文章编号: 1001-0920 (2012) 07-1047-05

奇异线性随机跳变系统有界误差估计器设计

陈 佳[1], 方洋旺[2], 楼顺天[1]

(1. 西安电子科技大学 电子工程学院，西安 710071；2. 空军工程大学 工程学院，西安 710038)

摘 要: 从随机稳定的基本定义开始, 对奇异线性随机跳变系统的随机稳定问题进行分析, 推导出满足鲁棒 H_∞ 性能的随机稳定条件, 并在此基础上进行推广. 首先针对估计误差满足鲁棒 H_∞ 性能约束的条件, 给出带 Kalman 滤波器形式的滤波器设计方法; 然后重点研究了系统中各模态参数矩阵带有不确定性的情况; 最后给出相应的数值算例并计算滤波器系数, 验证了该方法的有效性和正确性.

关键词: 随机系统；奇异系统；随机稳定；不确定性矩阵；鲁棒 H_∞

中图分类号: TP271.74 **文献标识码:** A

Bounded error estimator design of linear continuous singular random jumping system

CHEN Jia[1], *FANG Yang-wang*[2], *LOU Shun-tian*[1]

(1. School of Electronic Engineering，Xidian University，Xi’an 710071，China；2. Engineering College，Air Force Engineering University，Xi’an 710038，China．Correspondent：CHEN Jia，E-mail：jackiechan1985@126.com)

Abstract: Based on the basic definition of stochastic stability, stability problem of singular random system is investigated, and a sufficient condition for how to estimate a given singular random system to satisfy the robust H_∞ performance is analyzed. Therefore, a method is proposed to solve the problem of filter design. Firstly, for the condition of the error of state estimation which satisfies the robust H_∞ performance, a method of designing the filter is presented, which has the same framework with the Kalman filter. Then, for the condition of system structure with uncertainties, a relevant result is given. Finally, numerical examples are given and coefficients are also computed, and the results verify the accuracy and efficiency of the proposed method.

Key words: random system；singular system；stochastic stability；uncertain matrix；robust H_∞

1 引 言

将建立在奇异摄动模型基础上的奇异系统作为一个更广泛的动力学系统模型, 广泛地应用于动力学研究和有关于工程上的工业控制系统的各个领域. 文献 [1] 对奇异系统作了大量研究, 使得这一领域的研究工作得到了较大发展.

另外, 在实际应用中存在着这样的一类动力学系统, 伴随随机突变现象的发生, 系统的模态会产生跳变现象. 大量的实验研究表明, 系统模态的跳变现象是按照 Markov 过程的跳变规律进行. 此类系统通常被称为随机系统 (RS) 或者 Markov 跳变系统 (MJSS). 自 20 世纪 60 年代二次型控制问题提出以来, 这一类系统的研究和应用越来越广泛[2]. 与单模态动力学系统一样, RS 通常可以和 H_∞ 性能结合在一起分析. 很多学者对随机系统进行了研究[3-7], 取得了很多成果. 近年来, 国内的学者将研究的侧重点放在随机系统的分析上面[8-9]. 在状态估计方面, 文献 [10] 将跳变系统理论具体应用于无线网络通信中; [11] 将后验概率密度函数用条件高斯函数来逼近, 在一定程度上简化了计算.

传统的状态估计方法 (无论是最小均方误差, 还是最大后验概率) 推导过程复杂, 计算量大, 且较为抽象, 理解起来相对困难. 本文将状态估计与系统随机稳定相结合, 运用鲁棒 H_∞ 性能理论, 对结构中带有标准化维纳过程的奇异连续随机系统, 推导出一种具有类似 Kalman 滤波器结构的有界误差估计器设计方法. 仿真算例验证了研究成果的有效性和准确性.

收稿日期: 2010-12-27；**修回日期:** 2011-06-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674040).

作者简介: 陈佳(1985−), 男, 博士生, 从事 Markov 跳变系统的控制理论研究；楼顺天(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事盲信号处理等研究.

