

文章编号: 1001-0920(2012)06-0909-05

基于指数趋近律的非奇异 Terminal 滑模控制

张巍巍, 王京

(北京科技大学 高效轧制国家工程研究中心, 北京 100083)

摘要: 针对一类二阶非线性不确定系统, 分析了传统 Terminal 滑模控制的奇异问题和 Terminal 滑模控制的调整时间问题. 为改善到达滑模面的速度, 结合趋近律思想, 提出了基于指数趋近律的非奇异 Terminal 滑模控制器的设计方法和两种新的控制律, 在克服奇异问题的基础上提高了系统的收敛速度, 缩短了调整时间. 仿真结果表明, 所设计的控制律可使系统在较短时间内收敛到平衡点, 表明了该方法的有效性.

关键词: Terminal 滑模; 指数趋近律; 奇异问题; 调整时间

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Nonsingular Terminal sliding model control based on exponential reaching law

ZHANG Wei-wei, WANG Jing

(National Engineer Research Center of Advanced Rolling, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China. Correspondent: ZHANG Wei-wei, E-mail: zhv2008@gmail.com)

Abstract: Singular problem and adjustment time problem of traditional Terminal sliding mode control are considered for second order nonlinear system with uncertainty. The reaching law is used to improve the convergence rate of reaching the sliding surface. Non-singular Terminal sliding mode control method based on exponential reaching law and two controllers are proposed in this paper. The singular problem is avoided and the convergence rate is improved. Simulation results show that the system converges to the equilibrium in a short time by the designed controller, and also show the effective of the proposed method.

Key words: Terminal sliding mode; exponential reaching law; singular problem; adjustment time

1 引言

滑模变结构控制以其理想的鲁棒性能引起了控制界的极大关注^[1-2]. 滑模控制器输出的不连续的高频切换信号, 使闭环系统的运动可达到预先选定的滑模面或其一个领域上, 通过控制器结构的改变使得系统具有良好的动态性能. 一般情况下, 选择的线性滑模面可使系统轨迹在到达滑动模态后的运动是渐近稳定的, 也可通过控制器参数的调节来控制渐近稳定的速度, 但无论如何, 状态跟踪误差不会在有限时间内收敛到零^[3].

近些年发展起来的有限时间机理理论引起了学者的关注. 为使系统的状态在“有限时间”内收敛到平衡点, 将神经网络中的 Terminal 吸引子^[4]概念引入滑模面设计中, 即在滑模面中适当地引入非线性项会给

系统带来更好的性能响应. 文献[5-6]首先分析和研究了 Terminal 滑模(TSM)的设计问题, 针对 MIMO 系统、不确定系统和高阶非线性系统的 Terminal 滑模控制问题展开了研究^[7-9]. [10]指出了 Terminal 滑模控制中容易出现的奇异问题. 对此, Feng 等人^[11]提出了一种克服奇异问题的 Terminal 滑模面设计方法, 在避免奇异问题的基础上, 提出了非奇异 Terminal 滑模(NTSM)控制方法以进一步改善控制性能. [12-13]提出一种非奇异快速终端滑模控制并应用于跟车控制. [14-16]利用自适应控制与 Terminal 滑模控制相结合, 通过反演算法求解, 抑制了非匹配扰动对系统的影响. 但 Terminal 滑模仍存在自身的缺点, 如非线性函数的引入使得控制器在实际工程中实现困难; 参数选取不当会导致奇异问题; 在稳态情况下会产生较大的控制

收稿日期: 2010-11-29; 修回日期: 2011-03-21.

基金项目: 国家863计划项目(2009AA04Z163).

作者简介: 张巍巍(1983—), 男, 博士, 从事非线性控制理论的研究; 王京(1948—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制理论等研究.

信号^[3]. 为了防止抖振和控制信号过大的问题, 控制器参数的选取应与系统的动态性能之间折衷, 从而使系统的收敛速度和调整时间受到限制.

本文针对一类二阶非线性不确定系统, 分析了传统奇异问题和调整时间, 指出对于 Terminal 滑模, 为了防止抖振和稳态时控制信号过大, 系统在到达滑模面和接近平衡态时的收敛速度都受到限制. 为此, 结合趋近律思想, 为改善到达滑模面的速度, 提出一种基于趋近律的非奇异 Terminal 滑动模态控制器的设计方法, 控制器参数满足一定条件时避免了奇异问题, 求取控制律时采用指数趋近律. 在克服奇异问题的基础上提高了趋近滑模面的速度, 缩短了调整时间.

