文章编号: 1001-0920 (2012) 09-1381-06

基于Choquet积分的模糊数直觉模糊数多属性决策方法

陶长琪[1], 凌和良[1,2]

(1. 江西财经大学 信息管理学院，南昌 330032；2. 南昌工程学院 理学系，南昌 330099)

摘 要: 根据模糊数直觉模糊数的运算法则, 提出了基于模糊测度和Choquet积分的模糊数直觉模糊数的信息集成算子, 并证明了该算子的相关性质. 运用该算子研究了属性间具有关联性的、属性值为模糊数直觉模糊数的多属性决策方法, 最后通过实例分析表明了所提出方法的有效性.

关键词: 多属性决策；集成算子；关联性；Choquet 积分；模糊数直觉模糊数

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Approach for multiple attribute decision-making with fuzzy-number-intuitionstic-fuzzy-number based on Choquet integral

TAO Chang-qi[1], *LING He-liang*[1,2]

(1. School of Information，Jiangxi University of Finances and Economics，Nanchang 330032，China；2. Department of Science，Nanchang Institute of Technology，Nanchang 330099，China. Correspondent：LING He-liang，E-mail: lingheliang@163.com)

Abstract: Based on Choquet integral and operational laws of fuzzy-number-intuitionstic-fuzzy-number, an aggregation operator of fuzzy-number-intuitionstic-fuzzy-number is presented, and some of its properties are investigated. Then, an approach of interactive multiple attribute decision-making with fuzzy-number-intuitionstic-fuzzy-number based on this aggregation operator is given. Finally, a practical example is provided to show the effectiveness of the method.

Key words: multiple attribute decision-making；aggregation operator；interactive；Choquet integral；fuzzy-number-intuitionistic-fuzzy-number

1 引 言

工程、经济和管理中的许多问题都可以转化为多属性决策问题加以处理. 决策属性指标体系的构建是多属性决策问题的关键内容之一, 通常所建立的决策属性指标体系应满足完备性、代表性和独立性, 但在实际应用中难以达到这一要求, 往往不得不放弃对属性指标体系间独立性的要求[1]. 由于属性间存在关联, 使得属性权重的可加性遭到破坏, 导致多属性决策问题中常用的加权平均算子失效. 例如, 以概率论、数理统计和代数 3 门课程考核学生, 概率论和数理统计两门课程存在相关性, 数理统计成绩好的学生往往概率论成绩也好, 若利用加权平均算子考核学生, 则存在高估概率论 (或数理统计) 学得好的学生[2]. 再例如, 根据价格、性能和服务 3 个指标选购设备, 由于性能好的设备, 价格往往较高, 利用加权平均算子会使得价格和性能两个属性存在关联而抵消了其各自的独立贡献[3]. 文献 [2] 对属性间的关联进行了总结, 并分析了对决策效果的影响. 综上所述, 对关联多属性决策方法的研究具有重要的理论和现实意义.

Sugeno 提出的模糊测度是处理关联多属性决策问题的一种有效方法, 利用模糊测度对属性和属性集的权重建模, 即在决策过程中不但考虑单个属性的权重, 而且考虑属性集的权重. 运用模糊测度和 Choquet 积分算子, 文献 [1,3-4] 对属性值为实数情况下的关联多属性决策方法进行了研究, 并将其应用于工程、经济和管理的决策问题. 由于实际问题的复杂性和决策者对问题的认识程度和知识局限性, 对属性给出确定的估值往往存在困难. 由 Atanssov 等提出的直觉模糊集和区间直觉模糊集能较好地刻画客观事物的模糊本质, 在处理模糊性和不确定性方面更具

收稿日期: 2011-01-24；**修回日期:** 2011-05-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71073073)；教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-07-0382).

作者简介: 陶长琪(1967−), 男, 教授, 博士生导师, 从事经济决策模型与方法等研究；凌和良(1979−), 男, 讲师, 博士生, 从事决策理论与方法的研究.

有实用性[5-6]. 文献 [7-8] 运用 Choquet 积分分别研究了属性值为直觉模糊数和区间直觉模糊数的信息集成算子, 并将其应用于关联多属性决策问题. 为了弥补直觉模糊数和区间直觉模糊数缺少重心的缺陷, 文献 [9] 给出了模糊数直觉模糊集. 文献 [10-11] 探讨了属性独立情况下的模糊数直觉模糊数的集成算子及其应用. 从文献上看, 基于模糊测度和 Choquet 积分研究属性值为糊数直觉模糊数的关联多属性决策方法较为少见.