2 问题描述

考虑一个具有如下形式的线性奇异随机系统:

$$E_i \mathrm{d}x_{(t)} = A_{(i,t)}x_{(t)}\mathrm{d}t + B_{w(i,t)}w_{(t)}\mathrm{d}t + W_i x_{(t)} d\omega_{(t)}, \tag{1}$$

$$y_{(t)} = A_{y(i,t)}x_{(t)} + B_{yi}w_{(t)}, \tag{2}$$

$$z_{(t)} = A_{z(i,t)}x_{(t)} + B_{zi}w_{(t)}. \tag{3}$$

其中: $\{r_t = i, t \in T\}$ 为 Markov 链, i 在有限维状态空间 $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ 中取值. 系统的转移概率用下式描述:

$$P[r(t+h) = j | r(t) = i] = \begin{cases} \lambda_{ij} * h + o(h),\ i \neq j; \\ 1 - \lambda_{ij} * h + o(h),\ i = j. \end{cases}$$

$o(h)$ 为 h 的高阶无穷小; $\lambda = [\lambda_{ij}]$ 为系统模态的转移率矩阵 (又称转移强度矩阵), 满足 $\lambda_{ii} = -\sum\limits_{j\neq i}\lambda_{ij}$, 且 $\lambda_{ij} \geqslant 0$, 对于每一个 $i \neq j$; $x_{(t)} \in R^n$ 为系统的状态向量; $y_{(t)} \in R^m$, $z_{(t)} \in R^p$ 分别代表系统的观测向量和输出向量; $w_{(t)}$ 为能量有界的系统外部扰动; $\omega_{(t)}$ 为标准化的维纳过程; E_i 满足 $\mathrm{rank}(E_i) = r < n$; 对于每一个 $i \in S$, 有

$$A_{(i,t)} = A_i + D_{Ai}F_{A(i,t)}E_{Ai},$$
$$B_{w(i,t)} = B_{wi} + D_{wi}F_{w(i,t)}E_{wi},$$
$$A_{y(i,t)} = A_{yi} + D_{yi}F_{y(i,t)}E_{yi},$$
$$A_{z(i,t)} = A_{zi} + D_{zi}F_{z(i,t)}E_{zi}.$$

$F_{A(i,t)}, F_{w(i,t)}, F_{y(i,t)}, F_{z(i,t)}$ 为不确定性矩阵, 满足

$$F^{\mathrm{T}}_{A(i,t)}F_{A(i,t)} \leqslant I,\ F^{\mathrm{T}}_{w(i,t)}F_{w(i,t)} \leqslant I,$$
$$F^{\mathrm{T}}_{y(i,t)}F_{y(i,t)} \leqslant I,\ F^{\mathrm{T}}_{z(i,t)}F_{z(i,t)} \leqslant I.$$

下面是文中所要使用到的一些常用定义和引理.

定义 1[2] 令式 (1) 中的 $w_{(t)} = 0$, 则奇异系统

$$E_i \mathrm{d}x_{(t)} = A_i x_{(t)}\mathrm{d}t + W_i x_{(t)}\mathrm{d}\omega_{(t)}$$

是随机稳定的, 如果对于任意给定的系统初值 (x_0, i_0), 不等式

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^\infty \|x_{(t)}\|^2 \mathrm{d}t | x_0, i_0\Big] \leqslant T(x_0, i_0)$$

成立, 其中 $T(x_0, i_0)$ 是与 (x_0, i_0) 有关的常数值.

定义 2[2] 如果对于一个有状态方程 (1) 和输出方程 (3) 的跳变系统随机稳定, 且对于给定的正实参数 r, 满足

$$\|z\|_2 \leqslant r[\|\omega\|_2^2 + m_{(k0,r0)}]^{1/2},$$

$$\|z\|_2 \triangleq \Big[\mathrm{E}\Big(\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}_{(t)}z_{(t)}\mathrm{d}t\Big)\Big]^{1/2},$$

则称系统具有鲁棒 H_∞ 性能. 其中 $m_{(k0,r0)}$ 是与系统初值有关的常数.

引理 1[4] 假设对称矩阵 M 可以分块表示如下:

$$M = \begin{bmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & C \end{bmatrix},$$

则下面两个结论是等价的: 1) $M > 0$, 当且仅当 $C > 0$ 且 $A - B^{\mathrm{T}}C^{-1}B > 0$; 2) $M > 0$, 当且仅当 $A > 0$ 且 $C - B^{A-1}B^{\mathrm{T}} > 0$.

引理 2[4] 不等式 $Z + DFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} < 0$ 成立的充分必要条件是存在一个正常数 ε, 使得不等式 $Z + \varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E + \varepsilon DD^{\mathrm{T}} < 0$ 成立, 其中 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$.

3 奇异线性系统的鲁棒 H_∞ 性能随机稳定问题

首先给出一个判断确定性奇异随机系统的稳定性判据.