2 Terminal 滑模控制

对于二阶不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 为系统的状态变量; $f(\mathbf{x})$ 和 $b(\mathbf{x}) \neq 0$ 且为 \mathbf{x} 的光滑非线性函数; $g(\mathbf{x})$ 为不确定性及干扰且满足 $\|g(\mathbf{x})\| \leq l_g, l_g > 0$; u 为控制输入.

传统的 TSM 的切换函数为

$$s = x_2 + \beta x_1^{q/p}. \quad (2)$$

其中: $\beta > 0$, p 和 $q (p > q)$ 为正奇数. 控制器设计为

$$u = -b^{-1}(\mathbf{x}) \left[f(\mathbf{x}) + \beta \frac{q}{p} x_1^{q/p-1} x_2 + (l_g + \eta) \text{sgn}(s) \right], \quad (3)$$

其中 $\eta > 0$.

可以看出, 由于上式中含有 $x_1^{q/p-1} x_2$ 项, 在 $x_1 = 0, x_2 \neq 0$ 时会有奇异问题^[10]. 当 $s = 0$ 时, 即在理想滑模面上, 有 $x_2 = -\beta x_1^{q/p}, x_1^{q/p-1} x_2 = -\beta x_1^{2q/p-1}$, 只要规定 $1 < p/q < 2$ 即可避免奇异问题. 但是当 $s \neq 0$, 即到达 Terminal 滑模面阶段, $x_1 = 0$ 时, $x_2 = s \neq 0$. 在控制率 (3) 下, 系统在到达 Terminal 滑模面 $s = 0$ 之前并不能确保 $x_1 = 0$ 和 $x_2 \neq 0$ 的情况不出现, 一旦出现, 便会发生奇异问题. 更进一步, 由于不确定因素和计算误差, 奇异问题也可能发生在系统到达 Terminal 滑模面之后, 特别在平衡点 ($x_1 = 0, x_2 = 0$) 附近奇异问题会不时发生, 因此, 解决奇异问题对 Terminal 滑模控制非常重要. 对此, Wu 等人^[8]提出了避免奇异问题的思想. 文献 [12-13] 针对二阶不确定非线性系统, 提出一种非奇异、时间连续且具有快速收敛特性的终端滑模控制方法, 构造了带状态高次项的非奇异快速终端滑模函数并引入了带状态负指数项的终端吸引子. 文献 [17] 提出了一种非奇异滑模方法, 使滑动阶段的状态有限时间收敛且控制律无负指数项. 但是该 NTSM 在远离平衡点的区域收敛速度较慢, 与全局到达条件相结合所设计的单位向量控制律,

不可避免地存在“抖振”问题, 因而限制了该方法的实际应用.

传统的 TSM 除了存在奇异问题, 到达滑模面和到达之后趋于平衡态时的收敛速度也受到限制. 对形如式 (1) 的系统, 到达滑模面的时间为 $t_r \leq |s_0|/\eta$, 其中 s_0 为初始时刻 s 的值. 到达滑模面之后趋于零平衡点的时间为 $t_c = \frac{p}{\beta(p-q)} |x_1(t_r)|^{1-q/p}$.

由于 Terminal 滑模控制中引入了非线性部分, 使得滑模面上跟踪误差能在有限时间内收敛到零, 但是 Terminal 滑模控制的调整时间却受到限制. 对此, 文献 [12, 18] 分别提出了不同的快速 Terminal 滑动模态, 改善了传统 Terminal 滑模控制在系统接近平衡态时的收敛速度, 使得系统状态到平衡态的时间可以通过参数调整. 本文结合文献 [19] 提出的趋近律思想, 设计控制器时采用指数趋近律的形式, 以改善趋近滑模面的速度.

3 基于趋近律的 Terminal 滑模控制

为克服 Terminal 滑模的奇异问题, 可设计切换函数为

$$s = x_1 + \frac{1}{\beta} x_2^{p/q}. \quad (4)$$

其中: $\beta > 0$, p 和 $q (p > q)$ 为正奇数, 且 $1 < p/q < 2$.