本文将 Choquet 积分应用于模糊数直觉模糊集, 提出了基于模糊测度和 Choquet 积分的模糊数直觉模糊数的信息集成算子. 该算子具有幂等性、有序单调性、有界性和置换不变性, 可作为多属性决策的信息集成方法. 最后将该算子应用于属性值为模糊数直觉模糊数的关联多属性决策问题, 为解决模糊数直觉模糊数的关联多属性决策问题提供了一种有效方法.

2 基础知识

2.1 模糊测度和 Choquet 积分

定义 1[8] 设 $P(X)$ 为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的幂集, 给定 $\rho\in(-1,\infty),\mu:P(X)\to[0,1]$, 若满足如下条件, 则称 μ 为定义在 X 上的模糊测度:

1) $\mu(\varnothing)=0,\mu(X)=1$;

2) 假如 $B,C\in P(X),B\subset C$, 则有 $\mu(B)\leqslant\mu(C)$;

3) $\forall B,C\in P(X),B\bigcap C=\varnothing$, 有 $\mu(B\bigcup C)=\mu(B)+\mu(C)+\rho\mu(B)\mu(C)$.

若 X 为某个多属性决策问题的指标集, 则对于 $B,C\in P(X)$, $\mu(B)$ 和 $\mu(C)$ 可认为是属性集 B 和 C 的权重. 若 $\rho=0$, $\mu(B\bigcup C)=\mu(B)+\mu(C)$, 则表明属性集 B,C 相互独立; 若 $-1<\rho<0,\mu(B\bigcup C)<\mu(B)+\mu(C)$, 则表明属性集存在冗余关联; 若 $\rho>0,\mu(B\bigcup C)>\mu(B)+\mu(C)$, 则表明属性集存在互补关联.

定义 2[2] 若 f 为定义在 X 上的非负函数, μ 为定义在 X 上的模糊测度, 则 f 关于模糊测度 μ 的离散 Choquet 积分为

$$\int f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}f(x_{(i)})[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})].\tag{1}$$

其中: (i) 为 $f(x_{(i)})$ 向量的变换, 使得 $0\leqslant f(x_{(1)})\leqslant f(x_{(2)})\leqslant\cdots\leqslant f(x_{(n)})$; $A_{(i)}=(x_{(i)},x_{(i+1)},\cdots,x_{(n)})$, 且 $A_{(n+1)}=0$.

2.2 模糊数直觉模糊数及其运算

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为一个非空集合; $E=\{(x_i,\langle\mu_E(x_i),\nu_E(x_i)\rangle)|x_i\in X\}$ 为直觉模糊集; $\mu_E(x_i)$, $\nu_E(x_i)$ 分别为 X 中元素 x_i 的隶属度和非隶属度, $0\leqslant\mu_E(x_i)\leqslant1,0\leqslant\nu_E(x_i)\leqslant1$, 且满足条件 $0\leqslant\mu_E(x_i)+\nu_E(x_i)\leqslant1$. Atanassov 对直觉模糊集进行拓展, 称 $\overline{E}=\{(x_i,\langle\overline{\mu}_{\overline{E}}(x_i),\overline{\nu}_{\overline{E}}(x_i)\rangle)|x_i\in X\}$ 为区间直觉模糊集, $\overline{\mu}_{\overline{E}}(x_i)$ 和 $\overline{\nu}_{\overline{E}}(x_i)$ 分别为 X 中元素 x_i 的隶属度和非隶属度, $\overline{\mu}_{\overline{E}}(x_i)\subset[0,1],\overline{\nu}_{\overline{E}}(x_i)\subset[0,1]$, 且满足 $\sup\overline{\mu}_{\overline{E}}(x_i)+\sup\overline{\nu}_{\overline{E}}(x_i)\leqslant1,\forall x_i\in X$. 用区间数表示隶属度和非隶属度时, 有时为了覆盖整个取值范围, 区间的两个端点值可能很小或很大, 在应用中如果认为整个区间内取值机会均等, 则所得结果会产生较大误差[10]. 刘锋等[9]提出的模糊数直觉模糊数能有效弥补这一不足, 所提出的 $\widehat{E}=\{(x_i,\langle\widehat{\mu}_{\widehat{E}}(x_i),\widehat{\nu}_{\widehat{E}}(x_i)\rangle)|x_i\in X\}$ 为模糊数直觉模糊集. 其中: $\widehat{\mu}_{\widehat{E}}(x_i)=(a,b,c)$ 和 $\widehat{\nu}_{\widehat{E}}(x_i)=(l,p,q)$ 均为三角模糊数; $a,b,c;l,p,q$ 分别为隶属度和非隶属度的下界、重心和上界. 为了方便, 一个模糊数直觉模糊数一般简记为 $\alpha=\langle(a,b,c),(l,p,q)\rangle$, 且 $c+q\leqslant1$.