定理 1 令式 (1) 和 (3) 中的不确定性矩阵为零, 则奇异系统随机稳定, 且具有鲁棒 H_∞ 性能的充分条件是存在一组可逆矩阵 P_i, 使得如下形式的矩阵不等式组成立:

$$E^{\mathrm{T}}_i P_i = P^{\mathrm{T}}_i E_i \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \varGamma_i & A^{\mathrm{T}}_{zi}B^{+}_{zi}P^{\mathrm{T}}_i B_{wi} \\ B^{\mathrm{T}}_{zi}A^{+}_{zi}B^{\mathrm{T}}_{wi}P_i & B^{\mathrm{T}}_{zi}B^{-}_{zi}r^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{5}$$

其中

$$\varGamma_i = A^{\mathrm{T}}_i P_i + P^{\mathrm{T}}_i A_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}E^{\mathrm{T}}_j P_j + A^{\mathrm{T}}_{zi}A_{zi} + W^{\mathrm{T}}_i P_i W_i.$$

证明 先证明系统是随机稳定的.

由式 (5) 得 $\varGamma_i < 0$, 又因为 $A^{\mathrm{T}}_{zi}A_{zi} \geqslant 0$, 则

$$A^{\mathrm{T}}_i P_i + P^{\mathrm{T}}_i A_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}E^{\mathrm{T}}_j P_j + W^{\mathrm{T}}_i P_i W_i. \tag{6}$$

再结合不等式 (4), 根据定义 1, 系统 (1) 是随机稳定的.

再证明系统满足鲁棒 H_∞ 性能. 假设 $V_{(x(t),i)} = x^{\mathrm{T}}_{(t)}E^{\mathrm{T}}_i P_i x_{(t)}$, 定义 $V_{(x(t),i)}$ 的一阶弱微分算子为 $\Delta V_{(x(t),i)}$, 则有

$$\Delta V_{(x(t),i)} = x^{\mathrm{T}}_{(t)}(A^{\mathrm{T}}_i P_i + P^{\mathrm{T}}_i A_i)x_{(t)} + x^{\mathrm{T}}_{(t)}W^{\mathrm{T}}_i P_i W_i x_{(t)} + x^{\mathrm{T}}_{(t)}\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}E^{\mathrm{T}}_j P_j x_{(t)}.$$

令 $\Delta V_{(x(t),i)} = x^{\mathrm{T}}_{(t)}\varLambda_n(i)x_{(t)}$, 其中 $\varLambda_n(i)$ 如式 (6) 所示, 根据线性代数的知识, 有

$$\Delta V_{(x(t),i)} \leqslant -\min_{i\in s}\{\lambda_{\min}(-\varLambda_n(i))\}x^{\mathrm{T}}_{(t)}x_{(t)}.$$

利用 Dynkin's 等式, 得到

$$\mathrm{E}[V_{(x(t),i)}] - \mathrm{E}[V_{(x(0),r(0))}] \leqslant -\min_{i\in s}\{\lambda_{\min}(-\varLambda_n(i))\}\mathrm{E}\Big[\int_0^t x^{\mathrm{T}}_{(s)}x_{(s)}\mathrm{d}s\,|(\,x_0, r_0)\Big].$$

由式 (4) 得 $\mathrm{E}[V_{(x(t),i)}] \geqslant 0$, 所以

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^t x_{(s)}^{\mathrm{T}} x_{(s)} \mathrm{d}s\,|(x_0, r_0)\Big] \leqslant \frac{\mathrm{E}[V_{(x(0),r(0))}]}{\min\limits_{i\in s}\{\lambda_{\min}(-\Lambda_n(i))\}}.$$

注意到不等式右边为只与初始状态和模态有关的常数, 故命题得证.

再证明系统具有鲁棒 H_∞ 性能. 令

$$J_T = \mathrm{E}\Big[\int_0^t [z_{(t)}^{\mathrm{T}} z_{(t)} - r^2 w_{(t)}^{\mathrm{T}} w_{(t)}]\mathrm{d}t\Big],$$

由式 (1) 和 (3) 可得

$$\begin{aligned} &z_{(t)}^{\mathrm{T}} z_{(t)} - r^2 w_{(t)}^{\mathrm{T}} w_{(t)} = \\ &x_{(t)}^{\mathrm{T}} A_{zi}^{\mathrm{T}} A_{zi} x_{(t)} + x_{(t)}^{\mathrm{T}} A_{zi}^{\mathrm{T}} B_{zi}^{\mathrm{T}} w_{(t)} + \\ &x_{(t)}^{\mathrm{T}} B_{zi}^{\mathrm{T}} A_{zi} x_{(t)} - r^2 w_{(t)}^{\mathrm{T}} w_{(t)}. \end{aligned}$$

