

文章编号: 1001-0920(2012)07-1003-06

一类自同步时变耗散耦合网络内耦合矩阵选择方法

刘歌群, 许晓鸣

(上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

摘要: 研究使一类时变耗散耦合复杂网络自同步的内耦合矩阵选择方法. 在主稳定函数法的基础上, 通过对节点变分方程系统阵的约当标准型进行分析, 给出了几种适用于不同情况的内耦合矩阵选择方法, 以同步速度为依据提出了较优内耦合矩阵的选择命题, 并给出了相应的选择方法. 最后以 3 个典型算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 复杂网络; 同步; 耗散耦合; 内耦合矩阵; 时变

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Choice of inner coupled matrix for a class of auto-synchronous diffusively coupled time-varying complex networks

LIU Ge-qun, XU Xiao-ming

(School of Optical-electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China. Correspondent: LIU Ge-qun, E-mail: lgpapers@sina.com)

Abstract: This paper investigates the way to choice inner coupled matrix to ensure a class of diffusively coupled time-varying complex networks are auto-synchronous. The Jordan canonical form of system matrix of nodes in variational equations is analyzed based on master stability functions method. As a result, several ways to choice inner coupled matrix for different situations are proposed. Besides, the proposition to choice preferable inner coupled matrix according to synchronization speed of network is presented with the choice methods provided. Finally, three typical examples show the effectiveness of the proposed methods.

Key words: complex network; synchronization; diffusively coupling; inner coupled matrix; time-varying

1 引言

同步在信号发生器、核磁共振仪、激光设备和通讯系统等领域发挥着重要的作用, 是复杂网络的重要动力学行为之一, 如何在应用上使网络实现同步非常重要^[1-6]. 获得同步网络的方法主要有: 1) 施加控制使网络同步; 2) 构建自同步网络^[4]. 显然, 后者比前者更为直接. 构建自同步网络的一般思路, 是针对确定规模与确定拓扑结构的网络设计使网络自同步的参数. 该方法的不足是所设计的参数不具有鲁棒性, 当节点和边受损, 或者网络规模增大、边增加时, 网络的同步能力可能被破坏. 如果存在某种通用参数, 不论网络的规模与拓扑结构如何, 网络总能自同步, 则这种参数的设计方法具有重要的理论意义和应用价值.

网络能否同步受节点的动力学特性、内耦合矩阵及外耦合矩阵 3 个因素的影响^[4-6]. 节点的动力学特性和内耦合矩阵决定了网络的同步化区域, 当同步化区域是无界区域时, 总可通过选择耦合强度或者控制增益使网络同步, 这时网络的外耦合矩阵可以有最大的自由度^[7-9]. 外耦合矩阵反映了网络的规模和拓扑结构, 因此设计对网络规模与拓扑结构具有鲁棒性的参数的基本思路, 应当是使网络具有无界同步化区域. 一般而言, 构造网络的节点是事先选定的, 待设计的参数即是网络的内耦合矩阵.

同步化区域是复平面的一个区域, 有有限区域、无限区域及不连通区域组合等情况^[5-10]. 关于什么样的内耦合矩阵可使网络具有无界同步化区域, 针

收稿日期: 2011-01-06; 修回日期: 2011-06-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10975099); 上海市重点学科建设项目(S30501); 上海市科委重点攻关计划项目(072305126); 上海市基础研究重点项目(09JC1408000); 教育部博士点基金项目(20103120110008); 上海理工大学光电信息与计算机工程学院教师创新能力建设项目(GDCX-Y-1212).

作者简介: 刘歌群(1974—), 男, 博士, 从事控制理论、复杂网络等研究; 许晓鸣(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模、智能控制等研究.

对同步状态为平衡点的情况,文献[7]给出了两个条件,文献[8]给出了秩1内耦合矩阵的设计条件和设计方法.关于如何选择内耦合矩阵保证同步化区域的右边界覆盖所有可能的外耦合矩阵的第2大特征值,使网络无需控制便可同步,目前尚不明确.特别是利用内耦合矩阵估算同步化区域右边界的方法,仅在文献[8]中报道过内耦合矩阵秩为1的情况.此外,当网络具有时变耦合强度^[11],节点为时变节点,同步状态是周期轨道及混沌吸引子时,如何选择内耦合矩阵使网络能够自同步,尚未见报道.当内耦合矩阵有多种选择方案时,哪种方案更优,也是一个有待探讨的问题.

