

文章编号: 1001-0920(2012)09-0000-00

一种基于状态估计的鲁棒型预测控制器

刘 斌^{1,2}, 席裕庚²

(1. 南昌航空大学 自动化系, 南昌 330063; 2. 上海交通大学 a. 自动化系,
b. 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240)

摘 要: 针对某些情况下只能得到系统的状态估计, 当其作为预测控制的初始状态时传统方法无法保证其目标函数递减的问题, 提出一种针对状态估计的预测控制器, 由该控制器得到的反馈控制律可以使受控系统渐近稳定. 进而, 给出了相应的算法, 并通过仿真实例验证了所得结论的正确性.

关键词: 预测控制; 状态估计; 估计误差; 矩阵不等式; 渐近稳定

中图分类号: TP273

文献标识码: A

A state estimation based robust model predictive controller

LIU Bin^{1,2}, XI Yu-geng²

(1. Automation Department, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China; 2a. Automation Department, 2b. Key Laboratory of System Control and Information Processing of Ministry of Education, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China. Correspondent: LIU Bin, E-mail: lb98029@sohu.co)

Abstract: In many cases, system state can not be obtained directly, and when the state estimation is used as the initial condition for model predictive control(MPC), it can not be guaranteed that the objective function is decreasing. Therefore, a state estimation based MPC is proposed and the system stability can be achieved by a linear feedback controller. Simulation results show the correctness of the conclusions.

Key words: model predictive control(MPC); state estimation; estimation error; linear matrix inequalities(LMI); asymptotical stability

1 引 言

近几十年来, 模型预测控制(MPC)已成为控制界研究的热点之一^[1]. 对于预测控制的研究, 很多工作大都围绕着稳定性和鲁棒性展开. Mayne 等^[2]总结性地给出了采用 MPC 策略的闭环系统渐近稳定的充分条件 A1, A2, A3 和 A4, 与稳定性相关的文献还可以参见文献 [3] 等.

稳定性研究的对象是无模型失配和无外加扰动的名义系统. 当系统存在失配或扰动时, 如何使系统鲁棒稳定已成为研究的焦点. 预测控制的鲁棒性研究主要针对两类系统展开, 即存在外加扰动的系统和存在模型失配的系统. 对于前者, 除传统的 min-max 控制策略外, 近年来学者们通过对鲁棒不变集的研究, 将鲁棒预测控制的目标定义为驱动系统状态到该集合中, 而且为了保证每一步解的可行性, 可以对控制

器的约束域进行一定修正. 文献 [4] 将原系统的约束域进行了消减, 并将控制器的形式定义为名义系统最优解与系统状态偏差的线性控制律之和的形式, 进而得到了系统的鲁棒稳定性. 相关的研究还可以参见文献 [5-7] 等.

针对另一类存在模型失配系统的鲁棒性问题, 文献 [8] 将原问题转化成易解的 LMI 形式, 并得到了系统控制律的线性形式. 针对目标函数中存在状态/输入耦合的情况, [9] 给出了一个增广型的系统稳定性条件. 相关研究还可以参见文献 [10-12].

一般大都在预测控制中假设系统状态可以直接得到. 然而, 实际上往往只能得到系统的状态估计, 由于未来系统输入和输出的信息未知, 按常规预测控制方法难以进行在线优化. 本文研究的意义在于: 在初始估计状态存在不确定性时, 由传统观测器设计理论

收稿日期: 2011-01-20; 修回日期: 2011-09-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60934007, 61074060); 江西省科技支撑计划项目(2010BGA01000); 江西省教育厅科技项目(GJJ11516).

作者简介: 刘斌(1975-), 男, 讲师, 从事预测控制和电力电子的研究; 席裕庚(1946-), 男, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、智能机器人等研究

是可以得到稳定控制系统的,但本文考虑了系统约束(见第3节),这时不能再采用传统的观测器设计方法,而要用预测控制的方法进行处理,在预测控制设计中需对系统未来状态进行预测.但是,由于初始估计的不确定性,造成了未来状态估计的不确定性,需将初始状态估计不确定性对未来状态估计的影响包含在稳定性分析中加以考虑.这就是本文要解决的问题.