文献 [10] 中定义了如下关于模糊数直觉模糊数的运算.

定义 3 设 $\alpha_1=\langle(a_1,b_1,c_1),(l_1,p_1,q_1)\rangle$ 和 $\alpha_2=\langle(a_2,b_2,c_2),(l_2,p_2,q_2)\rangle$ 为两个模糊数直觉模糊数, 加法和数乘分别定义为

$$\begin{aligned}\alpha_1\oplus\alpha_2=\langle(&a_1+a_2-a_1a_2,b_1+b_2-b_1b_2,\\&c_1+c_2-c_1c_2),(l_1l_2,p_1p_2,q_1q_2)\rangle.\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\lambda\alpha_1=\langle(&1-(1-a_1)^\lambda,1-(1-b_1)^\lambda,\\&1-(1-c_1)^\lambda),(l_1^\lambda,p_1^\lambda,q_1^\lambda)\rangle,\ \lambda\geqslant0.\end{aligned}\tag{3}$$

2.3 模糊数直觉模糊数的比较

为了能对模糊数直觉模糊数进行比较, 文献 [11] 给出了关于模糊数直觉模糊数的两个得分函数. 设 $\alpha=\langle(a,b,c),(l,p,q)\rangle$ 为一个模糊数直觉模糊数, 则称

$$S(\alpha)=\frac{a+2b+c}{4}-\frac{l+2p+q}{4}\tag{4}$$

为 α 的得分函数, 其中 $S(\alpha)\in[-1,1]$. $S(\alpha)$ 的值越大, α 越大.

当 $S(\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的值有相等情况出现时, 可利用另一个得分函数 $L(\alpha)$ 进行比较, 即

$$L(\alpha)=\frac{a+2b+c}{4}\Big(2-\frac{a+2b+c}{4}-\frac{l+2p+q}{4}\Big),\tag{5}$$

其中 $L(\alpha)\in[0,1]$. $L(\alpha)$ 的值越大, α 越大.

3 基于 Choquet 积分的模糊数直觉模糊数的信息集成算子及其性质

根据上述 Choquet 积分的定义和模糊数直觉模糊数的运算法则, 给出基于 Choquet 积分的模糊数直觉模糊数的信息集成算子.

定义 4 若 μ 为定义在 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊测度, $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为定义在 X 上的一组模糊数直觉模糊数, 则 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 关于模糊测

度 μ 的离散 Choquet 积分定义为

$$\int \alpha \mathrm{d}\mu = \mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} \alpha_{(i)}[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})]. \tag{6}$$

其中: (i) 为 α_i 的变换, 使得 $\alpha_{(1)} \leqslant \alpha_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{(n)}$; $A_{(i)} = (x_{(i)}, x_{(i+1)}, \cdots, x_{(n)})$, 且 $A_{(n+1)} = 0$.

当 $\mu(x_{(i)}) = \mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 式 (6) 退化为文献 [11] 中的属性间相互独立的模糊数直觉模糊数的有序加权平均算子.

根据模糊数直觉模糊数的运算法则, 可将式 (6) 进一步推导, 得到如下定理.