采用式 (4) 形式的切换函数, 在 $s = 0$ 时上式相当于式 (2). 系统到达平衡点的调整时间与传统滑模面是相同的. 可以证明, 由式 (4) 得到的控制量中不会出现负幂次方^[11], 从而避免了奇异问题. 控制律的求解过程如下:

s 沿解的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}_1 + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} \dot{x}_2 = x_2 + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} \dot{x}_2 = \\ &= x_2 + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u). \end{aligned}$$

取指数趋近律

$$\dot{s} = -ks - \varepsilon \text{sgn}(s), \quad k > 0, \varepsilon > 0.$$

令 $\rho(x_2) = \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1}$, 有

$$x_2 + \rho(x_2)(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u) = -ks - \varepsilon \text{sgn}(s).$$

经化简得到控制律

$$\begin{aligned} u &= -b^{-1}(\mathbf{x}) \rho^{-1}(x_2) [x_2 + \rho(x_2) f(\mathbf{x}) + \\ &= ks + \varepsilon \text{sgn}(s) + \rho(x_2) g(\mathbf{x})] = \\ &= -b^{-1}(\mathbf{x}) [\rho^{-1}(x_2) x_2 + f(\mathbf{x}) + \\ &= \rho^{-1}(x_2) (ks + \varepsilon \text{sgn}(s)) + g(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (5)$$

由于 $g(\mathbf{x})$ 未知, 控制律中可对不确定性造成的影响进行限制. 同时, 为了防止时控制量为零, 在式 (5) 中加入一个很小的避零常数 $\xi (\xi > 0)$, 得到新的控制律为

$$u = -b^{-1}(\mathbf{x})[(\rho(x_2) + \xi)^{-1}x_2 + f(\mathbf{x}) + (\rho(x_2) + \xi)^{-1}(ks + \varepsilon \operatorname{sgn}(s) + l_g \operatorname{sgn}(s))]. \quad (6)$$

定理 1 对系统(1), 取滑模面(4), 在控制(6)的作用下, 系统将在有限时间内到达 Terminal 滑模面, 并使得滑模面上的跟踪误差在有限时间内收敛到零.

证明 由 s 沿解的时间导数式可得

$$\begin{aligned} \dot{s} = & x_2 + \rho(x_2)(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u) = \\ & x_2 - \rho(x_2)[(\rho(x_2) + \xi)^{-1}x_2 + (\rho(x_2) + \xi)^{-1} \times \\ & (ks + \varepsilon \operatorname{sgn}(s) + l_g \operatorname{sgn}(s)) - g(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (7)$$

只要 ξ 足够小, 有 $\rho(x_2)(\rho(x_2) + \xi)^{-1} = 1$ 成立, 式(7)可简化为

$$\dot{s} = -ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s) - \rho(x_2)[l_g \operatorname{sgn}(s) - g(\mathbf{x})]. \quad (8)$$

当 $x_2 \neq 0$ 时, 因为 $\beta > 0$, p 和 q ($p > q$) 为正奇数, 且 $1 < p/q < 2$, 所以 $\rho(x_2) > 0$, $\dot{s} \leq -ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s) < 0$. 不考虑确定性 $g(\mathbf{x})$ 的影响, 有

$$\dot{s} = -ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s), \quad x_2 \neq 0. \quad (9)$$

当 $x_2 = 0$ 时, $\rho(x_2) = 0$, 有

$$\dot{s} = -ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s), \quad x_2 \neq 0. \quad (10)$$

综合式(8)和(9)可以看出, Terminal 滑模在趋近滑模面时具有指数趋近律(EAL). 将这种控制律称为基于指数趋近律的非奇异 Terminal 滑模控制(NTSM-EAL). \square

考虑到控制律(6)中含有 $\rho^{-1}(x_2)$ 项, 形式复杂, 运算量大, 在保证趋近律的基础上, 对控制律进行简化, 得到简化的控制律为

$$u = -b^{-1}(\mathbf{x}) \left[\beta \frac{q}{p} x_2^{2-p/q} + f(\mathbf{x}) + ks + (l_g + \varepsilon) \operatorname{sgn}(s) \right]. \quad (11)$$

定理 2 对系统(1), 取滑模面(4), 在控制(10)的作用下, 系统将在有限时间内到达 Terminal 滑模面, 并使得滑模面上的跟踪误差在有限时间内收敛到零.

