

文章编号: 1001-0920(2012)07-1109-04

## 具有测量数据丢失的大系统鲁棒 $H_\infty$ 控制

周颖<sup>1</sup>, 杨富文<sup>2</sup>, 樊春霞<sup>1</sup>

(1. 南京邮电大学 自动化学院, 南京 210003; 2. 华东理工大学 信息科学与工程学院, 上海 200237)

**摘要:** 研究一类具有测量数据丢失的大系统分散  $H_\infty$  控制器设计问题. 针对由  $N$  个子系统构成的线性离散大系统, 假设测量数据丢失满足已知概率的 Bernoulli 分布, 采用线性矩阵不等式方法给出了分散  $H_\infty$  控制器存在的充分条件, 所设计的控制器使得闭环系统均方指数稳定, 且满足指定的  $H_\infty$  性能指标. 通过仿真例子验证了该方法的有效性.

**关键词:** 测量数据丢失; 大系统;  $H_\infty$  控制; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Robust $H_\infty$ control for large-scale systems with missing measurements

ZHOU Ying<sup>1</sup>, YANG Fu-wen<sup>2</sup>, FAN Chun-xia<sup>1</sup>

(1. College of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China; 2. Information School of Science and Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China. Correspondent: ZHOU Ying, E-mail: zhouying@njupt.edu.cn)

**Abstract:** A decentralized  $H_\infty$  controller design for a class of large-scale systems with missing measurements is considered in this paper. The linear discrete-time large-scale system is modeled as interconnection of  $N$  subsystems. The occurrence of missing measurement is assumed to be a Bernoulli distributed sequence with known probability. Sufficient conditions for the existence of decentralized  $H_\infty$  controller are derived in terms of linear matrix inequality(LMI), such that the closed-loop system is exponentially stable in the sense of mean square, and a prescribed  $H_\infty$  performance is guaranteed. A numerical example is also provided to show the effectiveness of the proposed design approach.

**Key words:** missing measurement; large-scale system;  $H_\infty$  control; linear matrix inequality

### 1 引言

许多物理系统是由相互影响、相互关联的若干子系统按照一定组合方式构成的大系统, 其实现的可靠性和经济性使大系统的控制方法得到了广泛研究<sup>[1-2]</sup>. 另外, 数据的网络传输以及传感器暂时失效等原因都有可能造成测量数据丢失. 因而, 对具有量测数据丢失的大系统控制方法的研究具有重要意义.

目前, 对具有测量数据丢失的控制器和故障检测滤波的研究已取得了一些成果<sup>[3-8]</sup>, 大都采用 2 种方法: 1) 用估计值替代丢失的数据<sup>[3]</sup>; 2) 将丢失数据作为“零”数据进行处理. 常用的有 Bernoulli 序列方法<sup>[4]</sup>、马尔可夫过程<sup>[5]</sup>等. 其中 Bernoulli 序列方法最为简单, 且物理意义明确. 文献<sup>[6]</sup>对数据丢失满足 Bernoulli 分布的随机离散时延系统设计了状态反馈

鲁棒  $H_\infty$  控制器, 使得控制输出满足指定  $H_\infty$  性能. 文献<sup>[7-8]</sup>进一步设计了其输出反馈  $H_\infty$  控制器. 目前已有成果主要是针对被控对象为孤立线性离散系统, 而大系统由于互联项的存在, 使得分散控制器的设计以及线性矩阵不等式的求解都更加困难, 因此针对此类系统的研究还未涉及.

本文采用满足 Bernoulli 分布的序列来描述量测数据的丢失, 针对具有测量数据丢失的线性离散大系统设计一种  $H_\infty$  状态反馈控制器, 以线性矩阵不等式形式给出此类大系统可分散镇定的充分条件, 并借助 Matlab 工具箱中的 LMI 工具软件直接求解.

### 2 问题描述

考虑一类由  $N$  个子系统构成的离散大系统

收稿日期: 2010-12-09; 修回日期: 2011-05-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61104103, 61004001, 60904025); 江苏省自然科学基金项目(BK2011826); 江苏省高校自然科学基金项目(10KJB12001); 南京邮电大学攀登项目(NY210013, NY210014).