2 预备知识

考虑如下线性时不变离散动态系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in X \subset R^n$ 为系统状态; $u(k)$ 为系统输入; $y(k)$ 为系统输出; A, B, C 分别为相应维数的矩阵; X 为包含原点的紧集; $y(k)$ 直接可测量. 考虑该系统的线性状态观测器如下:

$$z(k+1) = Az(k) + Bu(k) + AH(y(k) - Cz(k)),$$

or

$$z(k+1) = Az(k) + Bu(k) + AHCe(k). \quad (2)$$

其中: $z(k)$ 为系统(1)在 k 时刻的状态估计; $e(k) = x(k) - z(k)$ 为 k 时刻的状态估计误差,且有

$$e(k+1) = \Pi e(k), \quad (3)$$

其中 $\Pi = A(I - HC)$. 假设 $|\lambda(\Pi)| < 1$, 则可以提供一个稳定的状态观测器.

由式(2)可以看出,未来状态估计值 $z(k+i)$ 的计算涉及到未知的未来误差 $e(k+i-1)$ 或未来输出 $y(k+i-1)$, $i = 1, 2, \dots$, 因此不可能精确递推. 注意到,对于外加扰动型鲁棒预测控制,大多将外来扰动定义为有界,并在其基础上研究鲁棒正不变集. 本文对估计误差也进行如下假设:

假设 1 假设已知 k 时刻估计误差 $e(k)$ 的范围,用 $\{e(k)\}$ 表示, $\{e(k)\}$ 为一个包含原点的凸集且其顶点为 $e^1(k), e^2(k), \dots, e^L(k)$.

对于 L 的取值,要求该凸集能包含状态估计误差. 一般对于 n 维变量, $L \geq n + 1$.

依据式(3),有 $\{e(k+1)\} = \Pi\{e(k)\}$ 且 $e^1(k+1) = \Pi e^1(k), e^2(k+1) = \Pi e^2(k), \dots, e^L(k+1) = \Pi e^L(k)$.

一般情况下,只能得到系统的状态估计,故考虑以观测器(2)为状态方程的无穷时域 MPC 控制器 C0 如下:

$$\begin{aligned} \min_{\{u(k+i|k)\}} J(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \|z(k+i|k)\|_Q^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2, \\ \text{s.t. 式(2)和(3), } e(k) &\in \{e(k)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

因为实际 $e(k)$ 未知,除当前时刻的估计 $z(k|k) = z(k)$ 外,其余的 $z(k+1|k)$ 和 $z(k+2|k)$ 等变量也是未

知的,无法通过式(2)和(3)建立起 $z(k+i|k)$ 与 $u(k+i|k)$ 的确切关系,所以在解决该无穷时域问题时会有困难. 注意到,由假设 1 可以知道 $e(k)$ 的范围,为使系统稳定,不妨从鲁棒预测控制的角度考虑该问题. 首先给出一些定义和引理.

定义 1 定义 $E(s, t) = \text{Co}\{e^1(s), \dots, e^L(s), \dots, e^1(s+1), \dots, e^L(s+1), \dots, e^1(t), \dots, e^L(t)\}$, $s \leq t$, 即 $E(s, t)$ 表示由 s 到 t 时刻所有状态估计范围顶点组成的凸集.

引理 1 存在一个正整数 $\bar{N} \geq 0$, 使得

$$E(0, \bar{N}) \supseteq E(\bar{N} + 1, \infty), \quad (5)$$

且对于任意正整数 $v \geq 0$, 有

$$E(v, \bar{N} + v) \supseteq E(\bar{N} + v + 1, \infty). \quad (6)$$

证明略.

定义 2 设 0 时刻为系统初始时刻, $z(0)$ 为系统在该时刻的状态估计. 令 $z^1(0) = z^2(0) = \dots = z^L(0)$, 定义 $z^i(k)$ 为以 $z^i(0)$ 为初始状态估计, $e^i(0)$ 为初始误差, 输入为 $u^i(0), u^i(1), \dots, u^i(k-1)$ 时由式(2)和(3)得到的 k 时刻状态估计 ($i = 1, 2, \dots, L$).