本文针对一类时变耗散耦合复杂网络,提出了对网络规模和拓扑结构具有鲁棒性的、能够保证网络自同步的内耦合矩阵选择方法;接着提出了网络同步速度快于孤立节点收敛速度为较优内耦合矩阵选择依据的命题,并有针对性地给出了3种内耦合矩阵的选择方法;最后通过仿真例子验证了相关结论的有效性.

2 问题描述

考虑以 N 个同维时变动力系统 $\dot{x}_i = f(t, x_i)$ 为节点构成的耗散耦合网络

$$\dot{x}_i = f(t, x_i) + \sum_{j=1}^N h_{ij}(t) \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中: $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ 为节点 i 的状态向量, $f(t, \cdot) : R^n \rightarrow R^n$ 为时变光滑向量函数, $\Gamma = (\gamma_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$ 为各节点状态变量之间的内耦合矩阵. 表示网络拓扑结构的外耦合矩阵 $H(t) = (h_{ij}(t))_{N \times N} \in R^{N \times N}$ 定义如下: 节点 j 对节点 i 在时刻 t 有耦合作用时, $h_{ij}(t) > 0$, $h_{ij}(t)$ 表示耦合强度; 节点 j 对节点 i 在时刻 t 没有耦合作用时, $h_{ij}(t) = 0$; 对角线元素定义为 $h_{ii}(t) = - \sum_{j=1, j \neq i}^N h_{ij}(t)$. 对于有向网络, 一般有 $h_{ij}(t) \neq h_{ji}(t)$; 对于无向网络, 有 $h_{ij}(t) = h_{ji}(t)$. 假设网络是连通的, $H(t)$ 为不可约矩阵.

由对角线元素定义可知, 外耦合矩阵满足耗散耦合条件 $\sum_{j=1}^N h_{ij}(t) = 0$, 当所有节点状态相同时, 耦合项自动消失^[4-6]. 耗散耦合条件来源于节点之间通过状态变量之差耦合的情况, 反映了一大类网络的耦合规律, 对于时变网络, 这一条件仍能保持^[11]. 设 $\lambda_1(t) > \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_N(t)$ 为 $H(t)$ 的特征值, 由矩阵理论可知, $H(t)$ 有且仅有一个重数为1的零特征根 $\lambda_1(t)$, 对应同步流形, 对应的右特征向量为 $\frac{1}{\sqrt{N}} [1, 1, \dots, 1]^T$ ^[4-6]. 对于无向网络, $H(t)$ 的特征值均为实数; 对于有向网络, $H(t)$ 的特征值可能为复数.

设 $s(t)$ 为孤立节点状态方程的解, 满足 $\dot{s}(t) = f(t, s(t))$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 若动态网络(1)有 $x_1(t) \rightarrow x_2(t) \rightarrow \dots \rightarrow x_N(t) \rightarrow s(t)$, 则称网络达到渐近同步, $s(t)$ 是同步状态. 特别地, 当不采用任何控制方式时, 网络从任意初始状态出发, 能够在 $s(t)$ 渐近同步, 则称网络是自同步的^[4].

当节点为定常节点时, 网络(1)变为

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N h_{ij}(t) \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

本文研究的问题为: 给定 $f(t, \cdot)$, 如何确定 Γ , 使网络(1)对于任意的 $H(t)$ 都是自同步的.

3 主要结论

定理1 设动力系统 $\dot{x} = f(x)$ 的 Jacobi 矩阵在平衡点 s 的取值 $Df(s)$ Hurwitz 稳定, 有非奇异矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 使 $P^{-1} Df(s) P = J \in R^{n \times n}$ 为约当阵, $\mu_{ii} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 J 阵主对角线元素. 选定矩阵

$$\Gamma = P \bar{\Gamma} P^{-1} \quad (3)$$

其中: $\bar{\Gamma} \in R^{n \times n}$ 为上三角阵, $\bar{\Gamma}$ 的主对角线元素 $\gamma_{ii} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\text{tr}(\bar{\Gamma}) > 0$. 则以 $\dot{x} = f(x)$ 为节点, 以 Γ 为内耦合矩阵组成的任意耗散耦合网络(2)在 s 上是自同步的, 同步化区域 S 为复平面 $\lambda = \alpha + j\beta$ 上直线 $\alpha = \alpha_1$ 以左的复平面. 对于无向网络, 同步化区域 $S = (-\infty, \alpha_1)$, 其中

$$\alpha_1 = \min_i \frac{-\mu_{ii}}{\gamma_{ii}} > 0. \quad (4)$$

证明 先证对于满足耗散耦合条件的任意外耦合矩阵 $H = (h_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$ 定理成立, 其中 H 可以是非对称的.