根据 $\Delta V_{(x(t),i)}$ 的表达式, 令

$$z_{(t)}^{\mathrm{T}} z_{(t)} - r^2 w_{(t)}^{\mathrm{T}} w_{(t)} + \Delta V_{(x(t),i)} = \eta_{(t)}^{\mathrm{T}} \Theta_i \eta_{(t)},$$

再根据 Dynkin's 等式, 得到

$$J_T = \mathrm{E}\Big[\int_0^T [\eta_{(t)}^{\mathrm{T}} \Theta_i \eta_{(t)}]\mathrm{d}t] - \mathrm{E}[V_{(x(t),r(t))}]\Big] + V_{(x_0,r_0)}.$$

显然 $-\mathrm{E}[V_{(x(t),r(t))}] \leqslant 0$, 所以当 $\Theta_i < 0$ 时, $J_T \leqslant V_{(x_0,r_0)}$. 令 $T\to\infty$, 则 $J_\infty \leqslant V_{(x_0,r_0)}$, 再根据 J_T 的定义, 易得 $\|z\|_2 \leqslant r[\|w\|_2^2 + x_0^{\mathrm{T}} P_{r_0} x_0]^{1/2}$. □

4 具有鲁棒 H_∞ 性能的估计器设计

对于具有如式 (1)~(3) 形式的奇异连续随机系统, 令其中的不确定项为零, 考虑到其有界误差滤波器的设计问题, 希望状态估计器具有如下形式:

$$E_i \dot{\hat{x}} = K_{Ai}\hat{x} + K_{Bi} y_{(t)}. \tag{7}$$

估计初值为 $\hat{x}_0$, K_{Ai} 和 K_{Bi} 为待求的滤波器增益, 估计器误差为

$$e_{(t)} = x - \hat{x}. \tag{8}$$

由式 (7) 和 (8) 可以得到

$$E_i \mathrm{d}e_{(t)} = E_i \mathrm{d}x - E_i \dot{\hat{x}}\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

再由式 (1) 可得

$$\begin{aligned} E_i \mathrm{d}e_{(t)} =& (A_i - K_{Ai} - K_{Bi} A_{yi}) x_{(t)} \mathrm{d}t + K_{Ai} e_{(t)} \mathrm{d}t + \\ & (B_{wi} - K_{Bi} B_{yi}) w_{(t)} \mathrm{d}t + W_i x_{(t)} \mathrm{d}\omega_{(t)}. \end{aligned}$$

结合式 (2) 和 (3), 得到一组新的增广奇异随机系统

$$\tilde{E}_i \mathrm{d}\tilde{x}_{(t)} = \tilde{A}_i \tilde{x}_{(t)} \mathrm{d}t + \tilde{B}_{wi} \tilde{w}_{(t)} \mathrm{d}t + \tilde{W}_i \tilde{x}_{(t)} \mathrm{d}\omega_{(t)}, \tag{10}$$

$$z_{(t)} = \tilde{A}_{zi} \tilde{x}_{(t)} + \tilde{B}_{zi} \tilde{w}_{(t)}. \tag{11}$$

其中

$$\tilde{x}_{(t)} = [\,x_{(t)} \;\; e_{(t)}\,]^{\mathrm{T}},\ \tilde{w}_{(t)} = [\,w_{(t)} \;\; w_{(t)}\,]^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_i - K_{Ai} - K_{Bi} A_{yi} & -K_{Ai} \end{bmatrix},\ \tilde{A}_{zi} = [\,A_{zi} \;\; 0\,],$$

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_{wi} & 0 \\ B_{wi} & -K_{Bi} B_{yi} \end{bmatrix},\ \tilde{B}_{zi} = [\,B_{zi} \;\; 0\,],$$

$$\tilde{W}_i = \begin{bmatrix} W_i & 0 \\ W_i & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ 0 & E_i \end{bmatrix}.$$

定理 2　具有式 (1)~(3) 形式的奇异连续随机系统, 当其中的不确定性矩阵为零时, 存在误差有界状态估计器 (7) 的条件是存在一组可逆矩阵 P_{1i} 和 P_{2i}, 一组适当维数的矩阵 X_i 和 Y_i, 使得如下形式的矩阵不等式成立:

$$E_i^{\mathrm{T}} P_{1i} = P_{1i}^{\mathrm{T}} E_i \geqslant 0,\ E_i^{\mathrm{T}} P_{2i} = P_{2i}^{\mathrm{T}} E_i \geqslant 0, \tag{12}$$