引理 2 设 $x(k)$ 为系统 k 时刻状态, 系统各时刻输入为 $u(k) = F(k)z(k)$, 而估计误差 $e(k) \in \{e(k)\}$, 且对于 $z^i(k)$, 其各时刻输入为 $u^i(k) = F(k)z^i(k)$, 则有下式成立:

$$\begin{aligned} x(k) \in \text{Co}\{z^1(k) + e^1(k), z^2(k) + e^2(k), \dots, \\ z^L(k) + e^L(k)\}, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

证明略.

引理 3^[8](Schur引理) 设矩阵 $H_1 = H_1^T$, 且两矩阵非奇异 $H_2 = H_2^T$, 则

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_3^T \\ H_3 & H_2 \end{bmatrix} > 0$$

等同于如下两组不等式:

$$\begin{aligned} H_1 > 0, H_1 - H_3^T H_2^{-1} H_3 > 0; \\ H_2 > 0, H_2 - H_3 H_1^{-1} H_3^T > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

本文的目的是寻找鲁棒预测控制器,在只能得到系统状态估计的情况下有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$.

3 基于状态估计的 LMI 预测控制器

由上述可知,可以从鲁棒的角度考虑该无穷时域预测控制问题. 而鲁棒预测控制大多利用 min-max 原理分析系统性能,文献[8]通过建立某 Lyapunov 函数与目标函数的某种关系,可以较为容易地得到 MPC 性能指标的一个显式上界,从而将原问题转化为对该上界的最小化问题. 类似于文献[8],下面将问题 C0 转化为一个 min-max 问题. 为此,应先得到 $J(k)$ 的一个

上界.

令 $V(k, x(k+i|k)) = x^T(k+i|k)P(k)x(k+i|k)$, 且有如下关系成立:

$$V(k, x(k+i|k)) - V(k, x(k+i+1|k)) \geq$$

$$\|z(k+i|k)\|_Q^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2, \quad i = 0, 1, \dots \quad (9)$$

当 i 从 0 到 ∞ 时, 将上式迭加可得

$$V(k, x(k|k)) \geq J(k), \quad (10)$$

即 $J(k)$ 的上界为 $V(k, x(k|k))$. 类似于文献[8]中的处理办法, 该预测控制问题便成为在 k 时刻寻找控制律, 使得 $V(k, x(k|k))$ 最小. 根据 min-max 原理, 上述问题可转变为对 $x^T(k|k)P(k)x(k|k)$ 求最小值. 然而, 由于 $x(k|k)$ 未知, 不能象文献[8]中那样进行类似处理. 注意到, 若可以得到 $x^T(k|k)P(k)x(k|k)$ 的某个上界, 则可以对该上界进行优化.

引理 4 设 $x(k)$ 和 $z^i(k)$ 满足引理 2 中的条件, 各时刻估计误差 $e(k) \in \text{Co}\{e^1(k), e^2(k), \dots, e^L(k)\}$, 若对于 $z^i(k) + e^i(k)$, 有

$$\begin{aligned} \gamma(k) &\geq (z^i(k) + e^i(k))^T P(k) \times (z^i(k) + e^i(k)), \\ &i = 1, 2, \dots, L, \end{aligned}$$

则有 $\gamma(k) \geq x^T(k|k)P(k)x(k|k)$.

证明 利用 Schur 引理, 根据引理条件, 有

$$\begin{bmatrix} \gamma(k) & (z^i(k) + e^i(k))^T \\ z^i(k) + e^i(k) & P^{-1}(k) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, L.$$

根据引理 2, 有

$x(k|k) \in \text{Co}\{z^1(k) + e^1(k), z^2(k) + e^2(k), \dots, z^L(k) + e^L(k)\}$, 故由上式易知下述关系成立:

$$\begin{bmatrix} \gamma(k) & x^T(k|k) \\ x(k|k) & P^{-1}(k) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (12)$$

即 $x^T(k|k)P(k)x(k|k)$ 的一个上界为 $\gamma(k)$. \square

综上所述, 满足一定条件时, $x^T(k|k)P(k)x(k|k)$ 的上界可由 $\gamma(k)$ 决定, 此时依据 min-max 原理进行优化, 其目标函数可取为 $\gamma(k)$. 取系统 $(k+i|k)$ 时刻的输入为 $F(k)z(k+i|k)$, 则下面的控制器和定理给出了满足式(9)的 $P(k)$ 和 $F(k)$ 的条件:

$$\text{C1} \quad \min_{\gamma(k), S(k), T(k)} \gamma(k); \quad (13)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} 1 & (z^l(k) + e^l(k))^T \\ (z^l(k) + e^l(k)) & S(k) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (14)$$

$$l = 1, 2, \dots, L;$$

$$M_1 \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, \bar{N}, \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (15)$$