设网络(2)中 $h_{ij}(t) \equiv h_{ij}$, 把网络(2)在 s 上线性化, 令 $y_i = x_i - s$, 得到方程

$$\dot{y}_i = Df(s) y_i + \sum_{j=1}^N h_{ij} \Gamma y_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

其中 $Df(s)$ 为 $f(\cdot)$ 的 Jacobi 矩阵在 s 处的取值.

利用 Kronecker 积把网络(5)整理为

$$\dot{y} = (I_N \otimes Df(s) + H \otimes \Gamma) y, \quad (6)$$

其中 $y = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T]^T$.

由 Schur 定理, 必存在可逆矩阵 Q 使 $Q^{-1} H Q = \Lambda$, 其中 Λ 为上三角阵, Λ 的对角线元素为 H 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. 考虑相似变换 $y = (Q \otimes I_n) \eta$, 由 Λ 的上三角结构及文献[12-13]相关内容, 网络(6)的稳定性与以下 N 个低维子系统的稳定性等价:

$$\dot{\eta}_i = (Df(s) + \lambda_i \Gamma) \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

其中

$$\eta = [\eta_1^T, \eta_2^T, \dots, \eta_N^T]^T,$$

$$\eta_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in})^T.$$

由式(7)可知网络(2)的主稳定方程^[5]为

$$\dot{\xi} = (Df(s) + \lambda\Gamma)\xi = [Df(s) + (\alpha + j\beta)\Gamma]\xi. \quad (8)$$

由已知条件可知, $J + \lambda\bar{\Gamma}$ 的特征值为 $\{\mu_{ii} + \lambda\gamma_{ii} | i = 1, 2, \dots, n\}$. 由 $P(J + \lambda\bar{\Gamma})P^{-1} = Df(s) + \lambda\Gamma$ 知 $Df(s) + \lambda\Gamma$ 的特征值也为 $\{\mu_{ii} + \lambda\gamma_{ii} | i = 1, 2, \dots, n\}$. 由 $\bar{\Gamma} \in R^{n \times n}$ 和 $P \in R^{n \times n}$ 知 $\Gamma = P\bar{\Gamma}P^{-1} \in R^{n \times n}$, 满足内耦合矩阵应当为实矩阵的条件.

由 $Df(s)$ Hurwitz 稳定和 $J \in R^{n \times n}$ 知 $\mu_{ii} < 0$, 又由 $\gamma_{ii} \geq 0$ 和 $\text{tr}(\bar{\Gamma}) > 0$ 知, 使所有 $\mu_{ii} + \lambda\gamma_{ii}$ 具有负实部的 $\lambda = \alpha + \beta i$ 的范围为 $\alpha < \alpha_1 = \min_i \frac{-\mu_{ii}}{\gamma_{ii}} > 0$ 的复数. 故以 $\dot{x} = f(x)$ 为节点, 以 Γ 为内耦合矩阵组成的任意耗散耦合网络(2)的同步化区域^[5] S 覆盖整个左半复平面. 由 0 为 H 的最大特征值知, 该网络对于满足耗散耦合条件的任意外耦合矩阵 H 总是自同步的, 且对于无向网络, 同步化区域 $S = (-\infty, \alpha_1)$.

对于任意给定的 $\tau \in R^+$, 由以上证明可知, 定理对第2节中定义的外耦合矩阵 $H(\tau)$ 总成立. 由 τ 的任意性, 定理对所有的 $H(\tau), \tau \in R^+$ 成立, 故定理对时变耗散耦合网络(2)成立. \square

注1 定理1提供的方法是利用 $Df(s)$ 来计算 Γ , 当节点为时变系统, 或者同步状态 $s(t)$ 为周期轨道及混沌轨道时, $Df(s(t))$ 是时变的, 难以直接用来计算, 所以定理1适用于同步状态为平衡点的网络(2).

根据定理1计算 Γ 需要事先知道 $Df(s)$, 以下给出一种不要求 $Df(s)$ 为已知的 Γ 选择方法.