定理 1 设 $\alpha_i = \langle (a_i, b_i, c_i), (l_i, p_i, q_i) \rangle (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组模糊数直觉模糊数, μ 为 X 的模糊测度, 则 FIFCA 信息集成算子的结果为一模糊数直觉模糊数, 且有

$$\begin{aligned} &\mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \\ &\Big\langle \Big(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - b_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - c_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}\Big), \\ &\Big(\prod_{i=1}^{n}(l_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \prod_{i=1}^{n}(p_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &\prod_{i=1}^{n}(q_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle. \end{aligned} \tag{7}$$

证明 利用数学归纳法, 当 $n = 2$ 时, 根据模糊数直觉模糊数的加法和数乘运算法则, 有

$$\begin{aligned} &\mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2) = \\ &(\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)}))\alpha_{(1)} \oplus (\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)}))\alpha_{(2)} = \\ &\langle (1 - (1 - a_{(1)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})})(1 - a_{(2)}^{\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})}), \\ &1 - (1 - b_{(1)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})})(1 - b_{(2)}^{\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})}), \\ &1 - (1 - c_{(1)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})})(1 - c_{(2)}^{\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})})\rangle, \\ &(l_{(1)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})} l_{(2)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})}, \\ &p_{(1)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})} p_{(2)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})}, \\ &q_{(1)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})} q_{(2)}^{\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})})\rangle = \\ &\Big\langle \Big(1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - a_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - b_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - c_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}\Big), \\ &\Big(\prod_{i=1}^{2}(l_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \prod_{i=1}^{2}(p_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &\prod_{i=1}^{2}(q_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle. \end{aligned}$$

假设当 $n = k$ 时, 定理成立, 则当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} &\mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) = \\ &\mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \oplus \\ &(\mu(A_{(k+1)}) - \mu(A_{(k+2)}))\alpha_{(k+1)} = \\ &\Big\langle \Big(1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - a_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})} \\ &(1 - a_{(k+1)})^{\mu(A_{(k+1)}) - \mu(A_{(k+2)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - b_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})} \\ &(1 - b_{(k+1)})^{\mu(A_{(k+1)}) - \mu(A_{(k+2)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - c_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})} \\ &(1 - c_{(k+1)})^{\mu(A_{(k+1)}) - \mu(A_{(k+2)})}\Big), \\ &\Big(\prod_{i=1}^{k}(l_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})} l_{(k+1)}^{\mu(A_{(k+1)}) - \mu(A_{(k+2)})}, \\ &\prod_{i=1}^{k}(p_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})} p_{(k+1)}^{\mu(A_{(k+1)}) - \mu(A_{(k+2)})}, \\ &\prod_{i=1}^{k}(q_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})} q_{(k+1)}^{\mu(A_{(k+1)}) - \mu(A_{(k+2)})}\Big)\Big\rangle = \\ &\Big\langle \Big(1 - \prod_{i=1}^{k+1}(1 - a_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{k+1}(1 - b_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &1 - \prod_{i=1}^{k+1}(1 - c_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}\Big), \\ &\Big(\prod_{i=1}^{k+1}(l_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \prod_{i=1}^{k+1}(p_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}, \\ &\prod_{i=1}^{k+1}(q_{(i)})^{\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})}\Big)\Big\rangle. \qquad \square \end{aligned}$$

由模糊数直觉模糊数的运算法则和定理 1 还可以得到 FIFCA 信息集成算子的如下性质.

性质 1 (幂等性) 设 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组模糊数直觉模糊数, μ 为定义在 X 上的模糊测度, 若 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha = \langle (a, b, c), (l, p, q) \rangle$, 则

$$\mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \alpha. \tag{8}$$

证明 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha$ 时, 由定理 1

可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{FIFCA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\\&\langle(1-(1-a)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},\\&1-(1-b)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},\\&1-(1-c)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))}),\\&(l^{\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},p^{\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))},\\&q^{\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))})\rangle.\end{aligned}$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))=\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(n+1)})=1,$$

所以有

$$\mathrm{FIFCA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\langle(a,b,c),(l,p,q)\rangle=\alpha.\ \square$$

性质 2 (有序单调性) 设 μ 为定义在 X 上的模糊测度, $\alpha_i=\langle(a_i,b_i,c_i),(l_i,p_i,q_i)\rangle$ 和 $\overline{\alpha}_i=\langle(\overline{a}_i,\overline{b}_i,\overline{c}_i),(\overline{l}_i,\overline{p}_i,\overline{q}_i)\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为两组模糊数直觉模糊数, 它们从小到大的排列为 $\alpha_{(1)}\leqslant\alpha_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{(n)}$ 和 $\overline{\alpha}_{(1)}\leqslant\overline{\alpha}_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\overline{\alpha}_{(n)}$, 且对于任意 i 有 $\alpha_{(i)}\geqslant\overline{\alpha}_{(i)}$, 即对应各分量有 $a_{(i)}\geqslant\overline{a}_{(i)},b_{(i)}\geqslant\overline{b}_{(i)},c_{(i)}\geqslant\overline{c}_{(i)}$, 而 $l_{(i)}\leqslant\overline{l}_{(i)},p_{(i)}\leqslant\overline{p}_{(i)}$, $q_{(i)}\leqslant\overline{q}_{(i)}$, 则有

$$\mathrm{FIFCA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geqslant\mathrm{FIFCA}(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots,\overline{\alpha}_n).\tag{9}$$

