 零售商仍选择了通过降低产品采购量来抵御风险.

5 结 论

本文研究了由多个相互竞争的制造商与多个相互竞争的零售商组成, 且零售商处面临着模糊市场需求的存在差异性的多商品供应链网络均衡问题. 为了表达消费者的个性化偏好, 利用随机效用理论的 logit 模型, 对消费者的随机选择行为进行了刻画. 为了获得零售商的期望利润表达式, 利用模糊事件的可信性测度理论, 推演了零售商的模糊利润期望表达式. 借助有限维变分不等式理论, 描述了制造商和零售商的决策行为以及模糊需求市场的消费者行为. 基于各决策者的决策行为, 从供应链整体网络的角度, 构建了具有模糊需求的多商品供应链网络均衡状态满足的变分不等式. 详细地分析了供应链网络均衡解的存在性和唯一性. 最后, 结合算例分析了需求模糊性对供应链均衡的影响.

参考文献(References)

[1] Nagurney A, Dong J, Zhang D. A supply chain network equilibrium model[J]. Transportation Research, Part E, 2002, 38(5): 281-303.

[2] Dong J, Zhang D, Nagurney A. A supply chain network equilibrium model with random demand[J]. European J of Operational Research, 2004, 156(1): 194-212.

[3] 张铁柱, 刘志勇, 滕春贤, 等. 多商品流供应链网络均衡模型的研究[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(7): 61-66.
(Zhang T Z, Liu Z Y, Teng C X, et al. A multi-commodity flow supply chain networl equilibrium model[J]. Systems Engineering–Theory & Practice, 2005, 25(7): 61-66.)

[4] 滕春贤, 姚锋敏, 胡宪武. 具有随机需求的多商品流供应链网络均衡模型研究[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(10): 77-83.
(Teng C X, Yao F M, Hu X W. Study on multi-commodity flow supply chain network equilibrium model with random demand[J]. Systems Engineering–Theory & Practice, 2007, 27(10): 77-83.)

[5] 徐兵, 朱道立. 产品随机选择下多商品流供应链网络均衡模型研究[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(3): 82-90.
(Xu B, Zhu D L. A multi-commodity flow supply chain network equilibrium model with stochastic choice[J]. Systems Engineering–Theory & Practice, 2007, 27(3): 82-90.)

[6] 陈兆波, 滕春贤, 姚锋敏. 具有随机需求的多种差异产品供应链网络均衡模型研究[J]. 经济数学, 2008, 25(3): 271-276.
(Chen Z B, Teng C X. Study on multi-differentiated product supply chain network equilibrium model with random demand[J]. Mathematics in Economics, 2008, 25(3): 271-276.)

[7] Zadeh L. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[8] Zadeh L. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1): 3-28.

[9] Liu B D. Theory and practice of uncertain programming[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002: 57-69.

[10] Xu R N, Zhai X Y. Analysis of supply chain coordination under fuzzy demand in a two-stage supply chain[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(1): 129-139.

[11] Wang J, Zhao R, Tang W. Supply-chain coordination by revenue-sharing contract with fuzzy demand[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2008, 19 (6): 409-420.

[12] 桑圣举, 张强, 武建章. 模糊需求环境下供应链成员间的协调机制分析[J]. 计算机制造集成系统, 2010, 16(2): 356-364.
(Sang S J, Zhang Q, Wu J Z. Coordination mechanism analysis for supply chain with fuzzy demand[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2010, 16(2): 356-364.)

[13] Ben-Akiva M, Lerman S. Discrete choice analysis: Theory and application to travel demand[M]. Cambridge: MIT Press, 1985: 100-106.

[14] Liu B D, Liu Y K. Excepted value of fuzzy variable and fuzzy expected value models[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(4): 445-450.

[15] Samuelson P. Spatial price equilibrium and linear programming[J]. The American Economic Review, 1952, 42(3): 283-303.

[16] Takayama T, Judge G G. Spatial and temporal price and allocation models[M]. Amsterdam: North-Holland, 1971.

[17] Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[18] Kinderlehrer D, Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications[M]. New York: Academic Press, 1980: 12.

[19] Harker P, Pang J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarily problems: A survey of theory, algorithms and applications[J]. Mathematical Programming, 1990, 48(1-3): 161-220.

[20] Korpelevich G. The extragradient method for finding saddle points and other problems[J]. Matekon, 1977, 13(1): 35-49.