定理2 设时变动力系统 $\dot{x} = f(t, x)$ 有稳定的平衡点或周期轨道 $s(t)$. 当选择 $\Gamma = kI_n, k \in R, k > 0$ 时, 以 $\dot{x} = f(t, x)$ 为节点, 以 Γ 为内耦合矩阵组成的任意耗散耦合网络(1)在 $s(t)$ 上是自同步的.

证明 把网络(1)在 $s(t)$ 上线性化, 经过类似定理1证明步骤的处理后, 得到网络(1)的主稳定方程为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (Df(s(t)) + \lambda\Gamma)\xi = \\ &[Df(s(t)) + (\alpha + j\beta)\Gamma]\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

设 $Df(s(t))$ 的特征值为 $\mu_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, 代入 $\Gamma = kI_n$, 知 $Df(s(t)) + \lambda\Gamma$ 的特征值为 $\mu_i(t) + k\lambda$.

当 $s(t)$ 为稳定的平衡点时, 对于任意的 $t \in (0, \infty)$ 总有 $\mu_i(t) < 0$, 由 0 为 $H(t)$ 的最大特征值可知, 对于给定的 $k > 0$ 总有 $\mu_i(t) + k\lambda < 0$, 故网络(1)在平衡点上是自同步的.

当 $s(t)$ 为稳定的周期轨道时, 对于任意的 $t \in (0, \infty)$ 总有 $\mu_i(t) \leq 0$, 由 0 为 $H(t)$ 的最大特征值可知, 对于给定的 $k > 0$ 总有 $\mu_i(t) + k\lambda_j < 0, j = 2, 3, \dots, N$.

由文献[11]的结论知, 网络(1)在周期轨道上是自同步的. \square

注2 在定理1中, 当选择 $\bar{\Gamma} = kI_n$ 时, 可以得到与定理2类似的结论, 由于无需知晓 $Df(s)$, 定理2的应用范围可以拓展到时变节点和周期轨道的同步.

注3 除了平衡点和周期轨道之外, 同步状态 $s(t)$ 为混沌轨道也是一种常见的情况. 本文研究的目的是使网络对任意的 $H(t)$ 都为自同步的, 由于 $H(t)$ 的任意性, 同步化区域只能为无限区域, 由于 $\lambda_2(t)$ 可能无限接近原点, 同步化区域只有覆盖原点才能保证覆盖所有可能的 $\lambda_2(t)$. 而同步化区域覆盖原点的情况恰与节点在 $s(t)$ 上的李亚普诺夫指数小于等于 0 的情况相对应^[5-6], 所以 $s(t)$ 不能是混沌轨道. 换言之, 孤立节点在 $s(t)$ 上稳定是保证网络在任意耗散耦合情况下自同步的必要条件.

由定理1和定理2可知, 内耦合矩阵 Γ 有多种选择方法, 何种选择方法较优是进一步研究的问题, 以下从同步速度的角度进行分析.

命题1 网络(1)在平衡点 $s(t)$ 上主稳定方程最大横截李亚普诺夫指数^[1-2,4-5]的实部, 若小于孤立节点最大李亚普诺夫指数的实部, 则网络的同步速度快于孤立节点的收敛速度, 反之网络的同步速度慢于孤立节点的收敛速度.

由相似关联大系统的关联稳定性理论^[14-15]可知, 孤立节点耦合为网络之后, 收敛过程可能变快, 也可能变慢, 故命题1的假设条件存在, 再由已知条件可推得结论.

由命题1, 如果选择内耦合矩阵 Γ 后, 主稳定方程最大横截李亚普诺夫指数的实部小于孤立节点最大李亚普诺夫指数的实部, 则以同步速度为衡量, 该内耦合矩阵的选择方法即为较优的方法. 以下给出3种较优内耦合矩阵的选择方法.

推论1 设动力系统 $\dot{x} = f(x)$ 的 Jacobi 矩阵在平衡点 s 的取值 $Df(s)$ Hurwitz 稳定, 有非奇异矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 使 $P^{-1}Df(s)P = J \in R^{n \times n}$ 为约当阵, $\mu_{ii}(i = 1, 2, \dots, n)$ 为 J 阵主对角线元素, k 重特征值 $\mu_{i_1 i_1} = \mu_{i_2 i_2} = \dots = \mu_{i_k i_k}$ 为 $Df(s)$ 的最大特征值. 选定矩阵 $\Gamma = P\bar{\Gamma}P^{-1}, \bar{\Gamma} \in R^{n \times n}$ 为上三角阵, $\bar{\Gamma}$ 的主对角线元素 $\gamma_{ii} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\gamma_{i_j i_j} > 0, j = 1, 2, \dots, k$. 则以 $\dot{x} = f(x)$ 为节点, 以 Γ 为内耦合矩阵组成的任意耗散耦合网络(2)的自同步速度总快于孤立节点的收敛速度.