证明 因为 $A_{(i+1)}\subset A_{(i)}$, 所以有

$$\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\geqslant0,$$

又因为对于任意 i, 有 $\alpha_{(i)}\geqslant\overline{\alpha}_{(i)}$, 所以可得

$$\begin{aligned}&1-\prod_{i=1}^{n}(1-a_{(i)})^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\geqslant\\&1-\prod_{i=1}^{n}(1-\overline{a}_{(i)})^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})};\\&1-\prod_{i=1}^{n}(1-b_{(i)})^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\geqslant\\&1-\prod_{i=1}^{n}(1-\overline{b}_{(i)})^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})};\\&1-\prod_{i=1}^{n}(1-c_{(i)})^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\geqslant\\&1-\prod_{i=1}^{n}(1-\overline{c}_{(i)})^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})};\\&\prod_{i=1}^{n}l_{(i)}^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\overline{l}_{(i)}^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})};\\&\prod_{i=1}^{n}p_{(i)}^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\overline{p}_{(i)}^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})};\\&\prod_{i=1}^{n}q_{(i)}^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\overline{q}_{(i)}^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}.\end{aligned}$$

由模糊数直觉模糊数得分函数 (4) 可知

$$\mathrm{FIFCA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geqslant\mathrm{FIFCA}(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots,\overline{\alpha}_n).\ \square$$

性质 3 (有界性) 设 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组模糊数直觉模糊数, μ 为定义在 X 上的模糊测度, 令

$$\begin{aligned}\alpha^-=&\langle(\min_i(a_i),\min_i(b_i),\min_i(c_i)),\\&(\max_i(l_i),\max_i(p_i),\max_i(q_i))\rangle,\\\alpha^+=&\langle(\max_i(a_i),\max_i(b_i),\max_i(c_i)),\\&(\min_i(l_i),\min_i(p_i),\min_i(q_i))\rangle,\end{aligned}$$

则有

$$\alpha^-\leqslant\mathrm{FIFCA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\alpha^+.\tag{10}$$

证明 因为 $A_{(i+1)}\subset A_{(i)}$, 所以有

$$\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})\geqslant0,$$

又因为 $\min(a_i)\leqslant a_i\leqslant\max(a_i),i=1,2,\cdots,n$, 所以可得

$$\begin{aligned}&1-\prod_{i=1}^{n}(1-\min(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\\&1-\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\\&1-\prod_{i=1}^{n}(1-\max(a_i))^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}.\end{aligned}\tag{11}$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}))=1$, 式 (11) 可以改写为

$$\min_i(a_i)\leqslant1-\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\max_i(a_i).$$

同理可得

$$\min_i(b_i)\leqslant1-\prod_{i=1}^{n}(1-b_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\max_i(b_i),$$

$$\min_i(c_i)\leqslant1-\prod_{i=1}^{n}(1-c_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\max_i(c_i).$$

由 $\min(l_i)\leqslant l_i\leqslant\max(l_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 可得

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\min(l_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\\&\prod_{i=1}^{n}l_i^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\max(l_i)^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})},\end{aligned}$$

即

$$\min_i(l_i)\leqslant\prod_{i=1}^{n}l_i^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\max_i(l_i).$$

同理可得

$$\min_i(p_i)\leqslant\prod_{i=1}^{n}p_i^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})}\leqslant\max_i(p_i),$$

$$\min_i(q_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n} q_i^{\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})} \leqslant \max_i(q_i).$$

综上所述, 根据模糊数直觉模糊数得分函数 (4) 可得 $\alpha^- \leqslant \mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \leqslant \alpha^+$. □

由 FIFCA 信息集成算子的定义, 容易得到如下性质.