$$\left[\begin{matrix} \Gamma_{1i} & A_i^{\mathrm{T}} P_{2i} - X_i^{\mathrm{T}} - A_{yi}^{\mathrm{T}} Y_i^{\mathrm{T}} \\ P_{2i}^{\mathrm{T}} A_i - X_i - Y_i A_{yi} & -X_i^{\mathrm{T}} - X_i + \sum\limits_{j=1}^n \lambda_{ij} E_j^{\mathrm{T}} P_{2j} \\ B_{zi}^{\mathrm{T}} A_{zi} + B_{wi}^{\mathrm{T}} P_{1i} & 0 \\ B_{wi}^{\mathrm{T}} P_{2i} & -B_{yi}^{\mathrm{T}} Y_i^{\mathrm{T}} \end{matrix}\right. \rightarrow$$

$$\leftarrow \left.\begin{matrix} A_{zi}^{\mathrm{T}} B_{zi} + P_{1i}^{\mathrm{T}} B_{wi} & P_{2i}^{\mathrm{T}} B_{wi} \\ 0 & -Y_i B_{yi} \\ B_{zi}^{\mathrm{T}} B_{zi} - r^2 I & 0 \\ 0 & -r^2 I \end{matrix}\right] < 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{1i} =& A_i^{\mathrm{T}} P_{1i} + P_{1i}^{\mathrm{T}} A_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} E_j^{\mathrm{T}} P_{1j} + A_{zi}^{\mathrm{T}} A_{zi} + \\ & W_i^{\mathrm{T}} P_{1i} W_i + W_i^{\mathrm{T}} P_{2i} W_i. \end{aligned}$$

证明　根据定理 1, 奇异系统 (10) 随机稳定, 且具有鲁棒 H_∞ 性能的充分条件是存在一组可逆矩阵 Q_i, 使得如下形式的矩阵不等式组成立:

$$\tilde{E}_i^{\mathrm{T}} Q_i = Q_i^{\mathrm{T}} \tilde{E}_i \geqslant 0,$$

$$\left[\begin{matrix} \tilde{A}_i^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i^{\mathrm{T}} \tilde{A}_i + \sum\limits_{j=1}^n \lambda_{ij} \tilde{E}_j^{\mathrm{T}} Q_j + \tilde{A}_{zi}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{zi} + \tilde{W}_i^{\mathrm{T}} Q_i \tilde{W} \\ \tilde{B}_{zi}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{zi} + \tilde{B}_{wi}^{\mathrm{T}} Q_i^{\mathrm{T}} \end{matrix}\right. \rightarrow$$

$$\leftarrow \left.\begin{matrix} \tilde{A}_{zi}^{\mathrm{T}} \tilde{B}_{zi} + Q_i \tilde{B}_{wi} \\ \tilde{B}_{zi}^{\mathrm{T}} \tilde{B}_{zi} - r^2 I \end{matrix}\right] < 0. \tag{14}$$

假设 $Q_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 \\ 0 & P_{2i} \end{bmatrix}$, 根据 $\tilde{E}_i$ 的表达式, 有

$$\tilde{E}_i^{\mathrm{T}} Q_i = Q_i^{\mathrm{T}} \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i^{\mathrm{T}} P_{1i} & 0 \\ 0 & E_i^{\mathrm{T}} P_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1i}^{\mathrm{T}} E_i & 0 \\ 0 & P_{2i}^{\mathrm{T}} E_i \end{bmatrix},$$

则当式 (12) 成立时, 显然 $\tilde{E}_i^{\mathrm{T}} Q_i = Q_i^{\mathrm{T}} \tilde{E}_i \geqslant 0$.

根据式 (10) 和 (11) 中各系数矩阵以及 Q_i 的表达式, 将 $\tilde{A}_i^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i^{\mathrm{T}} \tilde{A}_i + \sum\limits_{j=1}^n \lambda_{ij} \tilde{E}_j^{\mathrm{T}} Q_j + \tilde{A}_{zi}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{zi} + \tilde{W}_i^{\mathrm{T}} Q_i \tilde{W}_i$ 展开, 可以得到

$$\tilde{A}_i^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i^{\mathrm{T}} \tilde{A}_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \tilde{E}_j^{\mathrm{T}} Q_j + \tilde{A}_{zi}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{zi} + \tilde{W}_i^{\mathrm{T}} Q_i \tilde{W}_i =$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{1i} & A_i^{\mathrm{T}} P_{2i} - X_i^{\mathrm{T}} - A_{yi}^{\mathrm{T}} Y_i^{\mathrm{T}} \\ P_{2i}^{\mathrm{T}} A_i - X_i - Y_i A_{yi} & -X_i^{\mathrm{T}} - X_i + \sum\limits_{j=1}^n \lambda_{ij} E_j^{\mathrm{T}} P_{1j} \end{bmatrix}.$$