其中: $z^l(k)$ 如引理 2 中所示, 且为 $F(k) = F^*(k)$ 时所

得到; 而

$$\begin{aligned} e^j(k+i) &= [e_1^j(k+i) \quad e_2^j(k+i) \quad \dots \quad e_n^j(k+i)]^T, \\ \bar{e}^j(k+i) &= \text{diag}\{e_1^j(k+i), e_2^j(k+i), \dots, e_n^j(k+i)\}; \\ \bar{N} &\text{为引理 1 中定义的常数, 且} \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_1^{11} & M_1^{12} \\ M_1^{21} & M_1^{22} \end{bmatrix}.$$

式中

$$M_1^{11} =$$

$$\begin{bmatrix} S(k) & \bar{e}^j(k+i) \\ (\bar{e}^j(k+i))^T & (\bar{e}^j(k+i))^T + \bar{e}^j(k+i) - S(k) \end{bmatrix},$$

$$M_1^{21} = (M_1^{12})^T = \begin{bmatrix} AS(k) + BT(k) & A\bar{e}^j(k+i) \\ S(k) & 0 \\ T(k) & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_1^{22} = \begin{bmatrix} S(k) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(k)Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(k)R^{-1} \end{bmatrix}.$$

定理 1 取 $J(k)$ 的上界为上述的 $\gamma(k)$, 则满足式(9)且使 $\gamma(k)$ 最小的反馈矩阵 $F^*(k)$ 以及 $P^*(k)$ 可由下式得到:

$$\begin{aligned} F^*(k) &= (T^*(k))^{-1}S^*(k), \\ P^*(k) &= \gamma^*(k)(S^*(k))^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $S^*(k), T^*(k)$ 和 $\gamma^*(k)$ 为控制器 C1 的解.

证明 定理 1 的证明分为两部分, 主要集中于后者. 第 1 部分证明控制器 C1 使 $\gamma(k)$ 最小; 第 2 部分证明 C1 的解满足式(9). 尽管 $x(k+i|k)$ 是未知的, 但考虑到引理 2, 系统状态可以进行多包包含, 由下文中的证明可知, 当式(15)成立时, 意味着 $V(k, x(k|k))$ 递减或式(9)成立.

第 1 部分的证明. 由于取 $J(k)$ 的上界为 $\gamma(k)$, 而由引理 4 中的条件可知, 应有

$$\gamma(k) \geq (z^l(k) + e^l(k))^T P(k)(z^l(k) + e^l(k)).$$

根据 min-max 原理, 对目标函数的上界进行最小化处理, 便可得到如下优化问题:

$$\text{C1}' \quad \min \gamma(k); \quad (17)$$

$$\text{s.t.} \quad \gamma(k) \geq (z^l(k|k) + e^l(k))^T P(k)(z^l(k|k) + e^l(k)), \quad l = 1, 2, \dots, L;$$

$$\text{式(2)和(3), } e(k) \in \{e(k)\}. \quad (18)$$

令 $P(k) = \gamma(k)S^{-1}(k)$, 代入式(18)并化为 LMI 形式, 便可得到式(14).

第 2 部分的证明. 因为 $x(k+i+1|k) = z(k+i+1|k) + e(k+i+1)$, 而 $z(k+i+1|k) = Az(k+i|k) + Bu(k+i|k) + AHCe(k+i)$ 且 $e(k+i+1) = A(I-HC)e(k+i)$, 所以有

$$x(k+i+1|k) =$$

$$Az(k+i|k) + Bu(k+i|k) + Ae(k+i). \quad (19)$$

又因为 $x(k+i|k) = z(k+i|k) + e(k+i)$, 将式(19)代入(9), 且 $u(k+i|k) = F(k)z(k+i|k)$, 得

$$\begin{aligned} & \|z(k+i|k) + e(k+i)\|_{P(k)}^2 - \\ & \|[A + BF(k)]z(k+i|k) + Ae(k+i)\|_{P(k)}^2 \geq \\ & \|z(k+i|k)\|_Q^2 + \|F(k)z(k+i|k)\|_R^2. \end{aligned} \quad (20)$$