性质 4 (置换不变性)　设 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组模糊数直觉模糊数, μ 为定义在 X 上的模糊测度, $(\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n')$ 是 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的一个置换, 则有

$$\mathrm{FIFCA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \mathrm{FIFCA}(\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'). \tag{12}$$

4　基于 Choquet 积分的模糊数直觉模糊数的关联多属性决策方法

4.1　算法步骤

对于某一多属性决策问题, 设 $F = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$ 为决策方案集, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为评价指标 (属性) 集. 决策者对于方案 F_i 按指标 x_j 进行测度. 假设方案 F_i 在指标 x_j 下的特征信息用一个模糊数直觉模糊数表示, 记为 $\alpha_{ij} = \langle(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), (l_{ij}, p_{ij}, q_{ij})\rangle$. 基于前面介绍的 FIFCA 信息集成算子, 下面给出属性值为模糊数直觉模糊数的关联多属性决策方法, 具体步骤如下:

Step 1: 决策者给出各方案 $F_i(i=1,2,\cdots,m)$ 在各指标 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 下的评估值 $\alpha_{ij} = \langle(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), (l_{ij}, p_{ij}, q_{ij})\rangle$, 得到决策矩阵

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Step 2: 根据定义的模糊数直觉模糊数的得分函数, 对每一个方案 F_i 在各指标 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 下的模糊数直觉模糊数进行从小到大排序.

Step 3: 对各个属性和属性集的模糊测度 (权重) 进行专家评定.

Step 4: 利用 FIFCA 信息集成算子对决策矩阵 R 按行 (即每一个方案) 进行信息集成, 得到对应各行 (方案) 的综合评价值.

Step 5: 计算各行 (方案) 综合评价值的得分函数, 进行大小比较和排序择优.

4.2　案例分析

下面以文献 [11] 的案例为例进行分析, 对某大学的学院进行评估, 评估主要根据 3 项考核指标 (属性): 教学 (x_1), 科研 (x_2), 服务 (x_3); 然后对 5 个学院 $F_i(i=1,2,\cdots,5)$ 进行考核. 各指标下的评估信息经过统计处理后表示为模糊数直觉模糊数, 如表 1 所示.

利用本文方法对 5 个学院进行评估, 并确定最佳学院, 步骤如下.

Step 1: 根据问题的情况, 邀请相关专家评定各属性和属性集的模糊测度, 具体各属性和属性集的模糊测度如下:

$$\mu(\varnothing)=0,\ \mu(\{x_1\})=\mu(\{x_2\})=0.5,\ \mu(\{x_3\})=0.4,$$
$$\mu(\{x_1,x_2\})=0.8,\ \mu(\{x_1,x_3\})=0.7,$$
$$\mu(\{x_2,x_3\})=0.7,\ \mu(X)=\mu(\{x_1,x_2,x_3\})=1.$$

Step 2: 利用 Choquet 积分对各学院的模糊数直觉模糊数信息进行集成.

首先, 根据模糊数直觉模糊数的得分函数针对每个方案各指标值的大小进行排序; 然后根据前面定义的 FIFCA 信息集成算子对各个学院的信息进行综合集成. 结果如下:

$$F_1 = \langle(0.522, 0.624, 0.719), (0.000, 0.153, 0.260)\rangle,$$
$$F_2 = \langle(0.472, 0.572, 0.644), (0.100, 0.200, 0.300)\rangle,$$
$$F_3 = \langle(0.613, 0.638, 0.741), (0.115, 0.125, 0.217)\rangle,$$
$$F_4 = \langle(0.494, 0.578, 0.686), (0.000, 0.152, 0.200)\rangle,$$
$$F_5 = \langle(0.536, 0.638, 0.717), (0.000, 0.153, 0.260)\rangle.$$

Step 3: 计算模糊数直觉模糊数 $F_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的得分函数 $S(F_i)$, 计算结果为: $S(F_1)=0.481, S(F_2)=0.365, S(F_3)=0.512, S(F_4)=0.458, S(F_5)=0.491$. 按 $S(F_i)$ 值的大小, 各学院评估结果排序为 $F_3 \succ F_5 \succ F_1 \succ F_4 \succ F_2$. 因此, 最佳学院为 F_3, 得分最低的学院为 F_2, 与文献 [11] 所得结果是一致的. 由于本文考虑了属性间的关联性, F_1, F_4, F_5 学院的排名出现了变动, 但从表 1 中的数据看, 变动是合理的, 表明了本文方法的有效性.