作者简介: 周颖(1978-), 女, 副教授, 博士, 从事非线性系统、网络化控制系统的研究; 杨富文(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络化系统的控制与滤波等研究.

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \\ \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij} x_j(k) + E_i w_i(k), \\ z_i(k) = C_i x_i(k) + D_i w_i(k), \\ y_i(k) = x_i(k), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i(k) \in R^{n_i}$ ,  $u_i(k) \in R^{m_i}$ ,  $z_i(k) \in R^{p_i}$ ,  $y_i(k) \in R^{q_i}$ ,  $w_i(k) \in R^{r_i}$  分别为第  $i$  个子系统的状态、控制输入、控制输出、量测输出、干扰输入向量;  $w_i(k) \in l_2[0, \infty)$ ;  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  分别为具有相应维数的常数矩阵;  $G_{ij}$  为第  $j$  个子系统对第  $i$  个子系统的关联矩阵.

假设系统实际测量到的状态为

$$\bar{x}_i(k) = \alpha_i(k) x_i(k), \quad (2)$$

$\alpha_i(k) \in R$  是一个满足 Bernoulli 分布的随机序列, 其取值为 0 和 1, 且满足如下概率:

$$\begin{aligned} \text{prob}\{\alpha_i(k) = 1\} &= E\{\alpha_i(k)\} := \bar{\alpha}_i, \\ \text{prob}\{\alpha_i(k) = 0\} &= 1 - E\{\alpha_i(k)\} := 1 - \bar{\alpha}_i, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $0 < \bar{\alpha}_i < 1$  是已知正实数.

对系统 (1) 考虑分散控制器

$$u_i(k) = -K_i \bar{x}_i(k) = -\alpha_i(k) K_i x_i(k). \quad (4)$$

将式 (4) 代入 (1), 整理得闭环系统

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_i x_i(k) - \alpha_i(k) B_i K_i x_i(k) + \\ \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij} x_j(k) + E_i w_i(k), \\ z_i(k) = C_i x_i(k) + D_i w_i(k), \\ y_i(k) = x_i(k), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (5)$$

本文的研究目标是对系统 (1) 设计状态反馈分散控制器 (4), 使得: 1) 在  $w(k) = 0$  时, 闭环系统 (5) 是均方意义下指数稳定的; 2) 在零初始条件下, 闭环系统 (5) 的被控输出  $z(k)$  满足如下  $H_\infty$  性能指标:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z(k)\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|w(k)\|^2\}. \quad (6)$$

其中

$$z(k) = [z_1^T(k) \ \dots \ z_N^T(k)]^T,$$

$$w(k) = [w_1^T(k) \ \dots \ w_N^T(k)]^T,$$

$\gamma > 0$  为一给定的标量.

**引理 1**<sup>[9]</sup>  $V(x(k))$  为 Lyapunov 函数, 若存在常数  $\lambda \geq 0, \mu > 0, v > 0$  和  $0 < \psi < 1$ , 使得

$$\mu \|x(k)\|^2 \leq V(x(k)) \leq v \|x(k)\|^2,$$

$$E\{V(x(k+1)|x(k))\} - V(x(k)) \leq \lambda - \psi V(x(k)),$$

则有

$$E\{\|x(k)\|^2\} \leq \frac{v}{\mu} \|x(0)\|^2 (1 - \psi)^k + \frac{\lambda}{\mu\psi}.$$

### 3 主要结果

**定理 1** 给定  $0 < \bar{\alpha}_i < 1$  且干扰  $w(k) = 0$ . 如果存在正定对称矩阵  $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$  和增益矩阵  $K_i (i = 1, 2, \dots, N)$  满足

$$\begin{bmatrix} -P & Q_1^T \\ Q_1 & -\bar{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

则闭环系统 (5) 是均方意义下指数稳定的. 其中

$Q_1 =$

$$\begin{bmatrix} A_1 - \bar{\alpha}_1 B_1 K_1 & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & A_2 - \bar{\alpha}_2 B_2 K_2 & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & A_N - \bar{\alpha}_N B_N K_N \\ B_1 K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_N K_N \end{bmatrix} =$$

$$[Q_{11} \ Q_{12}]^T, \quad \bar{P} = \text{diag}\{P, \beta^2 P\},$$

$$P = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_N\}, \quad \beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\},$$

$$\beta_i = ((1 - \bar{\alpha}_i) \bar{\alpha}_i)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