证明 同理, 由 s 沿解的时间导数式可得

$$\begin{aligned} \dot{s} = & x_2 + \rho(x_2)(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u) = \\ & x_2 - \rho(x_2) \left[\beta \frac{q}{p} x_2^{2-p/q} + ks + \varepsilon \operatorname{sgn}(s) + l_g \operatorname{sgn}(s) - g(\mathbf{x}) \right] = \\ & \rho(x_2)[-ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s) - l_g \operatorname{sgn}(s) + g(\mathbf{x})] = \\ & \rho(x_2)[-ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s)] + \rho(x_2)[g(\mathbf{x}) - l_g \operatorname{sgn}(s)]. \end{aligned} \quad (12)$$

当 $x_2 \neq 0$ 时, 有 $\rho(x_2) > 0$,

$$\dot{s} \leq \rho(x_2)[-ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s)] < 0.$$

不考虑确定性 $g(\mathbf{x})$ 的影响, 有

$$\dot{s} = \rho(x_2)[-ks - \varepsilon \operatorname{sgn}(s)].$$

因

$$\begin{cases} \dot{x}_2 \leq -ks - \varepsilon, & s > 0; \\ \dot{x}_2 \geq -ks + \varepsilon, & s < 0. \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} \dot{s} \leq -ks - \varepsilon, & s > 0; \\ \dot{s} \geq -ks + \varepsilon, & s < 0. \end{cases} \quad (13)$$

通常为了防止较大的抖振出现, ε 取值很小. 因此, s 能以指数趋近律趋近滑模面.

综合上述两种情况, 当 $x_2 \neq 0$ 时, 趋近律与指数趋近律相比含有因子 $\rho(x_2)$; 当 $x_2 = 0$ 时, 趋近速度即是指数形式, 称为伪指数趋近律(PEAL). 将这种控制律称为基于伪指数趋近律的非奇异 Terminal 滑模控制(NTSM-PEAL). 本文提出的 NTSM-EAL 和 NTSM-PEAL 控制算法, 可以在保证 TSM 非奇异的前提下, 用较小的控制实现系统的快速收敛.

4 仿真结果

为了说明本文提出两种控制律的有效性, 同时便于与已有方法比较, 考虑二阶单输入单输出非线性系统^[11]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0.1 \sin(20t) + u. \end{cases} \quad (14)$$

为比较本文方法与文献[11]的控制结果, 选取参数与文献[11]中的一致. 取 $q = 3$, $p = 5$, 系统的初始状态为 $[0.1, 0]$. NTSM 中控制律参数取 $l_g = 0.015$, $\beta = 1.0$, $\eta = 0.20$, 采用本文提出的 NTSM-EAL 控制律, 为实现系统快速趋近滑模面, 选取参数 $k = 10$, $\xi = 0.001$, 其余参数与 NTSM 中的参数保持一致. 仿真结果如图 1 所示.

由图 1(a) 可以看出, 系统经过 0.95 s 的时间便能趋于平衡点, 与文献[11]中的调整时间为 3.1 s 的结果相比, 趋近速度较快, 调整时间明显缩短. 从图 1(c) 的放大图可以看出, 趋于滑模面的时间已经非常小了; 而文献[11]中的到达时间为 2.8 s, 占整个调整时间的 90% 以上. 同时 NTSM-EAL 方法输入信号的抖振幅值也控制在 0.4 以内. 从相图上也可以明显看到, 系统很快到达滑模面, 并沿滑模面逐渐收敛到平衡点.

图 2 为采用本文提出的 NTSM-PEAL 控制律时的仿真曲线, 控制器参数同 NTSM-EAL 方法. 可以看出, 图 2 的情形和图 1 相似, 系统通过很短的调整时间便收敛到了平衡点, 同时, 控制输入信号的抖振幅值也在 0.4 以内.