令

$$\begin{aligned} e(k+i) &= \\ [e_1(k+i) \ e_2(k+i) \ \cdots \ e_n(k+i)]^T &= \\ \bar{e}(k+i) \times \bar{1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{e}(k+i) &= \\ \text{diag}\{e_1(k+i), e_2(k+i), \dots, e_n(k+i)\}, \\ \bar{1} &= [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T, \end{aligned}$$

则由式(20)可得

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} I & \bar{e}(k+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k+i|k) \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\|_{P(k)}^2 - \\ & \left\| \begin{bmatrix} A + BF(k) & A\bar{e}(k+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k+i|k) \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\|_{P(k)}^2 \geq \\ & \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k+i|k) \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\|_Q^2 + \\ & \left\| \begin{bmatrix} F(k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k+i|k) \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\|_R^2. \end{aligned} \quad (21)$$

上式成立的一个充分条件为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P(k) & P(k)\bar{e}(k+i) \\ \bar{e}^T(k+i)P(k) & \bar{e}^T(k+i)P(k)\bar{e}(k+i) \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} A^T + F^T(k)B^T \\ \bar{e}^T(k+i)A^T \end{bmatrix} P(k) \begin{bmatrix} A + BF(k) & A\bar{e}(k+i) \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F^T(k)RF(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)成立的一个充分条件是如下 LMI 不等式成立(具体推导略):

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_2^{11} & M_2^{12} \\ M_2^{21} & M_2^{22} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} M_2^{11} &= \begin{bmatrix} S(k) & \bar{e}(k+i) \\ \bar{e}^T(k+i) & \bar{e}^T(k+i) + \bar{e}(k+i) - S(k) \end{bmatrix}, \\ M_2^{21} &= (M_2^{12})^T = \begin{bmatrix} AS(k) + BT(k) & A\bar{e}(k+i) \\ S(k) & 0 \\ T(k) & 0 \end{bmatrix}, \\ M_2^{22} &= M_1^{22}. \end{aligned}$$

注意到

$$\bar{e}(k+i) \in \text{Co}\{\bar{e}^1(k+i), \bar{e}^2(k+i), \dots, \bar{e}^L(k+i)\},$$

所以当对于所有的 $\bar{e}^j(k+i)$ 或 $e^j(k+i)$ ($j=1, 2, \dots, L$), 式(23)成立时, 对于任一 $\bar{e}(k+i)$ 该式也成立. 另外, 由引理1可知, 当对于 $E(K, K + \bar{N})$ 中各顶点式(23)成立时, 对于任何 $\bar{e}(k+i)$ 该式也成立, 故可取 $i=0, 1, \dots, \bar{N}$. 对比式(15)和(23)可知, 当式(15)成立时, 必有式(23)或(22)成立, 而式(22)又是(9)的一个充分条件.

综上所述, 由C1描述的控制器的可以得到满足式(9)且使 $\gamma(k)$ 最小的 $P^*(k)$ 和 $F^*(k)$. \square

值得指出的是, 本文的主要目的是解决当初初始状态估计存在不确定性的情况下稳定预测控制器的设计问题, 并没有过多地考虑模型的不确定性和外加扰动. 对于前者, 可通过线性系统多包描述的策略进行包含, 得到其 LMI 型预测控制器; 对于后者, 除多包描述外, 可采用设计系统鲁棒不变集的方法进行处理. 这些都可借鉴已有的方法, 本文在此没有对这两种情况进行更多的讨论.

注 1 1) 因为状态估计只能通过系统的输出得到, 所以对于包含系统状态估计的无穷时域预测控制器 C0, 只能从鲁棒控制的角度考虑该问题. 因此, 本文利用 min-max 原理对原问题进行了转化, 并由定理1得到了一个新的 LMI 型预测控制器. 2) 由前文可知, 式(10)是在 i 从 0 到 ∞ 时将式(9)进行累加得到的, 但这样会涉及到与无穷多个 $e^j(k+i)$ 相关的不等式约束, 在解决问题 C1 时会遇到很大的困难. 另一方面, 由引理1可知, $E(k + \bar{N} + i, \infty)$ ($i=1, 2, \dots$) 中的所有元素都包含在凸集 $E(k, k + \bar{N})$ 中, 所以可以用与 $E(k, k + \bar{N})$ 相关的有限个不等式代替上述的无穷多个不等式, 这样有利于求解问题 C1.