**证明** 当  $w_k = 0$  时, 选取 Lyapunov 函数

$$V(x(k)) = \sum_{i=1}^N x_i^T(k) P_i x_i(k). \quad (8)$$

由  $E\{\alpha_i(k) - \bar{\alpha}_i\} = 0$ ,  $E\{(\alpha_i(k) - \bar{\alpha}_i)^2\} = (1 - \bar{\alpha}_i) \bar{\alpha}_i = \beta_i^2$ , 可得

$$\begin{aligned} E\{V(x(k+1)|x(k))\} - V(x(k)) &= \\ \sum_{i=1}^N \left( A_i x_i(k) - \bar{\alpha}_i B_i K_i x_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij} x_j(k) \right)^T &\times \\ P_i \left( A_i x_i(k) - \bar{\alpha}_i B_i K_i x_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij} x_j(k) \right) &+ \\ \sum_{i=1}^N \beta_i^2 (B_i K_i x_i(k))^T P_i (B_i K_i x_i(k)) - \sum_{i=1}^N x_i^T(k) P_i x_i(k) &= \\ x^T(k) (Q_1^T \bar{P} Q_1 - P) x(k) = x^T(k) \theta_1 x(k). \end{aligned} \quad (9)$$

由 Schur 补引理知, 式 (7) 成立等价于  $\theta_1 < 0$ , 此时有

$$\begin{aligned} E\{V(x(k+1)|x(k))\} - V(x(k)) &< \\ -\frac{\gamma}{\sigma} V(k) = -\psi V(k). \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$0 < \gamma < \min\{\lambda_{\min}(-\theta_1), \lambda_{\max}(P)\},$$

$$\sigma = \lambda_{\max}(P), \quad \psi = \frac{\gamma}{\sigma} \in (0, 1).$$

由引理 1 可得闭环系统 (5) 是均方意义下指数稳定的.  $\square$

由于式 (7) 不是线性矩阵不等式, 下面给出其相

应的求解方法, 将其转化为线性矩阵不等式来求解矩阵  $P_i, K_i, i = 1, 2, \dots, N$ .

**定理 2** 给定  $0 < \bar{\alpha}_i < 1$  且扰动  $w(k) = 0$ . 如果存在正定对称矩阵  $M$  和增益矩阵  $N$  满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -M & MQ_{11}^T & \beta MQ_{12}^T \\ Q_{11}M & -M & 0 \\ \beta Q_{12}M & 0 & -M \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

则闭环系统 (5) 是均方意义下指数稳定的. 其中

$$Q_{11}M = \begin{bmatrix} A_1M_1 - \bar{\alpha}B_1N_1 & G_{12}M_2 \\ G_{21}M_1 & A_2M_2 - \bar{\alpha}B_2N_2 \\ \vdots & \vdots \\ G_{N1}M_1 & G_{N2}M_2 \\ \cdots & G_{1N}M_N \\ \cdots & G_{2N}M_N \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & A_NM_N - \bar{\alpha}B_NN_N \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} \beta_1B_1N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2B_2N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_NB_NN_N \end{bmatrix}.$$

**证明** 式 (7) 两端同乘正定对称矩阵

$$\text{diag}\{P^{-1}, I_n, \beta I_n\}, \quad (12)$$

其中  $I_n$  为  $\sum_{i=1}^N n_i$  维单位矩阵. 定义

$$M = \text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_N\} = P^{-1} = \text{diag}\{P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_N^{-1}\},$$

$$N = \text{diag}\{N_1, N_2, \dots, N_N\} = KP^{-1} = \text{diag}\{K_1P_1^{-1}, K_2P_2^{-1}, \dots, K_NP_N^{-1}\}. \quad (13)$$

式 (7) 等价于 (11).