表 1　决 策 矩 阵

F_i	x_j		
	x_1	x_2	x_3
F_1	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.0,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.4),(0.2,0.3,0.4)\rangle$
F_2	$\langle(0.4,0.5,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle$
F_3	$\langle(0.7,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.5,0.5,0.6),(0.2,0.3,0.3)\rangle$
F_4	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.2)\rangle$	$\langle(0.3,0.3,0.4),(0.1,0.2,0.2)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.0,0.1,0.2)\rangle$
F_5	$\langle(0.5,0.6,0.6),(0.2,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.0,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.4,0.5,0.6),(0.3,0.3,0.4)\rangle$

5 结 论

尽管有学者对模糊数直觉模糊数的信息集成进行了有意义的研究, 并将其应用于多属性决策问题, 但已有的研究大多基于属性间是相互独立的情况. 在实际决策问题中, 属性间往往存在关联, 关联性的存在必然影响决策效果. 本文利用模糊测度对属性和属性集的权重建模, 提出了基于Choquet积分的模糊数直觉模糊数的信息集成算子. 该算子利用模糊测度代替可加集函数度量属性和属性集的权重, 无需满足属性间独立的要求, 而当属性间相互独立, 即属性集的权重等于所包含属性权重之和时, 本文提出的算子退化为文献 [11] 中的情况, 所以相对而言本文方法更具有通用性, 更贴近现实中的决策问题.

参考文献(References)

[1] 毕克新, 孙金花, 张铁柱, 等. 基于模糊积分的区域中小企业技术创新测度与评价[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(2): 40-46.
(Bi K X, Sun J H, Zhang T Z, et al. Measurement and evaluation of regional technological innovation in small and medium enterprises based on fuzzy integral[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2005, 25(2): 40-46.)

[2] Marichal J L. An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 800-807.

[3] 章玲, 周德群. 基于k-可加模糊测度的多属性决策分析[J]. 管理科学学报, 2008, 11(6): 18-24.
(Zhang L, Zhou D Q. Multiple attributes decision making based on k-additive fuzzy measures[J]. J of Management Sciences in China, 2008, 11(6): 18-24.)

[4] Grabisch M. The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making[J]. European J of Operational Research, 1996, 89(3): 445-456.

[5] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[6] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[7] Tan C Q, Chen X H. Intuitionistic fuzzy Choquet integral operator for multi-criteria decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(1): 149-157.

[8] Xu Z S. Choquet integral of weighted intuitionistic fuzzy information[J]. Information Sciences, 2010, 180(5): 726-736.

[9] 刘锋, 袁学海. 模糊数直觉模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88-91.
(Liu F, Yuan X H. Fuzzy number intuitionistic fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(1): 88-91.)

[10] 汪新凡. 模糊数直觉模数几何集成算子及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 607-612.
(Wang X F. Fuzzy number intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators and their application to decision making[J]. Control and Decison, 2008, 23(6): 607-627.)

[11] 汪新凡, 杨小娟. 基于FV-OWA算子的不确定多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(2): 380-383.
(Wang X F, Yang X J. Uncertain multiple attribute decision making method based on FV-OWA operator[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(2): 380-383.)

(上接第1380页)

[12] 张小兵, 马建仓, 陈翠华. 基于最大信噪比的盲源分离算法[J]. 计算机仿真, 2006, 23(10): 72-75.
(Zhang X B, Ma J C, Chen C H. A blind source separation algorithm based on maximum signal noise ratio[J]. Computer Simulation, 2006, 23(10): 72-75.)

[13] 高剑茹, 高宝成. 基于最大信噪比的盲源分离算法的修正与比较[J]. 电脑与信息技术, 2009, 17(1): 19-21.
(Gao J R, Gao B C. Revision and comparison of blind source separation algorithm based on maximum signal noise ratio[J]. Computer and Information Technology, 2009, 17(1): 19-21.)

[14] 陈寿齐, 沈越泓, 许魁. 有噪复杂度寻踪的新算法[J]. 信号处理, 2010, 26(2): 314-320.
(Chen S Q, Shen Y H, Xu K. A novel algorithm for noisy complexity pursuit[J]. Signal Processing, 2010, 26(2): 314-320.)