定理 2 设 $F^*(k)$ 为定理1中由控制器 C1 在 k 时刻得到的反馈矩阵, $z(k)$ 为系统(1)在 k 时刻的状态估计, 若取 $F^*(k)z(k)$ 作为该时刻系统输入, 则受控系统渐近稳定.

证明 设控制器 C1 在 k 时刻的最优解为 $\gamma^*(k)$, $S^*(k)$, $T^*(k)$. 下面证明其是 $T^*(k)$ 时刻控制器的一个可行解, 在此基础上容易得到系统渐近稳定. 注意到式(15), 由 Schur 引理可知, 当 $l=1$ 时, 有下式成立:

$$[T_1 \ T_2] \geq 0. \quad (24)$$

其中

$$T_1 = \begin{bmatrix} S^*(k) & \bar{e}^1(k) \\ (\bar{e}^1(k))^T & (\bar{e}^1(k))^T + \bar{e}^1(k) - S^*(k) \\ AS^*(k) + BT^*(k) & A\bar{e}^1(k) \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} S^*(k)A^T + (T^*(k))^T B^T \\ (\bar{e}^1(k))^T A^T \\ S^*(k) \end{bmatrix}.$$

根据 Schur 引理可知, 由式 (24) 可得

$$\begin{bmatrix} S^*(k) & \bar{e}(k) \\ (\bar{e}^1(k))^T & (\bar{e}^1(k))^T + \bar{e}^1(k) - S^*(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S^*(k)A^T + (T^*(k))^T B^T \\ (\bar{e}^1(k))^T A^T \end{bmatrix} (S^*(k))^{-1} \times [AS^*(k) + BT^*(k) \quad A\bar{e}^1(k)] \geq 0. \quad (25)$$

由上式可推知如下不等式成立 (具体推导略):

$$\begin{bmatrix} 1 & (z^1(k+1) + e^j(k+1))^T \\ z^1(k+1) + e^1(k+1) & S^*(k) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (26)$$

同理可知, 当 $l = 2, 3, \dots, L$ 时, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & (z^l(k+1) + e^l(k+1))^T \\ z^l(k+1) + e^l(k+1) & S^*(k) \end{bmatrix} \geq 0.$$

下面证明 $\gamma^*(k)$, $S^*(k)$ 和 $T^*(k)$ 在 $k+1$ 时刻满足式 (15). 由于 $0 \leq i \leq \bar{N}$ 时, 对于任意的 $j \in \{1, 2, \dots, \bar{N}\}$, $\bar{e}^j(k+i|k)$ 满足式 (15). 再结合式 (6), 由于 $e^j(k+\bar{N}+1|k) \in E(k, k+\bar{N})$, 必有下式成立:

$$M_3 = \begin{bmatrix} M_3^{11} & M_3^{12} \\ M_3^{21} & M_3^{22} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (27)$$

其中

$$M_3^{11} = \begin{bmatrix} S^*(k) & e_{M3} \\ (e_{M3})^T & (e_{M3})^T + e_{M3} - S^*(k) \end{bmatrix},$$

$$M_3^{21} = (M_3^{12})^T = \begin{bmatrix} AS^*(k) + BT^*(k) & Ae_{M3} \\ S^*(k) & 0 \\ T^*(k) & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3^{22} = \begin{bmatrix} S^*(k) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(k)Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(k)R^{-1} \end{bmatrix},$$

$$e_{M3} = \bar{e}^j(k + \bar{N} + 1).$$

综上所述, $\gamma^*(k)$, $S^*(k)$ 和 $T^*(k)$ 满足该 LMI 控制器 $k+1$ 时刻的约束条件. 所以, 令 $\gamma(k+1) = \gamma^*(k)$, $S(k+1) = S^*(k)$, $T(k+1) = T^*(k)$, 则 $\gamma(k+1)$, $S(k+1)$, $T(k+1)$ 是该控制器 $k+1$ 时刻的一个可行解. 由于 $P^*(k) = (\gamma^*(k))(S^*(k))^{-1}$, 类似于文献 [8] 的证明, 易得