由线性矩阵不等式 (11) 求解可得矩阵  $M$  和  $N$ , 进而由  $P = M^{-1}, K = NP$  可求得矩阵  $P$  和  $K$ .  $\square$

**定理 3** 给定  $0 < \bar{\alpha}_i < 1$ , 如果存在正定对称矩阵  $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$  和增益矩阵  $K_i (i = 1, 2, \dots, N)$  满足

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P} & Q_2^T \\ Q_2 & -\tilde{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

则闭环系统 (5) 是均方意义下指数稳定的且具有给定的  $H_\infty$  特性. 其中

$$Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{12}^T & C^T & 0 \\ E^T & 0 & D^T & -\gamma I_r \end{bmatrix}^T,$$

$$Q_{11} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1 - \bar{\alpha}_1 B_1 K_1 & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & A_2 - \bar{\alpha}_2 B_2 K_2 & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & A_N - \bar{\alpha}_N B_N K_N \end{bmatrix},$$

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} B_1 K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N K_N \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P} = \text{diag}\{P, \beta^2 P, I_p, I_r\}, E = \text{diag}\{E_1, E_2, \dots, E_N\},$$

$$C = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_N\}, \tilde{P} = \text{diag}\{P, 0_N\},$$

$$D = \text{diag}\{D_1, D_2, \dots, D_N\},$$

$$P = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_N\}, \beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\},$$

$$\beta_i = ((1 - \bar{\alpha}_i)\bar{\alpha}_i)^{1/2}, i = 1, 2, \dots, N,$$

$I_p, I_r$  分别为  $\sum_{i=1}^N p_i, \sum_{i=1}^N r_i$  维的单位矩阵.

**证明** 当  $w(k) = 0$  时, 式 (14) 包含 (7), 因而闭环系统 (5) 是均方意义下指数稳定的.

当  $w(k) \neq 0$  时, 选取 Lyapunov 函数

$$V(x(k)) = \sum_{i=1}^N x_i^T(k) P_i x_i(k), \quad (15)$$

进而

$$E\{V(x(k+1)|x(k))\} - V(x(k)) + E\{z^T(k)z(k)\} - \gamma^2 E\{w^T(k)w(k)\} = \eta^T(k)(Q_2^T \tilde{P} Q_2 - \tilde{P})\eta(k) = \eta^T(k)\theta_2\eta(k),$$

其中  $\eta(k) = [x(k)^T \ w(k)^T]^T$ . 由 Schur 补引理, 式 (14) 成立, 即有  $\theta_2 < 0$ , 此时

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{z^T(k)z(k)\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{w^T(k)w(k)\} + E\{V(0)\} - E\{V(\infty)\}.$$

因为系统初始值为零可得  $E\{V(0)\} = 0$ , 又由于系统是均方意义下指数稳定的, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z(k)\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|w(k)\|^2\}. \quad \square$$

**定理 4** 给定  $0 < \bar{\alpha}_i < 1$ , 如果存在正定对称矩阵  $M$  和增益矩阵  $N$  满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -M & 0 & MQ_{11}^T & \beta MQ_{12}^T & MC^T & -\gamma I_r \\ 0 & 0 & E^T & 0 & D^T & 0 \\ Q_{11}M & E & -M & 0 & 0 & 0 \\ \beta Q_{12}M & 0 & 0 & -M & 0 & 0 \\ CM & D & 0 & 0 & -I_p & 0 \\ -\gamma I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_r \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

其中  $Q_{11}M$  和  $\beta Q_{12}M$  同式 (13), 则闭环系统 (5) 是均

方意义下指数稳定的,并且具有给定的  $H_\infty$  特性.

**证明** 不等式 (14) 两端同乘以矩阵

$$\text{diag}\{P^{-1}, I_r, I_n, \beta I_n, I_p, I_r\} > 0,$$

与定理 2 证明类似可得结论.  $\square$

#### 4 仿真例子

考虑如下包含两个子系统的线性离散大系统:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} x_1(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(k) + \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} x_2(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w_1(k), \\ z_1(k) = [0 \ 1]x_1(k) = C_1x_1(k), \\ y_1(k) = x_1(k); \\ x_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} x_2(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(k) + \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} x_1(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w_2(k), \\ z_2(k) = [0 \ 1]x_2(k)w_2(k) = C_2x_2(k), \\ y_2(k) = x_2(k). \end{cases}$$