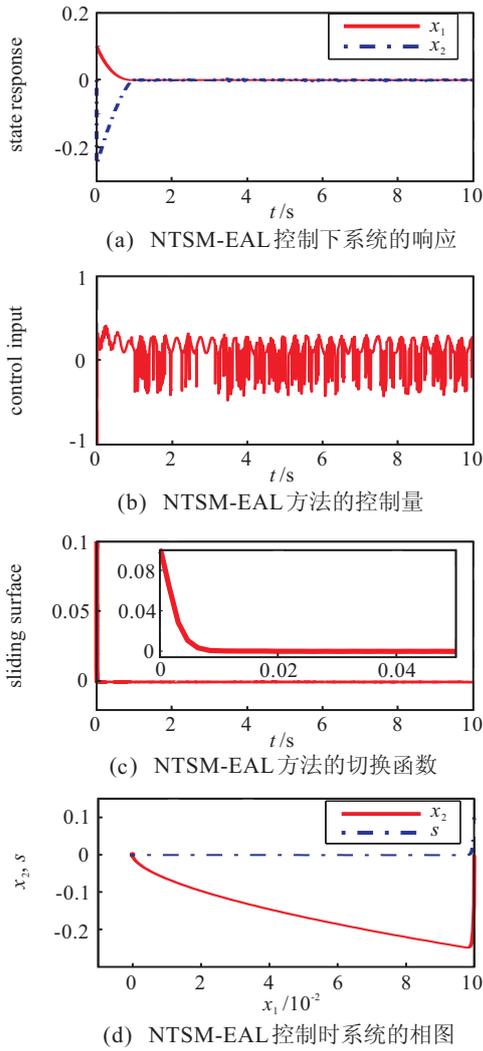


图 1 基于指数趋近律的 Terminal 滑模控制

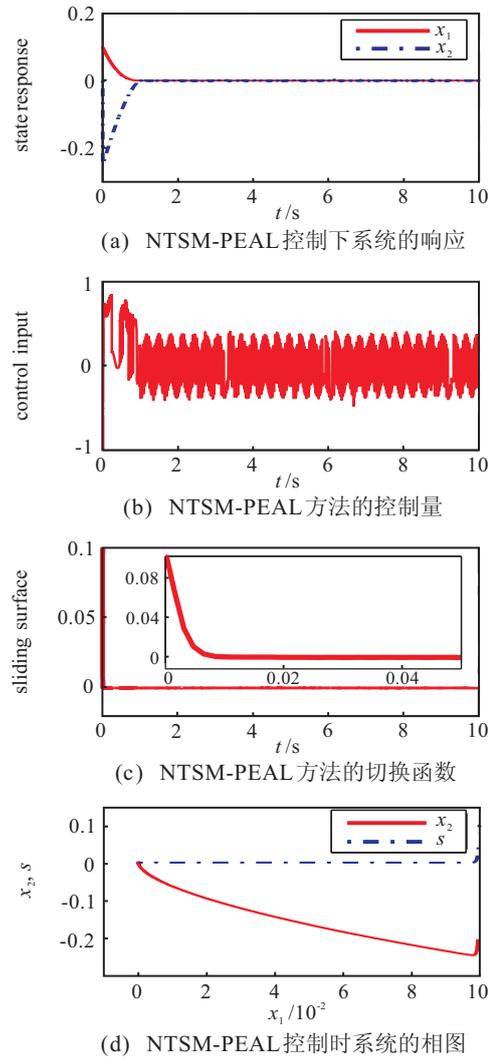


图 2 基于伪指数趋近律的 Terminal 滑模控制

综合图1和图2, 本文提出的NTSM-EAL和NTSM-PEAL控制算法可以在保证TSM非奇异的前提下, 用较小的控制即可实现系统的快速收敛。

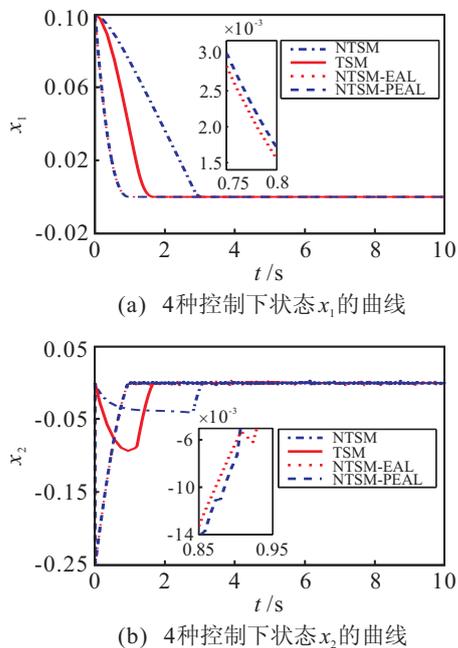


图 3 4种控制器下系统的响应

为比较算法的控制效果, 现加入TSM控制的结果, 将TSM, NTSM, NTSM-EAL和NTSM-PEAL控制得到的系统状态曲线示于图3. 其中TSM的参数选择同NTSM, 均取 $\eta = 0.2$. 可以看出, TSM在不发生奇异的情况下, 收敛速度略优于NTSM, 但均不如本文的NTSM-EAL和NTSM-PEAL控制算法. 本文提出的两种控制算法在控制效果上基本类似, 只是在收敛时间和控制输入上有很小的差异。