证明 由定理1知网络自同步. 由定理1的证明, 易知网络主稳定方程最大横截李亚普诺夫指数的

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & * & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -10 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -11 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & -14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

其中: $a = 1.5 + 0.5 \sin(5\pi t)$, $b = 2 - 0.5e^{-t}$, $c = 3 - \cos(4\pi t)$, $d = 2.4 + e^{-t}$.

3) 网络 III: 4 节点时变星形耦合无向网络 ($N =$

4). 网络外耦合矩阵为

$$H(t) = \begin{bmatrix} * & a & b & c \\ a & * & 0 & 0 \\ b & 0 & * & 0 \\ c & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

取 $\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 得 $\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -4.5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 6.5 \end{bmatrix}$,

与 $Df(s)$ 两重最大特征值 -2 对应的 $\gamma_{22} = 2, \gamma_{33} = 1$ 均大于 0. 通过仿真得到 3 个网络状态变化曲线如图 1 所示. 由图 1 可见, 3 个网络都是自同步的, 各节

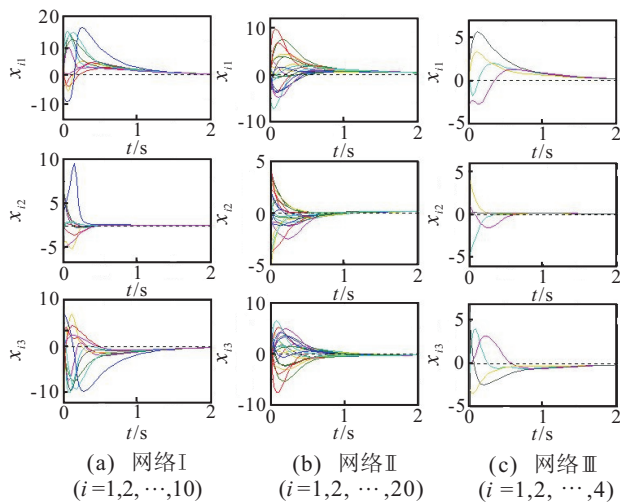


图 1 算例 1 网络状态变化曲线

点状态变量都是先合并为一条曲线然后再向 0 趋近, 由此说明网络同步速度快于孤立节点收敛速度.

算例 2 设 10 个 3 维非线性节点模型^[18]为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i2} \\ x_{i3} \\ [2(1 - x_{i1}^2 - x_{i2}^2 - x_{i3}^2) - 1](x_{i2} + x_{i3}) - x_{i1} \end{bmatrix},$$

孤立节点具有如图 2 所示的稳定周期轨道.

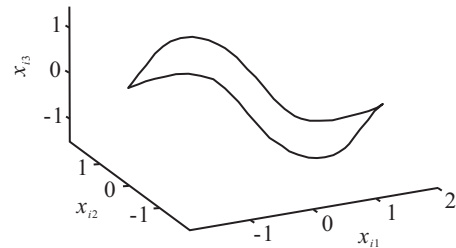


图 2 算例 2 的孤立节点周期轨道

选择与例 1 网络 I 拓扑结构相同的时变无向网络, 网络外耦合矩阵设为

$$H(t) = \begin{bmatrix} * & a & b & b & 0 & c & a & a & a & d \\ a & * & a & 0 & a & 0 & 0 & b & a & d \\ b & a & * & a & 0 & c & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & * & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ d & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

其中

$$a = 1 + 0.3 \sin(4\pi t);$$

$$b = 2 - e^{-t};$$

$$c = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 0.5; \\ 0, & 0.5 \leq t; \end{cases}$$

$$d = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 0.3; \\ 2, & 0.3 \leq t. \end{cases}$$

可知节点 ⑩ 在 $t = 0.3s$ 时连入网络, 节点 ⑥ 在 $t = 0.5s$ 时从网络中断开. 选择 $\Gamma_1 = 0.05I_n$, 得到网络同步演化曲线如图 3 所示. 图 3 表明, 节点 ⑩ 在连入网络后, 与其他节点取得了同步, 而节点 ⑥ 的断开, 对网络的自同步没有产生影响.