选取干扰输入向量  $w_1(k) = w_2(k) = 0.01 \times [\sin(100k) \ \sin(100k)]^T$ , 初始状态  $x_1(0) = [1 \ 1]^T$ ,  $x_2(0) = [-1 \ -1]^T$ . 假设 Bernoulli 分布的随机序列满足  $E\{\alpha_1(k) | \alpha_1(k) = 1\} = E\{\alpha_2(k) | \alpha_2(k) = 1\} = 0.9$ , 对于给定  $\gamma = 1$ , 通过求解定理 4 中的线性矩阵不等式 (16), 可得

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1.3773 & 0.0079 \\ 0.0079 & 1.3335 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 2.0527 & -0.6686 \\ -0.6686 & 1.5319 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = [0.8311 \ 1.0115], N_2 = [-0.0741 \ 0.9825].$$

进而可求得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7261 & -0.0043 \\ -0.0043 & 0.7499 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.5679 & 0.2479 \\ 0.2479 & 0.7610 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = [0.5991 \ 0.7549], K_2 = [0.2015 \ 0.7293].$$

基于 Matlab 的 LMI 工具箱, 得到闭环系统的控制输出如图 1 和图 2 所示, 可以验证  $\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z(k)\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|w(k)\|^2\}$ , 满足指定的  $H_\infty$  性能. 同时, 当  $w_1(k) = w_2(k) = 0$  时, 基于 Matlab 软件可以验证闭环系统所有状态均方意义下指数稳定.

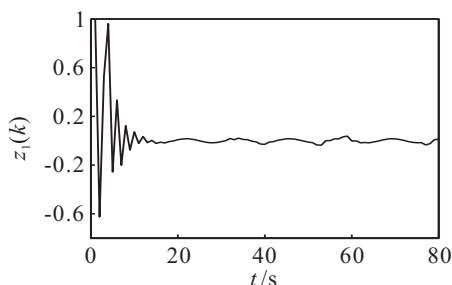


图 1 控制输出  $z_1(k)$  的动态响应

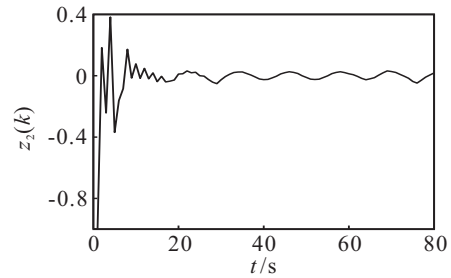


图 2 控制输出  $z_2(k)$  的动态响应

#### 5 结论

针对量测数据丢失满足已知概率 Bernoulli 分布的一类线性离散大系统, 本文设计了其基于状态反馈的分散  $H_\infty$  控制器. 通过求解线性矩阵不等式, 给出了此类大系统可分散镇定的充分条件, 所设计的控制器使得闭环系统是均方意义下指数稳定, 且具有给定的  $H_\infty$  性能.

#### 参考文献(References)

- [1] Ugrinovskii V A, Petersen I R, Savkin A V, et al. Decentralized state-feedback stabilization and robust control of uncertain large-scale systems with integrally constrained interconnections[J]. Systems & Control Letters, 2000, 40(2): 107-119.
- [2] Labibi B, Lohmann B, Khaki S. Robust decentralized stabilization of large-scale systems via eigen structure assignment[J]. Int J of Systems Science, 2003, 34(6): 389-393.
- [3] Pintelon R, Schoukens J. Frequency domain system identification with missing data[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(2): 364-369.
- [4] Wang W, Yang F W.  $H_\infty$  filter design for discrete-time systems with missing measurements[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(1): 107-111.
- [5] Smith S C, Seiler P. Estimation with lossy measurements: Jump estimators for jump systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(12): 2163-2171.
- [6] Yang F W, Wang Z, Huang Y S, et al. Robust  $H_\infty$  control with missing measurements and time delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(9): 1666-1672.
- [7] Wang Z, Ho W C D, Liu Y, et al. Robust  $H_\infty$  control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements[J]. Automatica, 2009, 45(3): 684-691.
- [8] Wang Z, Yang F, Ho W C D, et al. Robust  $H_\infty$  control for networked systems with random packet losses[J]. IEEE Trans on Systems Man, and Cybernetics: Part B, 2007, 37(4): 916-924.
- [9] Yang F, Wang Z, Huang Y S, et al.  $H_\infty$  control for networked systems with random communication delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(3): 511-518.