5 结 论

本文针对一类二阶非线性不确定系统, 结合趋近律思想, 提出了基于趋近律的非奇异Terminal滑动模态控制器的设计方法, 在克服奇异问题的基础上提高了趋近滑模面的速度, 缩短了调整时间. 理论分析证明了系统在两种新控制律下的稳定性, 仿真结果表明了本文方法的有效性。

参考文献(References)

[1] Ilyas E, Sule A A. Sliding mode control with integral augmented sliding surface: Design and experimental

- application to an electromechanical system[J]. *Electrical Engineering*, 2008, 90(3): 189-197.
- [2] Franck P, Emmanuel M, Alain G, et al. Robust output feedback sampling control based on second-order sliding mode[J]. *Automatica*, 2010, 46(6): 1096-1100.
- [3] 胡剑波, 庄开宇. 高级变结构控制理论及应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2007: 53-57.
(Hu J B, Zhuang K Y. *Advanced variable structure control theory and applications*[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2007: 53-57.)
- [4] Zak M. Terminal attractors in neural networks[J]. *Physics Letters*, 1989, 2(4): 259-274.
- [5] Venkataraman S T, Gulati S. Control of nonlinear systems using terminal sliding modes[C]. *American Control Conf. Chicago*, 1992: 891-893.
- [6] Man Z, Paplinski A P, Wu H. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robot manipulators[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2464-2469.
- [7] Man Z, Yu X. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, 44(11): 1065-1070.
- [8] Wu Y, Yu X, Man Z. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic system[J]. *Systems and Control Letters*, 1998, 34(5): 281-288.
- [9] 庄开宇, 张克勤, 苏宏业, 等. 高阶非线性系统的 Terminal 滑模控制[J]. *浙江大学学报: 工学版*, 2002, 36(5): 482-485.
(Zhuang K Y, Zhang K Q, Su H Y, et al. Terminal sliding mode control for high-order nonlinear dynamic systems[J]. *J of Zhejiang University: Engineering Science*, 2002, 36(5): 482-485.)
- [10] Kang Bark Park, Ju Jang Lee. Comments on "A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators"[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(5): 716-762.
- [11] Feng Y, Yu X, Man Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. *Automatica*, 2002, 38(12): 2159-2167.
- [12] 李升波, 李国强, 王建强, 等. 非奇异快速的终端滑模控制方法[J]. *信息与控制*, 2009, 38(1): 1-8.
(Li S B, Li K Q, Wang J Q, et al. Nonsingular and fast terminal sliding mode control method[J]. *Information and Control*, 2009, 38(1): 1-8.)
- [13] 李升波, 李国强, 王建强, 等. 非奇异快速的终端滑模控制方法及其跟车控制应用[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(5): 543-550.
(Li S B, Li K Q, Wang J Q, et al. Nonsingular fast terminal sliding mode control method and its application on vehicular following system[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 38(1): 1-8.)
- [14] 郑剑飞, 冯勇, 郑雪梅, 等. 不确定非线性系统的自适应反演终端滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(4): 410-414.
(Zheng J F, Feng Y, Zheng X M, et al. Adaptive backstepping-based terminal sliding mode control for uncertain nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(4): 410-414.)
- [15] 周丽, 姜长生, 都延丽. 一种基于反步法的鲁棒自适应终端滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 36(6): 678-682.
(Zhou L, Jiang C S, Du Y L. A robust and adaptive terminal sliding mode control based on backstepping[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 36(6): 678-682.)
- [16] Guo Shuai, He Jin-bao. Adaptive dynamic terminal sliding mode control method[C]. *The 2nd Int Conf on Intelligent Computation Technology and Automation. Changsha*, 2009: 735-738.
- [17] Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular terminal sliding mode control and its application for robot manipulators[C]. *Proc of the IEEE Int Symposium on Circuits and Systems. Piscataway: IEEE*, 2001: 545-548.
- [18] Yu S H, Yu X H, Man Z H. Robust global terminal sliding mode control of SISO nonlinear uncertain system[C]. *Proc of 39th IEEE Conf on Decision and Control. Sydney*, 2000: 2198-2203.
- [19] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990: 28-30.
(Gao W B. *Variable structure control theory*[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 1990: 28-30.)