同样, 将 $\tilde{A}_{zi}^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{zi}+Q_i^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{wi}$ 和 $\tilde{B}_{zi}^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{zi}-r^2I$ 展开, 即

$$\tilde{A}_{zi}^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{zi}+Q_i^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{wi}=\begin{bmatrix} A_{zi}^{\mathrm{T}}B_{zi}+P_{1i}^{\mathrm{T}}B_{wi} & P_{2i}^{\mathrm{T}}B_{wi} \\ 0 & -Y_iB_{yi} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_{zi}^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{zi}-r^2I=\begin{bmatrix} B_{zi}^{\mathrm{T}}B_{zi}-r^2I & 0 \\ 0 & -r^2I \end{bmatrix}.$$

注意到等式 $\tilde{A}_{zi}^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{zi}+Q_i^{\mathrm{T}}\tilde{B}_{wi}=(\tilde{B}_{zi}^{\mathrm{T}}\tilde{A}_{zi}+\tilde{B}_{wi}^{\mathrm{T}}Q_i)^{\mathrm{T}}$, 得到式 (14) 的等价形式如定理 2 中式 (13) 所示, 由此定理得证. □

5 奇异线性随机跳变系统鲁棒估计器设计

下面考虑带有不确定性的奇异线性随机跳变系统的鲁棒估计器设计.

根据引理 1, 式 (13) 成立的充分必要条件是下述矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \varGamma_{2i} & A_i^{\mathrm{T}}P_{2i}-X_i^{\mathrm{T}}-A_{yi}^{\mathrm{T}}Y & A_{zi}^{\mathrm{T}}B_{zi}+P_{1i}^{\mathrm{T}}B_{wi} & P_{2i}^{\mathrm{T}}B_{wi} & A_{zi}^{\mathrm{T}} \\ P_{2i}^{\mathrm{T}}A_i-X_i-Y_iA_{yi} & -X_i^{\mathrm{T}}-X_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_j^{\mathrm{T}}P_{2j} & 0 & -Y_iB_{yi} & 0 \\ B_{zi}^{\mathrm{T}}A_{zi}+B_{wi}^{\mathrm{T}}P_{1i} & 0 & B_{zi}^{\mathrm{T}}B_{zi}-r^2I & 0 & 0 \\ B_{wi}^{\mathrm{T}}P_{2i} & -B_{yi}^{\mathrm{T}}Y_i^{\mathrm{T}} & 0 & -r^2I & 0 \\ A_{zi} & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0, \tag{15}$$

$$\varGamma_{2i}=A_i^{\mathrm{T}}P_{1i}+P_{1i}^{\mathrm{T}}A_i+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_j^{\mathrm{T}}P_{1j}+ W_i^{\mathrm{T}}P_{1i}W_i+W_i^{\mathrm{T}}P_{2i}W_i.$$

用 $A_{(i,t)}$, $B_{w(i,t)}$, $A_{y(i,t)}$, $A_{z(i,t)}$ 代替矩阵不等式 (15) 左边矩阵的 A_i, B_{wi}, A_{yi}, A_{zi}, 根据相应的表达式, 可以得到如下形式的矩阵:

$$\varOmega_i+\varPi_i\varSigma_{(i,t)}E_i+E_i^{\mathrm{T}}\varSigma_{(i,t)}^{\mathrm{T}}\varPi_i^{\mathrm{T}}<0, \tag{16}$$

$$\varOmega_i=\begin{bmatrix} \varGamma_{2i} & A_i^{\mathrm{T}}P_{2i}-X_i^{\mathrm{T}}-A_{yi}^{\mathrm{T}}Y_i^{\mathrm{T}} & A_{zi}^{\mathrm{T}}B_{zi}+P_{1i}^{\mathrm{T}}B_{wi} & P_{2i}^{\mathrm{T}}B_{wi} & A_{zi}^{\mathrm{T}} \\ P_{2i}^{\mathrm{T}}A_i-X_i-Y_iA_{yi} & -X_i^{\mathrm{T}}-X_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_j^{\mathrm{T}}P_{2j} & 0 & -Y_iB_{yi} & 0 \\ B_{zi}^{\mathrm{T}}A_{zi}+B_{wi}^{\mathrm{T}}P_{1i} & 0 & B_{zi}^{\mathrm{T}}B_{zi}-r^2I & 0 & 0 \\ B_{wi}^{\mathrm{T}}P_{2i} & -B_{yi}^{\mathrm{T}}Y_i^{\mathrm{T}} & 0 & -r^2I & 0 \\ A_{zi} & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\varPi_i=\begin{bmatrix} P_{1i}^{\mathrm{T}}D_{Ai} & 0 & 0 & 0 \\ P_{2i}^{\mathrm{T}}D_{Ai} & Y_i^{\mathrm{T}}D_{yi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{1i}^{\mathrm{T}}D_{wi} & B_{zi}^{\mathrm{T}}D_{zi} \\ 0 & 0 & P_{2i}^{\mathrm{T}}D_{wi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{zi} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\varSigma_{(i,t)}=\begin{bmatrix} F_{A(i,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{y(i,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{w(i,t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{z(i,t)} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$E_i=\begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{wi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{zi} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