$$x^T(k)P^*(k)x(k) \geq x^T(k+1)P^*(k+1)x(k+1).$$

另一方面, 由式 (9) 可知

$$x^T(k)P^*(k)x(k) \geq \|x(k) - e(k)\|_Q,$$

而 $e(k)$ 处于有限范围内, 所以当 $\|x(k)\| \rightarrow \infty$ 时必有

$$x^T(k)P^*(k)x(k) \geq \|x(k) - e(k)\|_Q \rightarrow \infty.$$

综上所述, $x^T(k)P^*(k)x(k)$ 可以作为一个系统的 Lyapunov 函数, 受控系统渐近稳定. \square

注 2 定理 1 和定理 2 讨论了在只能得到系统状态估计的情况下, 如何使系统的 Lyapunov 函数 $x^T(k|k)P(k)x(k|k)$ 递减的问题. 在上述定理 1 和定理 2 的证明中, 用到了变量 $x(k)$ 或 $x(k+i|k)$ 等, 但其中只有本时刻的估计值 $z(k)$ 以及估计值范围的顶点 $e^j(k+i)$ 或 $\bar{e}^j(k+i)$ 是已知的. 下节的算法将针对这些已知变量展开讨论.

以上讨论的是无约束情况, 系统存在约束时也应将其转化为相应的 LMI 形式. 下面对存在状态约束的情况进行简要讨论. $x(k) \in X \subseteq R^n$ 为系统状态, 且设 $X = \{x | \|x\|^2 \leq \alpha\}$, α 为一个正常数. 类似于式 (26) 的证明过程易知, 对于 $i = 1, 2, \dots$, 有下式成立:

$$\|z^l(k+i|k) + e^l(k+i)\|_{(S(k))^{-1}}^2 \leq 1, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (28)$$

因为使 $\|x(k+i|k)\|^2 = \|z(k+i|k) + e(k+i)\|^2 \leq \alpha$ 成立的一个充分条件为 $\|z^j(k+i|k) + e^j(k+i)\|^2 \leq \alpha$, 所以当 $(S(k))^{-1} \geq 1/\alpha$ 时, 可以满足状态约束, 表达成如下 LMI 形式:

$$\alpha \geq S(k). \quad (29)$$

容易知道, 即使将有约束情况引入定理 1 和定理 2, 也不会影响其结论成立.

4 基于状态估计的鲁棒预测控制算法与仿真

上节给出了一种基于状态估计的 LMI 型预测控制器, 下面给出相应的控制算法.

算法 1 基于状态估计的鲁棒预测控制算法.

Step 1: 当 $k = 0$ 时, 得到系统的初始状态估计 $z(0)$ 和输出 $y(0)$ 以及系统的初始状态估计误差范围 $\{e(0)\} = \text{Co}\{e^1(0), e^2(0), \dots, e^L(0)\}$ 和一个满足引理 1 的正整数 \bar{N} , 并且由式 (3) 得到 $E(0, \bar{N})$, 令 $z^i(0) = z(0)$, $i = 0, 1, \dots, L$;

Step 2: 将 $z^i(k)$ 和 $E(k, k + \bar{N})$ 代入控制器 C1 及式 (29), 得到相应的 $\gamma^*(k)$, $S^*(k)$ 和 $T^*(k)$, 取系统在该时刻的输入为 $u(k) = T^*(k)(S^*(k))^{-1}z(k)$;

Step 3: 由式 (2) 得到系统 $k+1$ 时刻状态估计 $z(k+1)$, 并由定义 2 得到 $z^i(k+1)$, 由 $E(k, k + \bar{N})$ 和式 (3) 得到 $E(k+1, k+1 + \bar{N})$, 转 Step 2;

Step 4: 若系统状态估计 $z(k)$ 和 $E(k, k + \bar{N})$ 的各项点已充分接近原点, 则停止迭代.

从上文的定理证明和算法看, 并没有对估计误差范围进行限制, 即可以容忍较大的误差范围.