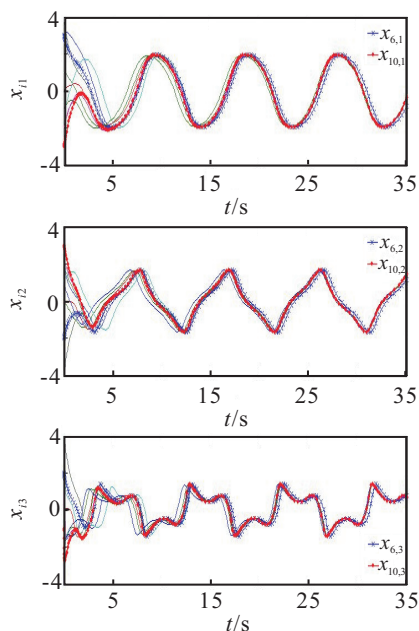


图3 算例2网络状态变化曲线

5 结论

本文把构建同步网络的问题简化为内耦合矩阵的选择问题. 通过选择内耦合矩阵可以保证任意时变耗散耦合网络的自同步能力. 不论将要构建的网络规模多大, 拓扑结构如何, 也不论网络在运行过程中节点和边是否增减, 节点之间的耦合强度怎样变化, 网络始终是自同步的. 此外, 从同步速度的角度出发, 提出了3种较优内耦合矩阵的选择方法. 本文方法主要适用于同步状态是平衡点和周期轨道的情形, 定理1对有向网络也是适用的, 定理2对时变节点网络也是适用的. 最后分别以无标度有向网络、小世界无向网络、星形耦合无向网络和运行过程中有节点加入和断开的无标度网络为例, 对本文方法进行了验证.

参考文献(References)

- [1] 郭雷, 许晓鸣. 复杂网络[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2006.
(Guo L, Xu X M. Complex networks[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House, 2006.)
- [2] Alex Arenas, Albert Diaz Guiler, Jurgen Kurths, et al. Synchronization in complex networks[J]. Physics Reports, 2008, 469(3): 93-153.
- [3] Pietro D, Mario B, Thomas E G, et al. Synchronization and control of complex networks via contraction, adaptation and evolution[J]. IEEE Circuits and System Magazin, 2010, 10(3): 64-82.
- [4] Guanrong Chen, Xiaofan Wang, Xiang Li, et al. Some recent advances in complex networks synchronization[C].

Recent Advances in Nonlinear Dynamics and Synchronization. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009: 3-16.

- [5] Louis M Pecora, Thomas L Carroll. Master stability functions for synchronization coupled systems[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(10): 2109-2112.
- [6] Yonghong Chen, Govindan Rangarajan, Mingzhou Ding. General stability analysis of synchronized dynamics in coupled systems[J]. Physical Review E, 2003, 67(2): 026209.
- [7] Chao Liu, Zhisheng Duan, Guanrong Chen, et al. Analyzing and controlling the network synchronization regions[J]. Physica A, 2007, 386(1): 531-542.
- [8] Zhisheng Duan, Guanrong Chen, Lin Huang. Complex network synchronizability: Analysis and control[J]. Physical Review E, 2007, 76(5): 056103.
- [9] Zhisheng Duan, Guanrong Chen, Lin Huang. Disconnected synchronized regions of complex dynamics network[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(4): 845-849.
- [10] Wang X F, Chen G. Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility[J]. IEEE Trans on Circuits & Systems-I, 2002, 49(1): 54-62.
- [11] Jinhu Lü, Guanrong Chen. A time varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(6): 841-846.
- [12] Daniel J Stilwell, Erik M Bollt, Gray Roberson. Synchronization of time-varying networks under fast switching[C]. Proc of American Control Conf. Minneapolis: IEEE Press, 2005: 5556-5561.
- [13] Wu Jianshe, Jiao Licheng. Synchronization in complex delayed dynamical networks with nonsymmetric coupling[J]. Physica A, 2007, 386(1): 513-530.
- [14] Mohammad Jamshidi. Large-scale systems modeling and control[M]. Beijing: Science Press, 1986.
- [15] 王翼. 大系统控制——方法和技术[M]. 天津: 天津大学出版社, 1993.
(Wang Y. Large-scale systems—Methodology and technology[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1993.)
- [16] Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [17] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [18] Mulholland R J. Nonlinear oscillations of a third order differential equation[J]. J of Nonlinear Mech, 1971, 6(3): 279-294.