根据式 (19) 以及不确定性矩阵的定义, 明显有 $\varSigma^{\mathrm{T}}\varSigma\leqslant I$.因此根据引理 2, 式 (15) 成立的充分必要条件是存在一个正实数 ε_i, 使得 $\varOmega_i+\varepsilon_i\varPi_i\varPi_i^{\mathrm{T}}+\varepsilon_i^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_i<0$ 成立. 再根据引理 1, 可以得到矩阵不等式成立的等价条件

$$\begin{bmatrix} \varOmega_i+\varepsilon_i^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_i & \varPi_i \\ \varPi_i^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_i^{-1}I \end{bmatrix}<0.$$

再令 $a_i=\varepsilon_i^{-1}$, 显然, 很容易得到如下的推论:

推论 1 具有观测方程 (2) 和输出方程 (3) 以及状态方程 (1) 的时间连续奇异线性随机系统, 存在形如式 (7) 的误差有界滤波器, 且估计误差满足鲁棒 H_∞ 性能的条件是存在一组可逆矩阵 P_{1i} 和 P_{2i}, 一组适当维数的矩阵 X_i 和 Y_i, 以及一组正实数 a_i, 使得如下形式的矩阵不等式成立:

$$E_i^{\mathrm{T}}P_{1i}=P_{1i}^{\mathrm{T}}E_i\geqslant 0,\ E_i^{\mathrm{T}}P_{2i}=P_{2i}^{\mathrm{T}}E_i\geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} \varOmega_i+a_iE_i^{\mathrm{T}}E_i & \varPi_i \\ \varPi_i^{\mathrm{T}} & -a_iI \end{bmatrix}<0.$$

其中: $\varOmega_i$, $\varPi_i$, E_i 如式 (17), (18), (20) 所示, 滤波器增益

$$K_{Ai}=P_{2i}^{-\mathrm{T}}X_i,\ K_{Bi}=P_{2i}^{-\mathrm{T}}Y_i.$$

证明略.

6 数值算例

给出参数矩阵如下的跳变系统:

$$E_1\,|E_2\,|W_1\,|W_2\ =$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} -2.5 & 0 & -5 & 0 & 0.21 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.2 \end{array}\right],$$

$$\frac{A_1}{A_2}\left|\frac{B_1}{B_2}\right|\frac{A_{z1}}{A_{z2}}=$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1.5 & 3.2 & 0.2 & 1 & 0.4 & 1.4 \\ -1.3 & -1.5 & 0.5 & -0.3 & -0.7 & 1 \\ \hline -1.5 & 1 & -0.5 & -4 & 1 & 0.3 \\ -2.2 & 5.5 & 0.6 & -1 & 1 & 1.6 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{c|c|c} B_{w1} & B_{z1} & D_{A1} \\ \hline B_{w2} & B_{z2} & D_{A2} \end{array} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} -1.3 & 0.3 & 1 & -2 & 0 \\ 1.3 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.1 \\ \hline -0.5 & -1.2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 & 1 & 0.1 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{c|c|c} A_{y1} & B_{z1} & E_{y1} \\ \hline A_{y2} & B_{z2} & E_{y2} \end{array} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0.5 & 0.4 & 1 & 0.1 & -0.2 \\ \hline 2 & 0.2 & 0.5 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{c|c|c} E_{A1} & E_{z1} & E_{w1} \\ \hline E_{A2} & E_{z2} & E_{w2} \end{array} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0.1 & 0.2 & 0.1 & -0.2 & 0.1 & -0.2 \\ \hline 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{array}\right],$$

$$D_{z1}\,|D_{z2}\,|D_{w1}\,|D_{w2}\,|D_{y1}\,|D_{y2} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \begin{matrix}-0.1\\ 0.1\end{matrix} & \begin{matrix}0.3\\ 0.2\end{matrix} & \begin{matrix}-0.1\\ -0.2\end{matrix} & \begin{matrix}0.1\\ 0.1\end{matrix} & -0.5 & 0.1 \end{array}\right].$$

转移概率强度矩阵 $\lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, 正实常数 $r = 6$.