下面利用 Matlab 软件对上述算法进行仿真. 考

考虑如下线性系统:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = [-0.5 \quad 0.3]x(k).$$

其状态约束为 $x(k) \in \{x(k) | \|x(k)\|^2 \leq 15^2\}$, 状态估计方程中 $H = [-0.2857 \quad 2.5714]^T$. 系统的初始状态为 $x(0) = [-10.5 \quad 10]^T$ (知道系统的真实初始状态是为了给出系统的状态轨迹并得到系统各时刻的输出). 系统的初始状态估计取为 $z(0) = [-9.5 \quad 9]^T$. 取 0 时刻估计误差的范围

$$\{e(0)\} =$$

$$\text{Co}\{[-1 \quad 1.2]^T, [-1.2 \quad 1]^T, [0.5 \quad -0.5]^T\},$$

取预测控制器目标函数中

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = 1.$$

按引理 1 中 \bar{N} 的定义, 取 $\bar{N} = 2$. 依据算法 1, 将上述数据代入由 C1 描述的预测控制器进行仿真, 得到系统各时刻的输入为 $F^*(k)z(k)$, 其中 $z(k)$ 为各时刻的状态估计. 得到系统的状态轨迹如图 1 所示. 可以看出, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(k) \rightarrow 0$, 系统渐近稳定.

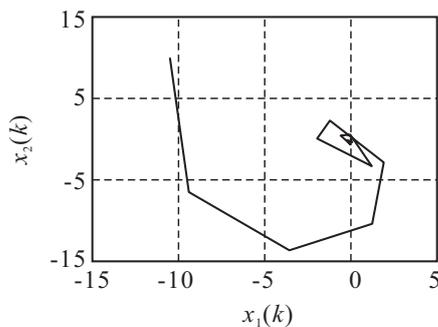


图 1 系统状态轨迹

5 结 论

由于线性系统的状态估计中存在估计误差, 类似于鲁棒控制, 本文根据 min-max 原理提出了一种 LMI 预测控制器. 由该控制器可以得到满足式 (9) 的反馈矩阵, 并可以使受控系统闭环稳定.

参考文献(References)

- [1] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993: 1-30.
(Xi Y G. Model predictive control[M]. Beijing: National Defense Publishing House, 1993: 1-30.)
- [2] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.
- [3] Magni L, De Nicolao G, Magnani L, et al. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems[J]. Automatica, 2001, 37: 1351-1362.
- [4] Melanie N Zeilinger, Colin N Jones, Davide M. Raimondo and Manfred Orari, real-time MPC-Stability through robust MPC design[C]. Joint 48th IEEE Conf on Decision and Control and 28th Chinese Control Conf. Shanghai: IEEE Press, 2009: 3980-3986.
- [5] 席裕庚, 朱红林, 李德伟. 基于多面体不变集的非线鲁棒预测控制器综合[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 187-190.
(Xi Y G, Zhu H L, Li D W. Synthesizing off-line robust model predictive control based on polyhedron invariant set[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 188-190.)
- [6] 丁宝苍, 杨鹏, 孙鹤旭, 等. 离线鲁棒预测控制器综合方法的改进方案[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 312-315.
(Ding B C, Yang P, Sun H X, et al. Improved off-line synthesis approach of robust model predictive control[J]. Control and Decision, 2005, 20(3): 312-315.)
- [7] Rakovic S V, Mayne D Q. A simple tube controller for efficient robust model predictive control of constrained linear discrete time systems subject to bounded disturbances[C]. Proc of the 16th IFAC World Congress IFAC. Praha, 2005: 871-874.
- [8] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [9] Pluymers B, Kothare M V, Suykens J A K, et al. Robust synthesis of constrained linear state feedback using LMIs and polyhedral invariant sets[C]. Proc of 2006 American Control Conf. Minneapolis: IEEE Press, 2006: 881-886.
- [10] Wan Z Y, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 2003, 39(6): 837-846.
- [11] Due P, Kouramas K, Dua V, et al. MPC on a chip-recent advances on the application of multi-parametric model-based control[J]. Computers and Chemical Engineering, 2008, 32(4/5): 754-765.
- [12] Chesi G, Garulli A, Tesi A, et al. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 365-370.