利用Matlab中的LMI工具箱, 计算推论1中的矩阵不等式, 得到一组可行性解

$$P_{11}\,|P_{12} = \left[\begin{array}{cc|cc} -29.0597 & -20.5126 & -13.4037 & -16.5566 \\ -20.5126 & -37.0018 & -16.5566 & -27.6972 \end{array}\right],$$

$$P_{21}\,|P_{22} = \left[\begin{array}{cc|cc} -31.6045 & -32.3761 & -24.0199 & -25.8573 \\ -32.3761 & -49.6033 & -25.8573 & -58.2506 \end{array}\right],$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 63.3115 & 29.7431 \\ 78.3565 & 112.0675 \end{bmatrix},\ Y_1 = \begin{bmatrix} 26.5818 \\ -17.3563 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 68.2091 & -37.1113 \\ 55.5882 & 160.7525 \end{bmatrix},\ Y_2 = \begin{bmatrix} 12.6079 \\ 11.3737 \end{bmatrix},$$

且 $a_1 = 155.3167$, $a_2 = 233.1196$. 计算出滤波器增益如下:

$$K_{A1} = \begin{bmatrix} -1.1619 & 4.1445 \\ -0.8213 & -4.9644 \end{bmatrix},\ K_{B1} = \begin{bmatrix} -3.6200 \\ 2.7127 \end{bmatrix},$$

$$K_{A2} = \begin{bmatrix} -7.4059 & 8.6485 \\ 4.2418 & -6.5987 \end{bmatrix},\ K_{B2} = \begin{bmatrix} -0.6027 \\ 0.0723 \end{bmatrix}.$$

7 结　论

本文将状态估计和随机稳定的定义结合在一起, 利用Lyapunov二次型稳定性理论, 推导出一组与Kalman滤波器具有相似结构的有界误差估计器设计方法, 避免了传统状态估计对后验概率密度函数的推导, 便于理解, 简化了计算量. 仿真结果表明本文方法计算简单, 可获得较为满意的结果.

参考文献(References)

[1] Dai L. Singgular control system[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[2] El-Kebir Boukas. Stochastic swicthing systems: Analysis and design[M]. Basel, Berlin: Birkhauser, 2005.

[3] Xia Y Q, El-Kebir Boukas, Shi P, et al. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems[J]. Automatica, 2009, 45(2): 1504-1509.

[4] olzern, Colaneri P, Nicolao G De. On almost sure stability of continuous-time Markov jumping linear systems[J]. Automatica, 2006, 42(5): 983-998.

[5] Wu Z G, Su H Y, Chu J. State estimation for discrete Markovian jumping neural networks with time delay[J]. Neurocomputing, 2010, 73(3): 2247-2254.

[6] Lu R, Su H, Chu J, et al. Reduced-oreder H filtering for discrete-time singular system with lossy meaurements[J]. Control Theory and Applications, 2010, 4(1): 151-163.

[7] Xia Y Q, Zhang J H, El-Kebir Boukas. Control for discrete singular hybrid systems[J]. Automatica, 2008, 44(1): 2635-2641.

[8] 王洪强, 方洋旺, 伍友利. 一类不确定随机线性系统的滑模变结构控制[J]. 中北大学学报: 自然科学版, 2010, 31(5): 463-469.
(Wang H Q, Fang Y W, Wu Y L. Sliding mode variable structure control for a class of uncertain stochastic linear system[J]. J of North University of China: Natural Science Edition, 2010, 31(5): 463-469.)

[9] 方洋旺, 王洪强, 伍友利. 具有条件马尔科夫结构的离散随机系统最优控制[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(1): 99-102.
(Fang Y W, Wang H Q, Wu Y L. Optimal control for discrete stochastic system with conditional Markov structure[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(1): 99-102.)

[10] 王宝凤. 郭戈. 具有Markovian时延与丢包的离散系统的状态估计[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(12): 1331-1336.
(Wang B F, Guo G. State estimation for discrete-time system with Markovian time-delay and packet loss[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(12): 1331-1336.)

[11] 方洋旺. 王洪强. 伍友利. 一类线性离散时间结构随机跳变系统的逼近滤波算法[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(8): 889-892.
(Fang Y W, Wang H Q, Wu Y L. Anapproximate optimal filtering for discrete stochastic systems with conditional Markov stucture[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(8): 889-892.)